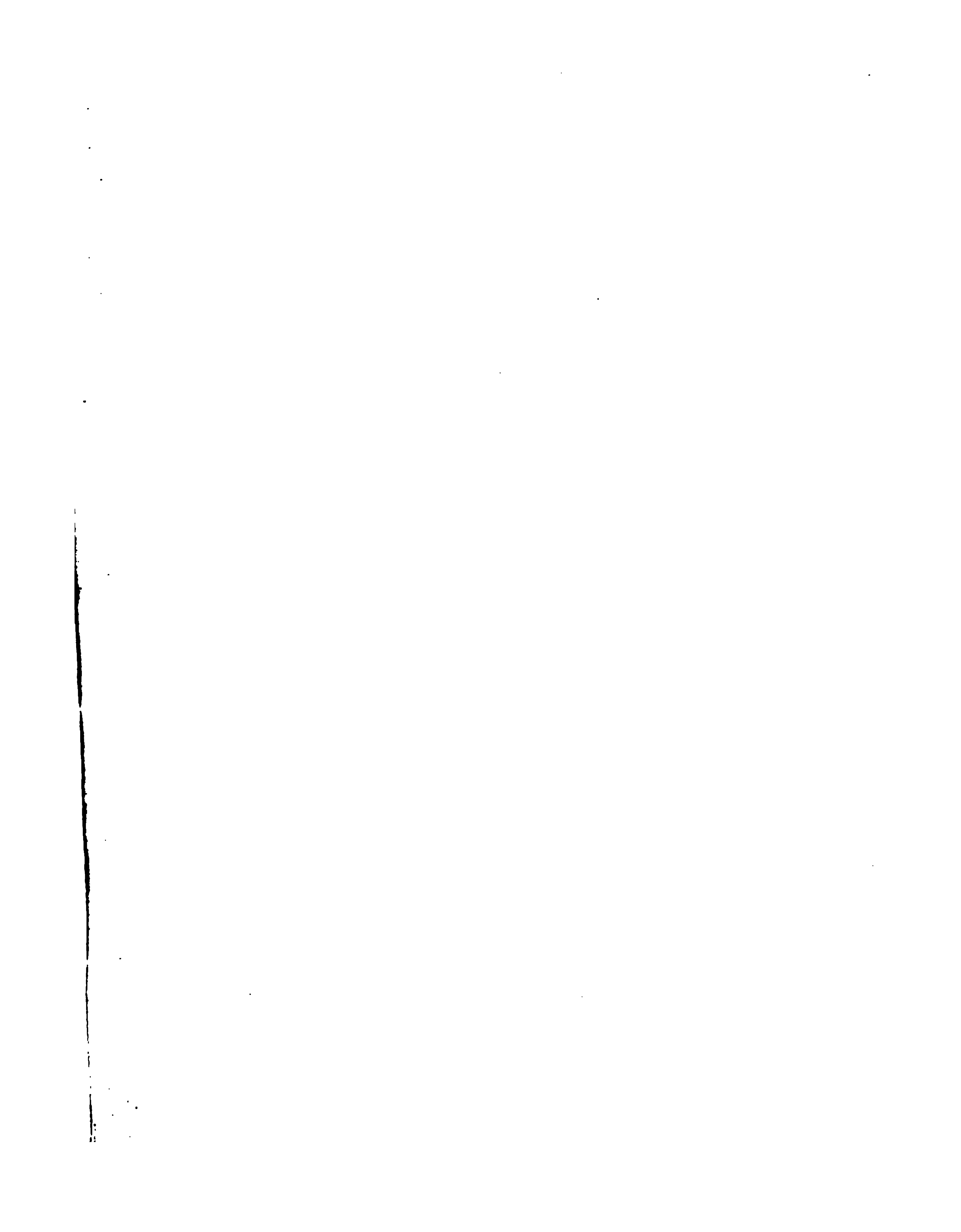

Stanford University Libraries



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

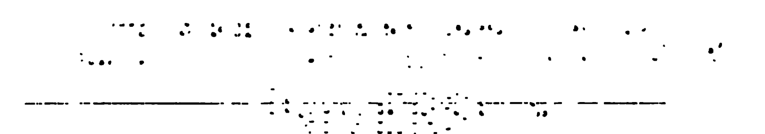
In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.



Zwölfter Band.

in 4 Heften.

Mit zwei Kupfertafeln.

Berlin, 1834.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier).
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des zwölften Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

1.

De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematis de transformatione et determinatione integralium multiplicium.

(Auct. Dr. *C. G. J. Jacobi*, prof. math. Regiom.)

Introductio.

1.

Propositis inter variabiles

$$x_1, x_2 \dots x_n \text{ et } y_1, y_2 \dots y_n,$$

n aequationibus linearibus huiusmodi

$$y_m = \alpha_1^{(m)} x_1 + \alpha_2^{(m)} x_2 + \dots + \alpha_n^{(m)} x_n,$$

facile patet, coëfficientes $\alpha_n^{(m)}$, quorum est numerus nn, ita determinari posse, ut data functio quaelibet homogenea secundi ordinis variabilium $x_1, x_2 \dots x_n$ transformetur in aliam variabilium $y_1, y_2 \dots y_n$, quae solis earum quadratis constet, simulque summa quadratorum variabilium non mutet valorem, sive fiat

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 + \dots + x_n x_n = y_1 y_1 + y_2 y_2 + \dots + y_n y_n.$$

Nam haec altera conditio sibi poscit aequationes conditionales numero $\frac{n(n+1)}{2}$, porro cum de functione transformata supponatur abiisse producta e binis variabilibus conflata, accedunt aequationes $\frac{n(n-1)}{2}$; ita ut habeas aequationes conditionales numero nn, qui est numerus coëfficientium substitutionis adhibitae. Unde problema determinatum est.

Pro tribus variabilibus est problema tritum illud de superficie secundi ordinis revocanda ad axes superficiei principales. Problematis generalis solutionem nuper dedit Cl. Cauchy (Exerc. de Mathém. t. IV. pag. 161. sqq.). Quaestiones de eadem re, a praestantissimo Sturm illustri Academiae Parisiensi commissas, nondum lucem vidisse dolemus.

Sit functio, in quam proposita transformatur,

$$G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 + \dots + G_n y_n y_n;$$

inveniuntur quantitates G_1, $G_2 \ldots . G_n$ ut radices diversae aequationis algebraicae n^{ti} gradus,' quas Cl. Cauchy demonstravit, omnes fore reales. Quibus determinatis, coëfficientium, quarum ope y_m per variabiles x_1, $x_2 \ldots$ $\ldots x_n$ exhibetur,

$$\alpha_1^{(m)},\ \alpha_2^{(m)} \ldots . \alpha_n^{(m)}$$

quadrata et binorum producta per unicam G_m rationaliter exprimuntur; atque invenitur, coëfficientes ipsius $x_\varkappa$ in valoribus ipsarum y_1, $y_2 \ldots . y_n$,

$$\alpha'_\varkappa,\ \alpha''_\varkappa \ldots . \alpha_\varkappa^{(n)},$$

quantitatum G_1, $G_2 \ldots . G_n$ respective easdem functiones esse.

Coëfficientium quadrata et producta illa modo singulari sequentibus exhibebo; quo saepius calculis complicatis concinnitas conciliatur. Considero enim quantitates G_1, $G_2 \ldots . G_n$, quae per aequationem illam n^{ti} gradus a constantibus functionis propositae pendent, tamquam functiones harum constantium, atque demonstro, quadrata et producta illa aequalia fore ipsis earum differentialibus partialibus, secundum constantes illas sumtis. Sit enim functionis propositae terminus quilibet in $x_\varkappa x_\lambda$ ductus, $p x_\varkappa x_\lambda$, invenio

$$\alpha_\varkappa^{(m)} \alpha_\lambda^{(m)} = \frac{\partial G_m}{d p}.$$

Unde vides, unica formata aequatione n^{ti} gradus, problema confici. Quippe cuius radices dant expressionem transformatam; earumque differentialia partialia sumta secundum constantes functionis transformandae, quae aequationem illam afficiunt, dant coëfficientes substitutionis adhibendae.

Formulae concinniores evadunt pro formis specialibus, quas functio transformanda induit; quarum unam et alteram accuratius examino. Ubi etiam pro tribus variabilibus aequationem cubicam ita exhibitam invenis, ut ipso conspectu pateat, radices eius omnes esse reales.

2.

Demonstravi olim in commentatione „*de transformatione integralis duplicis indefiniti etc.*" (Vol. VIII. pag. 253. sqq.), ad investigationem axium principalium superficiei secundi ordinis — qui est casus problematis antecedentis pro tribus variabilibus — usu idoneo quantitatum imaginariarum facto, revocari posse transformationem quandam integralis simplicis, cuius in analysi frequens usus est,

$$\int \frac{\partial \varphi}{[l + m\cos^2\varphi + n\sin^2\varphi + 2l'\cos\varphi\sin\varphi + 2m'\sin\varphi + 2n'\cos\varphi]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\int \frac{\partial y}{[G - G_1\cos^2 y - G_2\sin^2 y]^{\frac{1}{2}}}.$$

Quae peragitur transformatio ope substitutionis huiusmodi

$$\cos\varphi = \frac{\beta - \beta' \cos\gamma - \beta'' \sin\gamma}{\alpha - \alpha' \cos\gamma - \alpha'' \sin\gamma},$$

$$\sin\varphi = \frac{\gamma - \gamma' \cos\gamma - \gamma'' \sin\gamma}{\alpha - \alpha' \cos\gamma - \alpha'' \sin\gamma}.$$

Propter quem utriusque problematis consensum fit, ut etiam hic locum habeat determinatio coëfficientium substitutionis adhibitae per differentialia partialia ipsarum G, G_1, G_2 sumta secundum constantes l, m etc. Quae quantitates in hoc problemate inveniuntur ut radices aequationis cubicae

$$(x-l)(x+m)(x+n) - l'l'(x-l) + m'm'(x+m) + n'n'(x+n) - 2l'm'n' = 0.$$

Ita e. gr. dedi l. c. pg. 329.30 formulas *)

$$\alpha\alpha = \frac{(G+m)(G+n) - l'l'}{(G-G')(G-G'')},$$

$$-\alpha\beta = \frac{n'(G+n) - l'm'}{(G-G')(G-G'')},$$

quas expressiones, si aequationem cubicam allegatam in auxilium vocas, vel ipso intuitu patet, fore

$$\alpha\alpha = \frac{\partial G}{\partial l}, \quad \alpha\beta = \frac{\partial G}{2\partial n'}.$$

Eodemque modo pro reliquis obtines:

$$\alpha\alpha = \frac{\partial G}{\partial l}, \quad \alpha'\alpha' = -\frac{\partial G_1}{\partial l}, \quad \alpha''\alpha'' = -\frac{\partial G_2}{\partial l},$$

$$\beta\beta = \frac{\partial G}{\partial m}, \quad \beta'\beta' = -\frac{\partial G_1}{\partial m}, \quad \beta''\beta'' = -\frac{\partial G_2}{\partial m},$$

$$\gamma\gamma = \frac{\partial G}{\partial n}, \quad \gamma'\gamma' = -\frac{\partial G_1}{\partial n}, \quad \gamma''\gamma'' = -\frac{\partial G_2}{\partial n},$$

porro:

$$\beta\gamma = \frac{\partial G}{2\partial l'}, \quad \beta'\gamma' = -\frac{\partial G'}{2\partial l'}, \quad \beta''\gamma'' = -\frac{\partial G''}{2\partial l''},$$

$$\gamma\alpha = \frac{d G}{2\partial m'}, \quad \gamma'\alpha' = -\frac{\partial G'}{2\partial m'}, \quad \gamma''\alpha'' = -\frac{\partial G''}{2\partial m''},$$

$$\alpha\beta = \frac{\partial G}{2\partial n'}, \quad \alpha'\beta' = -\frac{\partial G'}{2\partial n'}, \quad \alpha''\beta'' = -\frac{\partial G''}{2\partial n''}.$$

Transformationem plane similem, docui in alia commentatione anteriore (Vol. II. pag. 234.), adhiberi posse ad duplicis integralis transformationem. Sit enim

$$xx + yy + zz = uu + vv + ww = 1,$$

unde x, y, z nec non u, v, w considerari possunt ut coordinatae puncti sphaerae, cuius radius $= 1$: demonstravi, coëfficientes sedecim α, β, γ etc.

*) Loco citato pro G; G_1, G_2, scriptum invenis GG, G_1G_1, G_2G_2.

ita determinari posse, ut locum habeat substitutio

$$u = \frac{\alpha + \alpha' x + \alpha'' y + \alpha''' z}{\delta + \delta' x + \delta'' y + \delta''' z},$$
$$v = \frac{\beta + \beta' x + \beta'' y + \beta''' z}{\delta + \delta' x + \delta'' y + \delta''' z},$$
$$w = \frac{\gamma + \gamma' x + \gamma'' y + \gamma''' z}{\delta + \delta' x + \delta'' y + \delta''' z},$$

simulque functio data

$$a + a' xx + a'' yy + a''' zz + 2b' x + 2b'' y + 2b''' z + 2c' yz + 2c'' zx + 2c''' xy$$

abeat in hanc expressionem

$$[G - G_1 uu - G_2 vv - G_3 ww][\delta + \delta' x + \delta'' y + \delta''' z]^2,$$

ipsis G, G_1, G_2, G_3 rite determinatis. Sint ∂S, $\partial S'$ elementa sphaericae superficiei, quae coordinatis x, y, z et u, v, w respondent, probavi, e substitutione adhibita sequi

$$\partial S' = \frac{\partial S}{(\delta + \delta' x + \delta'' y + \delta''' z)^3}.$$

Unde habetur

$$\iint \frac{\partial S}{a + a' xx + a'' yy + a''' zz + 2b' x + 2b'' y + 2b''' z + 2c' yz + 2c'' zx + 2c''' xy}$$
$$= \iint \frac{\partial S'}{G - G_1 uu - G_2 vv - G_3 ww}.$$

Quae est transformatis integralis duplicis, de qua diximus.

Et hoc problema, adnotavi in commentatione supra citata (Vol. VIII.), ope quantitatum imaginariarum idonee adhibitarum convenire cum problemate algebraico initio proposito, casu *quatuor* variabilium. Unde et hic locum habet determinatio coëfficientium substitutionis adhibitae per differentialia partialia ipsarum G, G_1, G_2, G_3, sumta secundum quantitates a, a', a'' etc., quippe a quibus constantibus illas pendere, l. c. demonstravi, ut radices aequationis biquadraticae:

$$\begin{aligned}
0 = &(a - x)(a' + x)(a'' + x)(a''' + x) \\
&- c'c'(a - x)(a' + x) - c''c''(a - x)(a'' + x) - c'''c'''(a - x)(a''' + x) \\
&- b'b'(a'' + x)(a''' + x) - b''b''(a''' + x)(a' + x) - b'''b'''(a' + x)(a'' + x) \\
&+ 2c'c''c'''(a - x) + 2c'b''b'''(a' + x) + 2c''b'''b'(a'' + x) + 2c'''b'b''(a''' + x) \\
&+ b'b'c'c' + b''b''c''c'' + b'''b'''c'''c''' - 2b'b''c'c'' - 2b''b'''c''c''' - 2b'''b'c'''c'.
\end{aligned}$$

Ac reapse, hac aequatione in auxilium vocata, e formulis a nobis traditis (Vol. II. pgg. 240. 41.) ipso intuitu deducis sequentes:

$$\delta\delta = \frac{\partial G}{\partial a}, \quad \alpha\alpha = -\frac{\partial G_1}{\partial a}, \quad \beta\beta = -\frac{\partial G_2}{\partial a}, \quad \gamma\gamma = -\frac{\partial G_3}{\partial a},$$
$$\delta'\delta' = \frac{\partial G}{\partial a'}, \quad \alpha'\alpha' = -\frac{\partial G_1}{\partial a'}, \quad \beta'\beta' = -\frac{\partial G_2}{\partial a'}, \quad \gamma'\gamma' = -\frac{\partial G_3}{\partial a'},$$

$$\delta''\delta'' = \frac{\partial G}{\partial a''}, \quad \alpha''\alpha'' = -\frac{\partial G_1}{\partial a''}, \quad \beta''\beta'' = -\frac{\partial G_2}{\partial a''}, \quad \gamma''\gamma'' = -\frac{\partial G_3}{\partial a''},$$

$$\delta'''\delta''' = \frac{\partial G}{\partial a'''}, \quad \alpha'''\alpha''' = -\frac{\partial G_1}{\partial a'''}, \quad \beta'''\beta''' = -\frac{\partial G_2}{\partial a'''}, \quad \gamma'''\gamma''' = -\frac{\partial G_3}{\partial a'''};$$

porro

$$\delta\delta' = -\frac{\partial G}{2\partial b'}, \quad \alpha\alpha' = \frac{\partial G_1}{2\partial b'}, \quad \beta\beta' = \frac{\partial G_2}{2\partial b'}, \quad \gamma\gamma' = \frac{\partial G_3}{2\partial b'},$$

$$\delta\delta'' = -\frac{\partial G}{2\partial b''}, \quad \alpha\alpha'' = \frac{\partial G_1}{2\partial b''}, \quad \beta\beta'' = \frac{\partial G_2}{2\partial b''}, \quad \gamma\gamma'' = \frac{\partial G_3}{2\partial b''},$$

$$\delta\delta''' = -\frac{\partial G}{2\partial b'''}, \quad \alpha\alpha''' = \frac{\partial G_1}{2\partial b'''}, \quad \beta\beta''' = \frac{\partial G_2}{2\partial b'''}, \quad \gamma\gamma''' = \frac{\partial G_3}{2\partial b'''},$$

$$\delta''\delta''' = -\frac{\partial G}{2\partial c'}, \quad \alpha''\alpha''' = \frac{\partial G_1}{2\partial c'}, \quad \beta''\beta''' = \frac{\partial G_2}{2\partial c'}, \quad \gamma''\gamma''' = \frac{\partial G_3}{2\partial c'},$$

$$\delta'''\delta' = -\frac{\partial G}{2\partial c''}, \quad \alpha'''\alpha' = \frac{\partial G_1}{2\partial c''}, \quad \beta'''\beta' = \frac{\partial G_2}{2\partial c''}, \quad \gamma'''\gamma' = \frac{\partial G_3}{2\partial c''},$$

$$\delta'\delta'' = -\frac{\partial G}{2\partial c'''}, \quad \alpha'\alpha'' = \frac{\partial G_1}{2\partial c'''}, \quad \beta'\beta'' = \frac{\partial G_2}{2\partial c'''}, \quad \gamma'\gamma'' = \frac{\partial G_3}{2\partial c'''} \text{ *)}.$$

Quas formulas, sicuti antecedentes, propter usum earum frequentiorem hic in conspectum exposui. Transformationem similem adhiberi posse integralibus multiplicibus cuiuslibet ordinis, adnotavi l. c. (Vol. VIII. pg. 350.). In qua generaliter constantes, quae integrale $n$tuplum transformatum afficiunt, inveniuntur ut radices aequationis algebraicae $(n+2)^{ti}$ ordinis; quarum differentialia partialia sumta secundum constantes, quae integrale propositum afficiunt, suppeditant substitutionis adhibendae coëfficientes. Quae transformatio generalis de problemate algebraico generali eadem ratione derivatur, quam l. c. pro casibus $n=3$, $n=4$ indicavi.

3.

Problema, de quo dictum est, algebraicum ita generalius concipi potest, ut in locum summae quadratorum variabilium proponatur altera quaelibet functio homogenea secundi ordinis transformanda; sive proponatur, binas simul functiones homogeneas secundi ordinis cuiuslibet numeri variabilium per substitutiones lineares transformare in alias, quae variabilium solis quadratis constant.

Sint functiones transformatae:

$$G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 + \ldots + G_n y_n y_n,$$
$$H_1 y_1 y_1 + H_2 y_2 y_2 + \ldots + H_n y_n y_n;$$

*) Ut formulae l. c. traditae cum his conveniant, scribendum est $-G_1$, $-G_2$, $-G_3$ loco G', G'', G'''; quantitas arbitraria $\varkappa$ poni debet $=1$; porro

$$x = \cos\psi, \quad y = \sin\psi\cos\varphi, \quad z = \sin\psi\sin\varphi,$$
$$u = \cos\eta, \quad v = \sin\eta\cos\vartheta, \quad w = \sin\eta\sin\vartheta.$$

exprimantur porro variabiles propositae $x_1, x_2 \ldots . x_n$ per variabiles $y_1, y_2 \ldots . y_n$ ope aequationum huiusmodi:

$$x_m = \beta'_m y_1 + \beta''_m y_2 + \ldots . + \beta^{(n)}_m y_n.$$

Facile patet, problemate proposito tantum determinari rationem, in quibus sunt quantitates G_x, H_x et coefficientium $\beta^{(x)}_1$, $\beta^{(x)}_2 \ldots . \beta^{(x)}_n$ quadrata vel binorum producta. Nam si loco y_x, quod licet, scribis $p_x y_x$, designante p_x factorem constantem arbitrarium, quantitates illae simul per eundem factorem $p_x p_x$ dividi debent. Quotientes

$$\frac{G_1}{H_1}, \frac{G_2}{H_2} \ldots . \frac{G_n}{H_n}$$

et hic invenis ut radices diversas aequationis algebraicae n^{ti} gradus. Deinde coëfficientium $\beta^{(x)}_1$, $\beta^{(x)}_2 \ldots . \beta^{(x)}_n$ quadrata et binorum producta, divisa per G_x aut H_x, per unicam $\frac{G_x}{H_x}$ rationaliter exprimuntur; porro quantitates

$$\frac{\beta'_m}{\sqrt{G_1}}, \frac{\beta''_m}{\sqrt{G_2}} \ldots . \frac{\beta^{(n)}_m}{\sqrt{G_n}}.$$

inveniuntur respective ut eaedem functiones quantitatum

$$\frac{G_1}{H_1}, \frac{G_2}{H_2} \ldots . \frac{G_n}{H_n}$$

Quantitates $\frac{G_x}{H_x}$ si rursus spectas ut functiones constantium, quibus datae functiones transformandae affectae sunt, et hic elegantissime per differentialia earum partialia, secundum constantes illas sumta, exprimi possunt coëfficientium quadrata illa et producta, divisa per quantitates G_x aut H_x; eaque singula binis modis, sive constantem, secundum quam differentiatur, ex altera functione proposita, sive ex altera sumas. Sint enim termini earum in $x_x x_{x'}$ ducti $p x_x x_{x'}$, $q x_x x_{x'}$, invenio:

$$\beta^{(\lambda)}_x \beta^{(\lambda)}_{x'} = \frac{H_\lambda \partial G_\lambda - G_\lambda \partial H_\lambda}{H_\lambda \partial p} = \frac{G_\lambda \partial H_\lambda - H_\lambda \partial G_\lambda}{G_\lambda \partial q},$$

sive:

$$\frac{\beta^{(\lambda)}_x \beta'^{(\lambda)}_{x'}}{H_\lambda} = \frac{\partial\left(\frac{G_\lambda}{H_\lambda}\right)}{\partial p}, \quad \frac{\beta^{(\lambda)}_x \beta^{(\lambda)}_{x'}}{G_\lambda} = \frac{\partial\left(\frac{H_\lambda}{G_\lambda}\right)}{\partial q}.$$

Unde etiam hic, unica aequatione algebraica n^{ti} gradus formata, totum problema conficitur.

In commentatione III. de Integralibus Duplicibus (Vol. X.) demonstravi, quaestiones algebraicas, quae casui $n = 3$ respondent, ad transformationem et determinationem integralium duplicium commode applicari. Qua de re placuit, sub finem harum quaestionum generalium theoremata

in commentatione citata de integralibus duplicibus inventa ad integralia multiplicia cuiuslibet ordinis extendere, quod per easdem methodos successit.

Jam singula accuratius persequamur. Quae alia varia theoremata algebraica et analytica adstruendi occasionem suppeditabunt.

Problema I.

Investigare substitutiones lineares huismodi

$$y_1 = \alpha'_1\, x_1 + \alpha'_2\, x_2 + \ldots + \alpha'_n\, x_n,$$
$$y_2 = \alpha''_1\, x_1 + \alpha''_2\, x_2 + \ldots + \alpha''_n\, x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = \alpha^{(n)}_1 x_1 + \alpha^{(n)}_2 x_2 + \ldots + \alpha^{(n)}_n x_n,$$

quibus efficiatur

$$y_1y_1 + y_2y_2 + \ldots + y_ny_n = x_1x_1 + x_2x_2 + \ldots + x_nx_n,$$

simulque data functio homogenea secundi ordinis variabilium $x_1, x_2 \ldots$ $\ldots x_n$ *transformetur in aliam variabilium* $y_1, y_2 \ldots y_n$, *de qua binarum producta evanuerunt."*

4.

Investigemus primum varias relationes, quae inter coëfficientes propositos locum habere debent, ut conditioni primae satisfiat,

$$1.\quad x_1x_1 + x_2x_2 + \ldots + x_nx_n = y_1y_1 + y_2y_2 + \ldots + y_ny_n.$$

Ac primum, ut substitutis ipsarum $y_1, y_2 \ldots y_n$ valoribus aequatio illa identica evadat, fieri debet:

$$2.\quad \begin{cases} \alpha'_\varkappa \alpha'_\lambda + \alpha''_\varkappa \alpha''_\lambda + \ldots + \alpha^{(n)}_\varkappa \alpha^{(n)}_\lambda = 0, \\ \alpha'_\varkappa \alpha'_\varkappa + \alpha''_\varkappa \alpha''_\varkappa + \ldots + \alpha^{(n)}_\varkappa \alpha^{(n)}_\varkappa = 1. \end{cases}$$

Propter has aequationes, substitutis rursus valoribus ipsarum $y_1, y_2 \ldots y_n$ valoribus, identica fit etiam haec aequatio:

$$3.\quad x_\varkappa = \alpha'_\varkappa y_1 + \alpha''_\varkappa y_2 + \ldots + \alpha^{(n)}_\varkappa y_n;$$

cuius ope variabiles propositae $x_1, x_2 \ldots x_n$ exprimuntur per $y_1, y_2 \ldots y_n$. Quos valores ipsarum $x_1, x_2 \ldots x_n$ si rursus substituimus in aequatione (1.), nanciscimur, ut identica evadat, formulas sequentes:

$$4.\quad \begin{cases} \alpha^{(\varkappa)}_1 \alpha^{(\lambda)}_1 + \alpha^{(\varkappa)}_2 \alpha^{(\lambda)}_2 + \ldots + \alpha^{(\varkappa)}_n \alpha^{(\lambda)}_n = 0, \\ \alpha^{(\varkappa)}_1 \alpha^{(\varkappa)}_1 + \alpha^{(\varkappa)}_2 \alpha^{(\varkappa)}_2 + \ldots + \alpha^{(\varkappa)}_n \alpha^{(\varkappa)}_n = 1. \end{cases}$$

Videmus ex antecedentibus, quod maxime tenendum est, tales existere inter coëfficientes propositos $\alpha^{(m)}_\varkappa$ relationes, ut propositis n aequationibus linearibus huiusmodi,

$$y_\varkappa = \alpha_1^{(\varkappa)} x_1 + \alpha_2^{(\varkappa)} x_2 + \ldots\ldots + \alpha_n^{(\varkappa)} x_n,$$

earum resolutio suppeditet n aequationes sequentis formae,

$$x_\varkappa = \alpha'_\varkappa y_1 + \alpha''_\varkappa y_2 + \ldots\ldots + \alpha_\varkappa^{(n)} y_n;$$

unde etiam vice versa harum resolutio illas suppeditat. Porro animadverto, e quaque relationum illarum seu quae ex iis sequuntur, statim nos eruere alteram, coëfficientium indices inferiores cum superioribus permutando. Qua permutatione simul variabiles $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ et $y_1, y_2 \ldots\ldots y_n$ respective in se invicem abeunt.

5.

Aliae relationes inter coëfficientes propositos, quae e (1.) sequuntur, derivari possunt de relationibus algebraicis generalibus, quae locum habent inter coëfficientes aequationum linearium propositarum aliarumque, quae ex earum inversione seu resolutione obtinentur. In quaestione nostra aequationes propositae et inversae eosdem coëfficientes habent, nisi quod illarum series horizontales coëfficientium harum verticales fiunt et vice versa. Hinc ex unaquaque eiusmodi relatione generali casu nostro relatio inter ipsos coëfficientes propositos nascitur.

Supponamus, designantibus $\alpha_\varkappa^{(m)}$ datas quantitates quaslibet, ex n aequationibus linearibus propositis huiusmodi

$$y_m = \alpha_1^{(m)} x_1 + \alpha_2^{(m)} x_2 + \ldots\ldots + \alpha_n^{(m)} x_n,$$

per notas regulas resolutionis algebraicae haberi aequationes formae:

$$A x_\varkappa = \beta'_\varkappa y_1 + \beta''_\varkappa y_2 + \ldots\ldots + \beta_\varkappa^{(n)} y_n.$$

Ipsum A supponimus denominatorem communem valorum incognitarum, qui per algorithmos notos formatur; sive fit

$$A = \Sigma \pm \alpha'_1 \alpha''_2 \ldots\ldots \alpha_n^{(n)},$$

signo summatorio amplectente terminos omnes, qui indicibus aut inferioribus aut superioribus omnimodis permutatis proveniunt; signis eorum alternantibus secundum notam regulam, quam ita enunciare licet, ut termino cuilibet per certam permutationum *indicum* orto idem signum tribuatur, quo afficitur productum sequens conflatum e differentiis numerorum 1, 2, ... n

$$(2-1)(3-1)\ldots\ldots(n-1).(3-2)(4-2)\ldots\ldots(n-2).(4_3-3) \text{ etc.},$$

eadem *numerorum* permutatione facta.

Eadem notatione adhibita, sit

$$B = \Sigma \pm \beta'_1 \beta''_2 \ldots\ldots \beta_n^{(n)},$$

ubi ipsam B e quantitatibus $\beta_\varkappa^{(m)}$ eodem modo compositam accipimus, quo

A ex ipsis $\alpha_x^{(m)}$ componitur. Quibus statutis, observo fieri:

$$5. \quad B = A^{n-1},$$

ac generalius:

$$6. \quad \Sigma \pm \beta'_1 \beta''_2 \dots \beta_m^{(m)} = A^{m-1} \Sigma \pm \alpha_{m+1}^{(m+1)} \alpha_{m+2}^{(m+2)} \dots \alpha_n^{(n)}.$$

De qua formula generali (6.) cum pro variis valoribus ipsius m, tum indicibus et superioribus et inferioribus omnimodis permutatis, permultae aliae similes formulae profluunt.

Casu nostro fit

$$\beta_x^{(m)} = A \alpha_x^{(m)},$$

ideoque

$$B = \Sigma \pm \beta'_1 \beta''_2 \dots \beta_n^{(n)} = A^n \Sigma \pm \alpha'_1 \alpha''_2 \dots \alpha_n^{(n)} = A^{n+1},$$

unde (5.) suppeditat formulam in quaestione nostra prae ceteris memorabilem:

$$7. \quad AA = (\Sigma \pm \alpha'_1 \alpha''_2 \dots \alpha_n^{(n)})^2 = 1,$$

sive:

$$A = \Sigma \pm \alpha'_1 \alpha''_2 \dots \alpha_n^{(n)} = \pm 1.$$

Porro fit e (6.) casu nostro:

$$8. \quad A \Sigma \pm \alpha'_1 \alpha''_2 \dots \alpha_m^{(m)} = \Sigma \pm \alpha_{m+1}^{(m+1)} \alpha_{m+2}^{(m+2)} \dots \alpha_n^{(n)}.$$

Quae relationes (7.), (8.) iis, quae §. antecedente traditae sunt, adiunctae relationes praecipuas constituunt, quae inter coëfficientes propositos locum habent, quoties datur conditio

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 + \dots + x_n x_n = y_1 y_1 + y_2 y_2 + \dots + y_n y_n.$$

6.

Ad demonstranda theoremata algebraica generalia (5.), (6.) methodum singularem in auxilium vocabo, qua saepius non ineleganter uti licet. Quamquam res etiam per methodos notas liquet.

Sit

$$\alpha_1^{(m)} x_1 + \alpha_2^{(m)} x_2 + \dots + \alpha_n^{(m)} x_n = X_m,$$
$$\beta'_m y_1 + \beta''_m y_2 + \dots + \beta_m^{(n)} y_n = Y_m,$$

ac supponamus, dignitates negativas expressionum $X_1, X_2, \dots X_n$ evolvi respective secundum dignitates descendentes ipsarum $x_1, x_2 \dots x_n$; porro dignitates negativas ipsarum $Y_1, Y_2 \dots Y_n$ evolvi respective secundum dignitates descendentes ipsarum $y_1, y_2 \dots y_n$. Designemus porro per

$$[U]_{\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n}}$$

coëfficientem termini $\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n}$ in ipsa U, secundum potestates variabilium $x_1, x_2 \dots x_n$ certa ratione evoluta.

Quibus statutis, demonstravi in commentatione anteriore:
„Exercitatio algebraica circa discerptionem singularem fractionum, quae plures variabiles involvunt"
(Vol. V. pag. 344. sqq.), fore:

$$9.\quad \left[\frac{1}{X_1 X_2 \dots X_n}\right]_{\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n}} = \frac{1}{A},$$

sive etiam, quod idem est,

$$10.\quad \left[\frac{1}{Y_1 Y_2 \dots Y_n}\right]_{\frac{1}{y_1 y_2 \dots y_n}} = \frac{1}{B};$$

ac generalius:

$$11.\ \left[\frac{x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}}{X_1^{r_1+1} X_2^{r_2+1} X_n^{r_n+1}}\right]_{\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n}} = \frac{1}{A^{r_1+r_2+\dots+r_n+1}} \left[\frac{Y_1^{r_1} Y_2^{r_2} \dots Y_n^{r_n}}{y_1^{s_1+1} y_2^{s_2+1} y_n^{s_n+1}}\right]_{\frac{1}{y_1 y_2 \dots y_n}},$$

designantibus $r_1, r_2 \dots r_n$ ac $s_1, s_2 \dots s_n$ numeros quoslibet integros sive positivos sive negativos.

Sit ex. gr.

$$r_1 = r_2 \dots = r_n = -1,$$
$$s_1 = s_2 \dots = s_n = -1,$$

formula (11.) e (10.) in hanc abit

$$1 = A^{n-1} \left[\frac{1}{Y_1 Y_2 \dots Y_n}\right]_{\frac{1}{y_1 y_2 \dots y_n}} = \frac{A^{n-1}}{B},$$

quae est formula (5.).

Sit porro

$$r_1 = r_2 \dots = r_m = -1, \quad r_{m+1} = r_{m+2} \dots = r_n = 0,$$
$$s_1 = s_2 \dots = s_m = -1, \quad s_{m+1} = s_{m+2} \dots = s_n = 0,$$

formula (11.) in hanc abit

$$\left[\frac{1}{X_{m+1} X_{m+2} \dots X_n}\right]_{\frac{1}{x_{m+1} x_{m+2} \dots x_n}} = A^{m-1} \left[\frac{1}{Y_1 Y_2 \dots Y_m}\right]_{\frac{1}{y_1 y_2 \dots y_m}}.$$

Expressiones uncis inclusae variabilium $x_1, x_2 \dots x_m$ et $y_{m+1}, y_{m+2} \dots y_n$ tantum positivas dignitates continent, uti per assignatum evolutionis modum liquet. Hinc cum eos tantum consideremus terminos, qui a variabilibus illis non pendent, in expressionibus $X_{m+1}, X_{m+2} \dots X_n$ ponere licet $x_1 = x_2 \dots x_m = 0$, in expressionibus $Y_1, Y_2 \dots Y_m$ ponere licet $y_{m+1} = y_{m+2} \dots = y_n = 0$. Quo facto patet e (9.), (10.), fore

$$\left[\frac{1}{X_{m+1} X_{m+2} \dots X_n}\right]_{\frac{1}{x_{m+1} x_{m+2} \dots x_n}} = \frac{1}{\Sigma \pm \alpha_{m+1}^{(m+1)} \alpha_{m+2}^{(m+2)} \dots \alpha_n^{(n)}},$$

$$\left[\frac{1}{Y_1 Y_2 \ldots . Y_n}\right]_{\frac{1}{y_1 y_2 \ldots . y_n}} = \frac{1}{\Sigma \pm \beta_1' \beta_2'' \ldots . \beta_m^{(m)}}.$$

Unde habemus

$$\frac{1}{\Sigma \pm \alpha_{m+1}^{(m+1)} \alpha_{m+2}^{(m+2)} \ldots . \alpha_n^{(n)}} = \frac{A^{m-1}}{\Sigma \pm \beta_1' \beta_2'' \ldots . \beta_m^{(m)}},$$

quae est formula (6.).

Formula (9.) aut (10.) prae ceteris attentione digna videtur; aliam eius infra videbimus applicationem.

7.

Conditioni primae, ut fiat

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 + \ldots . + x_n x_n = y_1 y_1 + y_2 y_2 + \ldots . + y_n y_n,$$

si adiungimus alteram, ut data functio homogenea secundi ordinis in aliam abeat, quae solis quadratis variabilium constat, problema determinatum esse vidimus. Iam varias examinemus relationes, quae ex hac nova conditione ortum ducunt.

Si V data functio transformanda; sint termini eius in $x_\varkappa x_\lambda$, $x_\varkappa x_\varkappa$ ducti

$$2 a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda, \quad a_{\varkappa,\varkappa} x_\varkappa x_\varkappa,$$

ubi supponimus

$$a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}.$$

Hinc functionem V ita repraesentare licet:

$$V = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda,$$

quo notationis modo intelligimus, sub signo summatorio numeris $\varkappa$, λ tribui valores 1, 2, ... n.

Sit functio transformata,

$$V = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda = G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 + \ldots . + G_n y_n y_n;$$

substitutis formulis

$$y_m = \alpha_1^{(m)} x_1 + \alpha_2^{(m)} x_2 + \ldots . + \alpha_n^{(m)} x_n,$$

si singulos terminos inter se comparamus, nanciscimur:

$$12. \quad a_{\varkappa,\lambda} = G_1 \alpha_\varkappa' \alpha_\lambda' + G_2 \alpha_\varkappa'' \alpha_\lambda'' + \ldots . + G_n \alpha_\varkappa^{(n)} \alpha_\lambda^{(n)},$$

quae valet formula, sive $\varkappa$, λ diversi, sive aequales sint.

Vidimus supra §. 4., eas existere inter coëfficientes propositos relationes, ut datis n aequationibus linearibus,

$$x_\varkappa = \alpha_\varkappa' y_1 + \alpha_\varkappa'' y_2 + \ldots . + \alpha_\varkappa^{(n)} y_n,$$

inde aliae n sequantur hae

$$y_m = \alpha_1^{(m)} x_1 + \alpha_2^{(m)} x_2 + \ldots . + \alpha_n^{(m)} x_n,$$

simulque fieri

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 + \dots + x_n x_n = y_1 y_1 + y_2 y_2 + \dots + y_n y_n.$$

Hinc, posito

$$x_\varkappa = a_{\varkappa,\lambda}, \quad y_m = G_m \alpha_\lambda^{(m)},$$

sequitur e (12.):

$$13. \quad G_m \alpha_\lambda^{(m)} = \alpha_1^{(m)} a_{1,\lambda} + \alpha_2^{(m)} a_{2,\lambda} + \dots + \alpha_n^{(m)} a_{n,\lambda},$$

porro

$$14. \quad a_{1,\lambda}^2 + a_{2,\lambda}^2 + \dots + a_{n,\lambda}^2 = G_1^2 \alpha'_\lambda \alpha'_\lambda + G_2^2 \alpha''_\lambda \alpha''_\lambda + \dots + G_n^2 \alpha_\lambda^{(n)} \alpha_\lambda^{(n)}.$$

De aequatione (13.) facile etiam hunc deducis generaliorem:

$$15. \quad a_{1,\varkappa} a_{1,\lambda} + a_{2,\varkappa} a_{2,\lambda} + \dots + a_{n,\varkappa} a_{n,\lambda} =$$
$$G_1^2 \alpha'_\varkappa \alpha'_\lambda + G_2^2 \alpha''_\varkappa \alpha''_\lambda + \dots + G_n^2 \alpha_\varkappa^{(n)} \alpha_\lambda^{(n)},$$

quae et ipsa valet, sive $\varkappa$, λ diversi, sive aequales sint.

Ex eadem formula (13.) sequitur adhuc, advocatis formulis §. 4. propositis:

$$16. \quad G_1 \alpha'_\lambda . y_1 + G_2 \alpha''_\lambda . y_2 + \dots + G_n \alpha_\lambda^{(n)} . y_n = a_{1,\lambda} x_1 + a_{2,\lambda} . x_2 + \dots + a_{n,\lambda} x_n.$$

Positis in hac formula loco λ valoribus 1, 2, ... n et quadratis, quae inde prodeunt, aequationibus, obtines summando:

$$17. \quad \sum_\lambda [a_{1,\lambda} x_1 + a_{2,\lambda} x_2 + \dots + a_{n,\lambda} x_n]^2 =$$
$$G_1 G_1 . y_1 y_1 + G_2 G_2 . y_2 y_2 + \dots + G_n G_n y_n y_n.$$

Sequitur generalius de formula (16.), *in omnibus relationibus, quae inter variabiles* $x_1, x_2 \dots x_n$ *et variabiles* $y_1, y_2 \dots y_n$ *locum habent, loco* y_m, x_λ *simul statui posse* $G_m y_m$ *atque* $a_{1,\lambda} x_1 + a_{2,\lambda} x_2 \dots + a_{n,\lambda} x_n$. Quo facto ex. gr. (17.) e (1.) prodit. Quod si iteratis vicibus adhibetur theorema, expressionem

$$G_1^p y_1 y_1 + G_2^p y_2 y_2 \dots + G_n^p y_n y_n$$

per ipsas $x_1, x_2 \dots x_n$ exhibere licet, designante p numerum positivum. Adhibita enim substitutione indicata, de expressione illa provenit

$$G_1^{p+2} y_1 y_1 + G_2^{p+2} y_2 y_2 \dots + G_n^{p+2} y_n y_n.$$

Dati autem sunt expressionis illius valores per $x_1, x_2 \dots x_n$ exhibiti pro $p = 0$, $p = 1$.

Supponamus porro, e n aequationibus huiusmodi,

$$w_\lambda = a_{1,\lambda} x_1 + a_{2,\lambda} x_2 + \dots + a_{n,\lambda} x_n,$$

sequi per resolutionem:

$$x_\varkappa . \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n} = b_{\varkappa,1} w_1 + b_{\varkappa,2} w_2 + \dots + b_{\varkappa,n} w_n,$$

ubi per theorema notum fit rursus

$$b_{\varkappa,\lambda} = b_{\lambda,\varkappa} \text{ *)}.$$

---

*) Facile enim probatur generalius, quoties ex n aequationibus,

$$1. \quad w_\lambda = a_{1,\lambda} x_1 + a_{2,\lambda} x_2 + \dots + a_{n,\lambda} x_n,$$

sequantur n aequationes

Hinc posito e (16.):

$$w_\lambda = a'_\lambda . G_1 y_1 + a_\lambda . G_2 y_2 + \dots + a_\lambda^{(n)} . G_n y_n,$$

simulque loco x_x valorem eius,

$$x_x = a'_x y_1 + a''_x y_2 + \dots + a_x^{(n)} y_n,$$

comparando terminos in y_m ductos in utraque aequationis parte, nanciscimur:

$$a_x^{(m)} \Sigma \pm a_{1,1},\ a_{2,2} \dots a_{n,n} = G_m [b_{x,1} a_1^{(m)} + b_{x,2} a_2^{(m)} + \dots + b_{x,n} a_n^{(m)}].$$

Facile autem patet, quod infra probabimus §. 8., esse

$$18.\quad \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n} = G_1 G_2 \dots G_n,$$

unde habetur:

$$19.\quad G_1 G_2 \dots G_n . \frac{a_x^{(m)}}{G_m} = b_{x,1} a_1^{(m)} + b_{x,2} a_2^{(m)} + \dots + b_{x,n} a_n^{(m)}.$$

Ex hac formula memorabili comparata cum (13.) videmus, *in omnibus formulis assignatis, coëfficientibus $a_x^{(m)}$ iisdem manentibus, loco $a_{x,\lambda}$ poni posse:*

$$\frac{b_{x,\lambda}}{\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}} = \frac{b_{x,\lambda}}{G_1 G_2 \dots G_n},$$

dummodo simul loco G_m scribatur $\frac{1}{G_m}$. Quo facto igitur de valore expressionis

$$G_1^p y_1 y_1 + G_2^p y_2 y_2 \dots G_n^p y_n y_n,$$

per x_1, x_2 .... x_n exhibito deducis valorem ipsius

$$\frac{y_1 y_1}{G_1^p} + \frac{y_2 y_2}{G_2^p} \dots + \frac{y_n y_n}{G_n^p}.$$

Deducuntur ex. gr. e (19.) formulae sequentes, quae formulis (12.), (16.) respondent,

$$20.\quad \frac{b_{x,\lambda}}{G_1 G_2 \dots G_n} = \frac{a'_x a_\lambda}{G} + \frac{a''_x a''_\lambda}{G_2} + \dots + \frac{a_x^{(n)} a_\lambda^{(n)}}{G_n},$$

$$2.\quad x_x \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n} = b_{x,1} w_1 + b_{x,2} w_2 + \dots + b_{x,n} w_n;$$

etiam e n aequationibus sequentibus

$$3.\quad u_\lambda = a_{\lambda,1} v_1 + a_{\lambda,2} v_2 + \dots + a_{\lambda,n} v_n,$$

sequi has:

$$4.\quad v_x \Sigma \pm a'_1 a''_2 \dots a_n^{(n)} = b_{1,\lambda} u_1 + b_{2,\lambda} u_2 + \dots + b_{n,\lambda} u_n.$$

Nam ex aequationibus (1.), (3.) sequitur

$$5.\quad v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n.$$

Qua in formula substitutis aequationibus (2.), si comparamus in utraque aequationibus parte terminos in w_x ductos, habes aequationem (4.), quae probanda erat. Quoties $a_{x,\lambda} = a_{\lambda,x}$, quod in quaestione nostro locum habet, aequationes (1.), (3.) eaedem fiunt; unde etiam earum inversae (2.), (4.) eaedem fieri debent, sive

$$b_{x,\lambda} = b_{\lambda,x}.$$

Ceterum vix monitu eget, expressionem

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$$

per eundem algorithmum formatam accipi, quo expressio Δ §. 6, nisi quod loco $a_\lambda^{(x)}$ hic inveniatur $a_{x,\lambda}$.

$$21.\quad \frac{b_{1,\lambda}x_1+b_{2,\lambda}x_2+\ldots+b_{n,\lambda}x_n}{G_1G_2\ldots G_n}=\frac{\alpha'_\lambda\cdot y_1}{G_1}+\frac{\alpha''_\lambda y_2}{G_2}+\ldots+\frac{\alpha^{(n)}_\lambda y_n}{G_n}.$$

De quibus facile etiam haec sequitur:

$$22.\quad \sum_{\varkappa,\lambda} b_{\varkappa,\lambda}x_\varkappa x_\lambda = G_1G_2\ldots G_n\left[\frac{y_1y_1}{G_1}+\frac{y_2y_2}{G_2}+\ldots+\frac{y_ny_n}{G_n}\right],$$

quae formulae propositae respondet:

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}x_\varkappa x_\lambda = G_1y_1y_1+G_2y_2y_2\ldots+G_ny_ny_n.$$

Porro de theoremate antecedente sive de (21.) sequitur, *in relationibus omnibus, quae inter variabiles* $x_1, x_2 \ldots. x_n$ *et variabiles* $y_1, y_2 \ldots. y_n$ *locum habent, simul loco* y_m *poni posse* $\frac{y_m}{G_m}$, *atque loco* x_λ,

$$\frac{b_{1,\lambda}x_1+b_{2,\lambda}x_2\ldots+b_{n,\lambda}x_n}{G_1G_2\ldots G_n}=\frac{b_{1,\lambda}x_1+b_{2,\lambda}x_2\ldots+b_{n,\lambda}x_n}{\sum\pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}},$$

Iam ipsam coëfficientium propositorum et quantitatum G_m afferamus determinationem.

8.

In aequatione (13.) si loco λ ponis valores $1, 2 \ldots. n$, habes n aequationes lineares sequentes inter n quantitates $\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)} \ldots. \alpha_n^{(m)}$:

$$23.\quad \begin{cases} 0 = (a_{1,1}-G_m)\alpha_1^{(m)}+a_{2,1}\alpha_2^{(m)}+\ldots+a_{n,1}\alpha_n^{(m)}, \\ 0 = a_{1,2}\alpha_1^{(m)}+(a_{2,2}-G_m)\alpha_2^{(m)}+\ldots+a_{n,2}\alpha_n^{(m)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = a_{1,n}\alpha_1^{(m)}+a_{2,n}\alpha_2^{(m)}+\ldots+(a_{n,n}-G_m)\alpha_n^{(m)}. \end{cases}$$

Quae aequationes cum terminis constantibus careant, ipsas $\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)} \ldots. \alpha_n^{(m)}$ ex iis eliminare licet. Quo facto inter coëfficientes aequationum linearium (23.) invenitur aequatio conditionalis, cui valor ipsius G_m satisfaciat necesse est. Quae per notas eliminationis regulas invenitur

$$\Gamma = 0,$$

supponendo, expressionem Γ provenire de expressione

$$\sum\pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots. a_{n,n},$$

terminis $a_{1,1}, a_{2,2} \ldots. a_{n,n}$ mutatis in

$$a_{1,1}-x,\; a_{2,2}-x,\; \ldots.\; a_{n,n}-x,$$

ac statuto $x = G_m$.

Si loco indicis m eius ponimus valores $1, 2 \ldots. n$, proveniunt e (23.) eiusmodi n systemata aequationum linearium; e quibus singulis nanciscimur, eliminatione incognitarum facta, aequationem conditionalem:

$$\Gamma = 0,$$

cui pro singulis valoribus ipsius m satisfieri debet, ponendo ipsius x valo-

res $G_1, G_2 \ldots\ldots G_n$. Unde quantitates illae $G_1, G_2 \ldots\ldots G_n$ ut radices aequationis $\Gamma = 0$ determinantur.

Patet e compositione assignata ipsius Γ, eius terminum ductum in summam ipsius x potestatem provenire ex unico termino

$$(a_{1,1}-x)(a_{2,2}-x)\ldots\ldots(a_{n,n}-x),$$

ideoque esse $(-1)^n x^n$. Unde habetur aequatio, respectu ipsius x identica,

$$\Gamma = (G_1-x)(G_2-x)\ldots\ldots(G_n-x).$$

De qua, posito $x=0$, prodit

$$G_1 G_2 \ldots\ldots G_n = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots\ldots a_{n,n},$$

quae est formula (18.) supra apposita.

Quod attinet ipsam ipsius Γ formationem, observo, si signo summatorio S amplectamur expressiones *inter se diversas*, quae permutatis indicibus $1, 2, 3 \ldots\ldots n$ proveniunt, fieri:

$$\begin{aligned}\Gamma = \quad & \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots\ldots a_{n,n} \\ & -x S \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots\ldots a_{n-1,n-1} \\ & +x^2 S \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots\ldots a_{n-2,n-2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \pm x^{n-2} S \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \\ & \mp x^{n-1} S a_{1,1} \pm x^n.\end{aligned}$$

Qua in formula expressio

$$S.\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots\ldots a_{m,m}$$

designat summam $\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n+1-m)}{1.2\ldots\ldots m}$ expressionum, quae e

$$\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots\ldots a_{m,m}$$

proveniunt, si in

$$a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots\ldots a_{m,m}$$

loco indicum priorum simul ac posteriorum $1, 2, \ldots\ldots m$ scribimus omnibus modis, quibus fieri potest, m alios e numeris $1, 2, 3 \ldots\ldots n$.

9.

Postquam quantitates $G_1, G_2 \ldots\ldots G_n$ ut radices aequationis algebraicae n^{ti} ordinis inventae sunt, earum ope coëfficientes propositi determinantur. Nam una qualibet ex aequationibus (23.) ablegata, e reliquis $m-1$ aequationibus rationes, in quibus sunt quantitates $\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)} \ldots\ldots \alpha_n^{(m)}$, per unicam G_m rationaliter exprimuntur. Quibus inventis, e (4.) quantitates ipsas obtines.

Eum in finem in expressionibus $b_{x,\lambda}$ §. 7. loco $a_{1,1}, a_{2,2} \ldots\ldots a_{n,n}$

$$a_{1,1}-G_m,\quad a_{2,2}-G_m,\quad \ldots\ldots\quad a_{n,n}-G_m,$$

quo mutetur $b_{\varkappa,\lambda}$ in $B^{(m)}_{\varkappa,\lambda}$. Unde facile constat, cum sit $b_{\varkappa,\lambda} = b_{\lambda,\varkappa}$, etiam fore

$$24.\quad B^{(m)}_{\varkappa,\lambda} = B^{(m)}_{\lambda,\varkappa}.$$

Quibus statutis, de aequationibus (23.) ablegata λ^{ta} aequatione, e reliquis $n-1$ aequationibus per regulas notas algebraicas eruis:

$$25.\quad \alpha^{(m)}_1 : \alpha^{(m)}_2 \ldots\ldots \alpha^{(m)}_n = B^{(m)}_{1,\lambda} : B^{(m)}_{2,\lambda} \ldots\ldots B^{(m)}_{n,\lambda}.$$

Unde cum sit

$$\alpha^{(m)}_1 \alpha^{(m)}_1 + \alpha^{(m)}_2 \alpha^{(m)}_2 + \ldots\ldots + \alpha^{(m)}_n \alpha^{(m)}_n = 1,$$

habes

$$26.\quad \alpha^{(m)}_\varkappa = \frac{B^{(m)}_{\varkappa,\lambda}}{\sqrt{(B^{(m)}_{1,\lambda} B^{(m)}_{1,\lambda} + B^{(m)}_{2,\lambda} B^{(m)}_{2,\lambda} + \ldots\ldots + B^{(m)}_{n,\lambda} B^{(m)}_{n,\lambda})}}.$$

Ita posito loco m, $\varkappa$ valores $1, 2 \ldots\ldots n$, coëfficientes omnes propositos per ipsas $G_1, G_2 \ldots\ldots G_n$ determinatos habes; et quidem $\alpha^{(m)}_1, \alpha^{(m)}_2 \ldots\ldots \alpha^{(m)}_n$ per unicam G_m, quarum adeo rationes per quantitatem illam rationaliter exhibentur.

De formula §. 4. tradita,

$$\alpha^{(m)}_1 \alpha^{(m')}_1 + \alpha^{(m)}_2 \alpha^{(m')}_2 + \ldots\ldots + \alpha^{(m)}_n \alpha^{(m')}_n = 0,$$

sequitur per (26.):

$$27.\quad B^{(m)}_{1,\lambda} B^{(m')}_{1,\lambda} + B^{(m)}_{2,\lambda} B^{(m')}_{2,\lambda} + \ldots\ldots + B^{(m)}_{n,\lambda} B^{(m')}_{n,\lambda} = 0.$$

De qua aequatione, observavit Cl. Cauchy, sequi, aequationis algebraicae propositae radices $G_1, G_2 \ldots\ldots G_n$ omnes esse reales. Sit enim, si fieri potest, G_m, $G_{m'}$ par coniugatum radicum imaginariarum, formae

$$G_m = L + M\sqrt{-1}, \quad G_{m'} = L - M\sqrt{-1};$$

cum $B^{(m)}_{\varkappa,\lambda}$, $B^{(m')}_{\varkappa,\lambda}$ sint respective functiones eaedem quantitatum G_m, $G_{m'}$, etiam $B^{(m)}_{\varkappa,\lambda}$, $B^{(m')}_{\varkappa,\lambda}$ erunt par coniugatum quantitatum imaginariarum, sive forma gaudebunt,

$$B^{(m)}_{\varkappa,\lambda} = l + m\sqrt{-1}, \quad B^{(m')}_{\varkappa,\lambda} = l - m\sqrt{-1}.$$

Unde cum productum e binis conflatum $B^{(m)}_{\varkappa,\lambda} B^{(m')}_{\varkappa,\lambda}$ semper positivum sit, aequatio (27.) locum habere non potest. Qua de causa radices aequationis propositae imaginariae esse nequeunt.

Eadem de causa patet, quod supra tacita supposuimus, pro ipsis $G_1, G_2 \ldots\ldots G_n$ sumendas esse aequationis propositae radices *diversas*. Nam si ex. gr. pro G_m, $G_{m'}$ eandem radicem sumsisses, foret

$$B^{(m)}_{\varkappa,\lambda} = B^{(m')}_{\varkappa,\lambda},$$

neque summa (27.) ut summa quadratorum evanescere posset.

Coëfficientes propositos aliter adhuc determinare licet atque fit per formulas (26.). Nam cum rationes, in quibus sunt quantitates $\alpha^{(m)}_1, \alpha^{(m)}_2 \ldots$ $\ldots \alpha^{(m)}_n$ non mutentur, singulis multiplicatis per eandem quantitatem $\alpha^{(m)}_\lambda$,

formulam (25.) etiam hunc in modum repraesentare licet:

$$\alpha_1^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)} : \alpha_2^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)} \ldots : \alpha_n^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)} = B_{1,\lambda}^{(m)} : B_{2,\lambda}^{(m)} \ldots : B_{n,\lambda}^{(m)}.$$

Unde poni potest:

$$P_\lambda^{(m)}.\alpha_\varkappa^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)} = B_{\varkappa,\lambda}^{(m)},$$

De qua, permutatis $\varkappa$, λ, etiam haec provenit,

$$P_\varkappa^{(m)}.\alpha_\varkappa^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)} = B_{\lambda,\varkappa}^{(m)}.$$

Unde cum sit

$$B_{\varkappa,\lambda}^{(m)} = B_{\lambda,\varkappa}^{(m)},$$

sequitur:

$$P_\varkappa^{(m)} = P_\lambda^{(m)};$$

quam igitur quantitatem videmus pro indicibus omnibus inferioribus eundem valorem servare. Hinc loco $P_\lambda^{(m)}$ simpliciter scribemus $P^{(m)}$; quo facto habetur:

$$28. \quad P^{(m)}\alpha_\varkappa^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)} = B_{\varkappa,\lambda}^{(m)}.$$

Ipsam quantitatem $P^{(m)}$ determinare licet per aequationem

$$\alpha_1^{(m)}\alpha_1^{(m)} + \alpha_2^{(m)}\alpha_2^{(m)} + \ldots + \alpha_n^{(m)}\alpha_n^{(m)} = 1,$$

de qua, substitutis aequationibus (28.), deducitur

$$29. \quad P^{(m)} = B_{1,1}^{(m)} + B_{2,2}^{(m)} + \ldots + B_{n,n}^{(m)};$$

unde fit e (28.):

$$30. \quad \alpha_\varkappa^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)} = \frac{B_{\varkappa,\lambda}^{(m)}}{B_{1,1}^{(m)} + B_{2,2}^{(m)} + \ldots + B_{n,n}^{(m)}},$$

quae formula perinde valet, sive $\varkappa$, λ diversi, sive iidem sint numeri. De hac formula ipsum $\alpha_\varkappa^{(m)}$ habes, posito $\lambda = \varkappa$ et radice extracta, cuius signum arbitrarium est; deinde de valore ipsius $\alpha_\varkappa^{(m)}$ e (30.) reliquos coëfficientes $\alpha_1^{(m)}$, $\alpha_2^{(m)}$ etc. deducis, ponendo $\lambda = 1, 2$ etc.

Adnotemus adhuc formulas, quae e (30.) fluunt sequentes:

$$31. \quad B_{\varkappa,\lambda}^{(m)} B_{\varkappa',\lambda'}^{(m)} = B_{\varkappa,\lambda'}^{(m)} B_{\varkappa',\lambda}^{(m)},$$

unde quoties $\lambda = \varkappa$, $\lambda' = \varkappa'$,

$$32. \quad B_{\varkappa,\varkappa}^{(m)} B_{\varkappa',\varkappa'}^{(m)} = B_{\varkappa,\varkappa'}^{(m)2}.$$

Alia adhuc ratione formulas (28.) sive (30.) non ineleganter deducis de formula supra tradita (20.):

$$b_{\varkappa,\lambda} = G_1 G_2 \ldots G_n \left[\frac{\alpha'_\varkappa \alpha'_\lambda}{G_1} + \frac{\alpha''_\varkappa \alpha''_\lambda}{G_2} + \ldots + \frac{\alpha_\varkappa^{(n)}\alpha_\lambda^{(n)}}{G_n}\right].$$

Quod fit per considerationem sequentem.

Supponamus enim, in functione data V augeri constantes

$$a_{1,1}, \; a_{2,2} \ldots a_{n,n}$$

omnes eadem quantitate ξ, unde ipsa V augebitur expressione

$$\xi[x_1 x_1 + x_2 x_2 + \ldots + x_n x_n];$$

ideoque expressio transformata

$$V = G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 + \dots + G_n y_n y_n$$

augebitur quantitate

$$\xi[y_1 y_1 + y_2 y_2 + \dots + y_n y_n] = \xi[x_1 x_1 + x_2 x_2 + \dots + x_n x_n].$$

Videmus igitur, *constantibus* $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, ... $a_{n,n}$ *auctis omnibus eadem quantitate* ξ, *etiam quantitates* G_1, G_2 .... G_n *omnes eadem quantitate* ξ *augeri, coëfficientibus* $\alpha_x^{(m)}$ *iisdem manentibus.*

Sit iam $\xi = -G_m$, sive mutentur quantitates $a_{1,1}$, $a_{2,2}$ .... $a_{n,n}$ in $a_{1,1} - G_m$, $a_{2,2} - G_m$, ... $a_{n,n} - G_m$, simulque quantitates G_1, G_2 .... G_n in $G_1 - G_m$, $G_2 - G_m$, ... $G_n - G_m$. Quo facto in altera parte aequationis allegatae abit $b_{x,\lambda}$ in $B_{x,\lambda}^{(m)}$ in altera evanescunt termini omnes, nisi terminus

$$G_1 G_2 \dots G_n \cdot \frac{\alpha_x^{(m)} \alpha_\lambda^{(m)}}{G_m},$$

qui in sequentem abit,

$$33.\quad (G_1 - G_m)(G_2 - G_m) \dots (G_n - G_m) \alpha_x^{(m)} \alpha_\lambda^{(m)} = B_{x,\lambda}^{(m)},$$

ubi in producto

$$(G_1 - G_m)(G_2 - G_m) \dots (G_n - G_m),$$

factorem evanescentem $G_m - G_m$ omittis; quod in eiusmodi productis in sequentibus quoque tacite supponemus.

Aequationem (18.) etiam de (12.) deducere licet, quippe quae suggerit identice:

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n} = G_1 G_2 \dots G_n (\Sigma \pm \alpha'_1 \alpha''_2 \dots \alpha_n^{(n)})^2,$$

de qua formula e (7.) ipsa (18.) sequitur. Demonstrata (18.), per considerationes antecedentes ex ea statim aequationem generaliorem deducis:

$$= (G_1 - x)(G_2 - x) \dots (G_n - x).$$

Unde habetur demonstratio maxime directa, pro G_1, G_2 .... G_n statuendas esse aequationis $\Gamma = 0$ radices *diversas.*

Comparata (33.) cum (28.), (30.), prodit:

$$34.\quad P^{(m)} = (G_1 - G_m)(G_2 - G_m) \dots (G_n - G_m) = B_{1,1}^{(m)} + B_{2,2}^{(m)} + \dots + B_{n,n}^{(m)}.$$

Notum est, haberi

$$(G_1 - G_m)(G_2 - G_m) \dots (G_n - G_m) = -\Gamma'_m,$$

siquidem statuitur

$$\Gamma'_m = \frac{\partial \Gamma}{\partial x},$$

post differentiationem posito $x = G_m$. Hinc habetur etiam e (34.):

$$35.\quad -\Gamma'_m = B_{1,1}^{(m)} + B_{2,2}^{(m)} + \dots + B_{n,n}^{(m)},$$

Porro e (30.) sive (33.) habes:

$$36.\quad \alpha_\varkappa^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)} = -\frac{B_{\varkappa,\lambda}^{(m)}}{\Gamma'_m}.$$

10.

Alio modo valde singulari exhibeamus iam expressiones $\alpha_\varkappa^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)}$, videlicet per differentialia partialia ipsius G_m, sumta secundum constantes $a_{\varkappa,\lambda}$, quae datam functionem V afficiunt.

Revocemus aequationem, cui satisfieri debet:

$$V = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda = G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 + \dots + G_n y_n y_n;$$

in qua, si substituimus valores ipsarum $x_\varkappa$,

$$x_\varkappa = \alpha'_\varkappa y_1 + \alpha''_\varkappa y_2 + \dots + \alpha_\varkappa^{(n)} y_n,$$

singulos comparando terminos nanciscimur:

$$37.\quad \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\,\alpha_\varkappa^{(m)}\alpha_\lambda^{(m')} = 0,$$

$$38.\quad \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\,\alpha_\varkappa^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)} = G_m.$$

Iam aequationem (38.) differentiemus.

Eum in finem observo, esse

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\,\partial.\alpha_\varkappa^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)} = 2\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\,\alpha_\varkappa^{(m)}\partial\alpha_\lambda^{(m)} = 2\sum_\lambda [\partial\alpha_\lambda^{(m)}.\sum_\lambda a_{\varkappa,\lambda}\alpha_\varkappa^{(m)}],$$

ideoque e (13.):

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\,\partial.\alpha_\varkappa^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)} = 2\,G_m\sum_\lambda \alpha_\lambda^{(m)}\partial\alpha_\lambda^{(m)},$$

unde e (4.)

$$39.\quad \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\,\partial.\alpha_\varkappa^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)} = 0.$$

Itaque in differentiatione expressionis

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\,\alpha_\varkappa^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)}$$

variationi coëfficientium $\alpha_\varkappa^{(m)}$ supersederi potest, ut quae evanescit. Hinc differentiata (38.) secundum $a_{\varkappa,\lambda}$, habes, quoties $\varkappa$ et λ diversi sunt,

$$40.\quad 2\alpha_\varkappa^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)} = \frac{\partial G_m}{\partial a_{\varkappa,\lambda}},$$

quoties $\varkappa = \lambda$:

$$41.\quad \alpha_\varkappa^{(m)}\alpha_\varkappa^{(m)} = \frac{\partial G_m}{\partial a_{\varkappa,\varkappa}}.$$

Quae sunt formulae perelegantes.

Valorem ipsius $\frac{\partial G_m}{\partial a_{\varkappa,\lambda}}$ invenis ex aequatione $\Gamma = 0$,

$$42.\quad \frac{\partial G_m}{\partial a_{\varkappa,\lambda}} = -\frac{\frac{\partial \Gamma_m}{\partial a_{\varkappa,\lambda}}}{\Gamma'_m},$$

designante $\frac{\partial \Gamma_m}{\partial a_{\kappa,\lambda}}$ valorem ipsius $\frac{\partial \Gamma}{\partial a_{\kappa,\lambda}}$, post differentiationem posito $x = G_m$. Hinc fit

$$43. \quad 2\alpha_\kappa^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)} = -\frac{\frac{\partial \Gamma_m}{\partial a_{\kappa,\lambda}}}{\Gamma_m'},$$

$$44. \quad \alpha_\kappa^{(m)}\alpha_\kappa^{(m)} = -\frac{\frac{\partial \Gamma_m}{\partial a_{\kappa,\kappa}}}{\Gamma_m'}.$$

Quibus formulis comparatis cum (38.), habetur

$$45. \quad \begin{cases} 2B^{m}_{\kappa,\lambda} = \frac{\partial \Gamma_m}{\partial a_{\kappa,\lambda}}, \\ B^{m}_{\kappa,\kappa} = \frac{\partial \Gamma_m}{\partial a_{\kappa,\kappa}}. \end{cases}$$

Data occasione observo generaliter, si $a_{\kappa,\lambda}$ et $a_{\lambda,\kappa}$ inter se diversi sunt, propositis n aequationibus linearibus huiusmodi:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \dots + a_{1,n}x_n &= v_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \dots + a_{2,n}x_n &= v_2, \\ \dots\dots\dots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 \dots + a_{n,n}x_n &= v_n, \end{aligned}$$

statuto
$$\Gamma = \Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{n,n},$$
sequi vice versa:

$$\begin{aligned} \Gamma x_1 &= \frac{\partial \Gamma}{\partial a_{1,1}}v_1 + \frac{\partial \Gamma}{\partial a_{2,1}}v_2 + \dots + \frac{\partial \Gamma}{\partial a_{n,1}}v_n, \\ \Gamma x_2 &= \frac{\partial \Gamma}{\partial a_{1,2}}v_1 + \frac{\partial \Gamma}{\partial a_{2,2}}v_2 + \dots + \frac{\partial \Gamma}{\partial a_{n,2}}v_n, \\ \dots\dots\dots & \\ \Gamma x_n &= \frac{\partial \Gamma}{\partial a_{1,n}}v_1 + \frac{\partial \Gamma}{\partial a_{2,n}}v_2 + \dots + \frac{\partial \Gamma}{\partial a_{n,n}}v_n. \end{aligned}$$

Quoties $a_{\kappa,\lambda} = a_{\lambda,\kappa}$, differentialis $\frac{\partial \Gamma}{\partial a_{\kappa,\lambda}}$ semisse tantum sumi debet, si κ et λ diversi sunt. Quo casu, posito insuper $a_{1,1} - G_m$, $a_{2,2} - G_m$, ..., $a_{n,n} - G_m$ loco $a_{1,1}$, $a_{2,2}$ .... $a_{n,n}$, e theoremate illo fluunt formulae (45.).

Statuamus

$$G_1^p y_1 y_1 + G_2^p y_2 y_2 \dots + G_n^p y_n y_n = \sum_{\kappa,\lambda} p_{\kappa,\lambda} x_\kappa x_\lambda,$$

ubi
$$G_1^p \alpha_\kappa' \alpha_\lambda' + G_2^p \alpha_\kappa'' \alpha_\lambda'' \dots + G_n^p \alpha_\kappa^{(n)} \alpha_\lambda^{(n)} = p_{\kappa,\lambda}.$$

Quoties p est numerus integer, sive positivus, sive negativus, quantitates $p_{\kappa,\lambda}$ semper rationaliter per ipsas $a_{\kappa,\lambda}$ exprimere licet. Posito enim

$$P = \frac{G_1^{p+1} + G_2^{p+1} \dots + G_n^{p+1}}{p+1},$$

quantitatem P e regulis notis combinatoriis per coëfficientes aequationis nostrae $\Gamma = 0$ rationaliter determinare licet. Qua inventa, habes e (40.), (41.):

$$p_{\varkappa,\lambda} = \frac{\partial P}{2\partial a_{\varkappa,\lambda}},$$

$$p_{\varkappa,\varkappa} = \frac{\partial P}{\partial a_{\varkappa,\varkappa}}.$$

Si $p = -1$, statui debet

$$P = \log(G_1 G_2 \dots G_n) = \log \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}.$$

Qui casus fomulam (22.) suggerit.

11.

Cl. Cauchy loco citato in commentatione inscripta

„*sur l'équation, à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires etc.*"

problema, de quo hactenus egimus, tamquam problema *maximi minimive* consideravit; quo quaeruntur valores variabilium $x_1, x_2 \dots x_n$, pro quibus sit

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 + \dots + x_n x_n = 1,$$

simulque data functio V maximum minimumve valorem induat. Cuius problematis solutio e solutione nostra hunc in modum fluit.

Nam e conditione inter variabiles stabilita,

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 + \dots + x_n x_n = y_1 y_1 + y_2 y_2 + \dots + y_n y_n = 1,$$

sequitur

$$V = G_m + (G_1 - G_m) y_1 y_1 + (G_2 - G_m) y_2 y_2 + \dots + (G_n - G_m) y_n y_n.$$

Unde, si G_m est maxima quantitatum $G_1, G_2 \dots G_n$, erit G_m maximus valor ipsius V; quoties G_m est minima quantitatum $G_1, G_2 \dots G_n$, erit G_m minimus valor ipsius V. Quem induit V valorem, variabilibus y_1, y_2 etc. praeter y_m evanescentibus omnibus, undi fieri debet $y_m = 1$. Hinc autem prodeunt valores,

$$x_1 = \alpha_1^{(m)}, \quad x_2 = \alpha_2^{(m)}, \dots x_n = \alpha_n^{(m)}.$$

Unde videmus, investigationem valorum variabilium $x_1, x_2 \dots x_n$, qui ipsam V maximan minimamve reddant, eandem esse atque coëfficientium $\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)} \dots \alpha_n^{(m)}$; atque investigationem valores maximi aut minimi ipsius V eandem atque quantitatum G_m.

Per regulas notas in theoria maximi et minimi, in auxilium vocato multiplicatore μ, determinantur valores quaesitos ipsarum $x_\varkappa$ per aequationes,

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \mu x_1, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = \mu x_2, \dots \frac{\partial V}{\partial x_n} = \mu x_n.$$

Fit autem

$$\frac{\partial V}{\partial x_\lambda} = 2[a_{\lambda,1} x_1 + a_{\lambda,2} x_2 + \ldots + a_{\lambda,n} x_n].$$

Unde habetur aequatio

$$\frac{u}{2} . x_\lambda = a_{\lambda,1} x_1 + a_{\lambda,2} x_2 + \ldots + a_{\lambda,n} x_n.$$

Quae eadem est atque (13.), si insuper ponitur $\frac{\mu}{2} = G_m$. Ad quas igitur aequationes quibus solutio problematis continetur, hic sine ullo calculo pervenitur.

12.

Sub finem formas quasdam speciales datae functionis transformandae V consideremus, pro quibus aequationi algebraicae, a cuius resolutione problema pendet, nec non valoribus coëfficientium substitutionis adhibendae maior concinnitas conciliatur.

Supponamus primum, datam functionem V compositam esse ex ipsis variabilium quadratis atque insuper e quadrato functionis linearis variabilium cuiuslibet; sive sit

$$V = A_1 x_1 x_1 + A_2 x_2 x_2 + \ldots + A_n x_n x_n + [a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n]^2.$$

Hoc casu fit

$$a_{x,x} = A_x + a_x a_x; \quad a_{x,\lambda} = a_x a_\lambda;$$

unde aequatio §. 7. proposita:

$$w_x = a_{x,1} x_1 + a_{x,2} x_2 + \ldots + a_{x,n} x_n,$$

in sequentem abit,

$$w_x = a_x u + A_x x_x,$$

siquidem statuitur.

$$u = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n.$$

Hinc habetur

$$x_x = \frac{w_x - a_x u}{A_x},$$

quo valore ipsarum x_x in aequatione antecedente substituto, prodit

$$u = \frac{a_1 w_1}{A_1} + \frac{a_2 w_2}{A_2} + \ldots + \frac{a_n w_n}{A_n} - \left[\frac{a_1 a_1}{A_1} + \frac{a_2 a_2}{A_2} + \ldots + \frac{a_n a_n}{A_n}\right] u,$$

sive

$$Pu = \frac{a_1 w_1}{A_1} + \frac{a_2 w_2}{A_2} + \ldots + \frac{a_n w_n}{A_n},$$

siquidem statuitur:

$$P = 1 + \frac{a_1 a_1}{A_1} + \frac{a_2 a_2}{A_2} + \ldots + \frac{a_n a_n}{A_n}.$$

Hinc ipsam x_x per $w_1, w_2 \ldots w_n$ expressam habes per aequationem:

$$x_x = \frac{w_x}{A_x} - \frac{a_x}{P A_x}\left[\frac{a_1 w_1}{A_1} + \frac{a_2 w_2}{A_2} + \ldots + \frac{a_n w_n}{A_n}\right],$$



unde multiplicatione facta per $A_1 A_2 \ldots A_n P$, fit

$$A_1 A_2 \ldots A_n . P . x_\varkappa = \frac{A_1 A_2 \ldots A_n}{A_\varkappa}\left[P w_\varkappa - a_\varkappa\left(\frac{a_1 w_1}{A_1} + \frac{a_2 w_2}{A_2} + \ldots + \frac{a_n w_n}{A_n}\right)\right].$$

Hac aequatione comparata cum sequente, §. 7. proposita,

$$x_\varkappa . \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n} = b_{\varkappa,1} w_1 + b_{\varkappa,2} w_2 + \ldots + b_{\varkappa,n} w_n$$

facile probatur, haberi:

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n} = A_1 A_2 \ldots A_n . P,$$

unde etiam:

$$b_{\varkappa,\lambda} = -A_1 A_2 \ldots A_n . \frac{a_\varkappa a_\lambda}{A_\varkappa A_\lambda},$$

$$b_{\varkappa,\varkappa} = \frac{A_1 A_2 \ldots A_n}{A_\varkappa}\left[P - \frac{a_\varkappa a_\varkappa}{A_\varkappa}\right]$$

Quamvis enim utramque aequationem comparando, tantum aequalitatem habes fractionum:

$$\frac{b_{\varkappa,\lambda}}{\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}} = \frac{-\frac{A_1 A_2 \ldots A_n a_\varkappa a_\lambda}{A_\varkappa A_\lambda}}{A_1 A_2 \ldots A_n . P},$$

$$\frac{b_{\varkappa,\varkappa}}{\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}} = \frac{\frac{A_1 A_2 \ldots A_n}{A_n}\left(P - \frac{a_\varkappa a_\varkappa}{A_\varkappa}\right)}{A_1 A_2 \ldots A_n . P},$$

tamen, cum in singulis fractionibus numerator et denominator sint functiones integrae, quae factorem communem non habent, separatim aequales ponere licet numeratores et denominatores. Nam eo casu et numeratores et denominatores tantum factore numerico inter se differe possunt, quem factorem vel ex unius termini comparatione cognoscas. Ita habes in expressione $\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ unicum terminum $a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}$, de quo, posito $a_{\varkappa,\varkappa} = a_\varkappa a_\varkappa + A_\varkappa$; productum $A_1 A_2 \ldots A_n$ provenit; qui cum etiam sit terminus expressionis $A_1 A_2 \ldots A_n . P$, ex unius huius termini aequalitate cognoscis, nec factore numerico expressiones illas differre; ideoque, sicuti proposuimus, numeratores illos et denominatores exacte aequales esse. Demonstrationes similes in sequentibus brevitatis causa supprimo.

Demonstravimus §. 8., expressionem

$$\Gamma = (G_1 - x)(G_2 - x) \ldots (G_n - x)$$

prodire ex expressione $\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}$, mutato $a_{\varkappa,\varkappa}$ in $a_{\varkappa,\varkappa} - x$; quod casu nostro idem est ac si mutamus $A_\varkappa$ in $A_\varkappa - x$. Hinc cum substituto valore ipsius P habeatur:

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n} = A_1 A_2 \ldots A_n\left[1 + \frac{a_1 a_1}{A_1} + \frac{a_2 a_2}{A_2} + \ldots + \frac{a_n a_n}{A_n}\right],$$

obtinemus:

$$\Gamma = (G_1 - x)(G_2 - x) \ldots . (G_n - x)$$
$$= (A_1 - x)(A_2 - x) \ldots . (A_n - x)\left[1 + \frac{a_1 a_1}{A_1 - x} + \frac{a_2 a_2}{A_2 - x} + \ldots . + \frac{a_n a_n}{A_n - x}\right].$$

Unde eo casu, quem consideramus, aequatio n^{ti} gradus, cuius radices sunt $G_1, G_2, \ldots . G_n$, induit formam elegantem:

$$0 = 1 + \frac{a_1 a_1}{A_1 - x} + \frac{a_2 a_2}{A_2 - x} + \ldots . + \frac{a_n a_n}{A_n - x}.$$

Statuimus porro §. 9., mutato $a_{\varkappa,\varkappa}$ in $a_{\varkappa,\varkappa} - G_m$, abire $b_{\varkappa,\lambda}$ in $B^{(m)}_{\varkappa,\lambda}$; quod casu nostro idem est ac si mutetur $A_\varkappa$ in $A_\varkappa - G_m$; quo facto expressio P evanescit. Hinc, sive $\varkappa$, λ iidem sive diversi sint, e valoribus inventis ipsarum $b_{\varkappa,\lambda}$ habemus:

$$B^{(m)}_{\varkappa,\lambda} = -a_\varkappa a_\lambda . \frac{(A_1 - G_m)(A_2 - G_m) \ldots . (A_n - G_m)}{(A_\varkappa - G_m)(A_\lambda - G_m)}.$$

Unde, inventis valoribus ipsarum $G_1, G_2, \ldots . G_n$, dantur per (33.) §. 9. coëfficientes propositi ope formulae generalis valde concinnae:

$$\alpha^{(m)}_\varkappa \alpha^{(m)}_\lambda = -\frac{a_\varkappa a_\lambda}{(A_\varkappa - G_m)(A_\lambda - G_m)} . \frac{(A_1 - G_m)(A_2 - G_m) \ldots . (A_n - G_m)}{(G_1 - G_m)(G_2 - G_m) \ldots . (G_n - G_m)},$$

quae et ipsa valet formula, sive $\varkappa$, λ diversi sint, sive aequales.

Si valores expressionum $\alpha^{(m)}_\varkappa \alpha^{(m)}_\lambda$ per unicam G_m exhiberi placet, observo, differentiata aequatione

$$\frac{(G_1 - x)(G_2 - x) \ldots . (G_n - x)}{(A_1 - x)(A_2 - x) \ldots . (A_n - x)} = 1 + \frac{a_1 a_1}{A_1 - x} + \frac{a_2 a_2}{A_2 - x} + \ldots . + \frac{a_n a_n}{A_n - x},$$

ac posito post differentiationem $x = G_m$, haberi:

$$-\frac{(G_1 - G_m)(G_2 - G_m) \ldots . (G_n - G_m)}{(A_1 - G_m)(A_2 - G_m) \ldots . (A_n - G_m)}$$
$$= \left(\frac{a_1}{A_1 - G_m}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{A_2 - G_m}\right)^2 + \ldots . + \left(\frac{a_n}{A_n - G_m}\right)^2.$$

Unde fit:

$$\alpha^{(m)}_\varkappa \alpha^{(m)}_\lambda = \frac{a_\varkappa a_\lambda}{(A_\varkappa - G_m)(A_\lambda - G_m)} . \frac{1}{\frac{a_1 a_1}{(A_1 - G_m)^2} + \frac{a_2 a_2}{(A_2 - G_m)^2} + \ldots . + \frac{a_n a_n}{(A_n - G_m)^2}}.$$

Posito $\lambda = \varkappa$, ex hac formula fluit:

$$\alpha^{(m)}_\varkappa = \frac{a_\varkappa}{A_\varkappa - G_m} \sqrt{\left(-\frac{A_1 - G_m . A_2 - G_m \ldots . A_n - G_m}{G_1 - G_m . G_2 - G_m \ldots . G_n - G_m}\right)}$$
$$= \frac{a_\varkappa}{A_\varkappa - G_m} . \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a_1 a_1}{(A_1 - G_m)^2} + \frac{a_2 a_2}{(A_2 - G_m)^2} + \ldots + \frac{a_n a_n}{(A_n - G_m)^2}\right)}}.$$

Unde *substitutio, qua adhibita obtinetur:*

$$A_1 x_1 x_1 + A_2 x_2 x_2 + \ldots . + A_n x_n x_n + (a_1 x_1 + a_2 x_2 \ldots . + a_n x_n)^2$$
$$= G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 \ldots . + G_n y_n y_n,$$

designantibus G_1, G_2 .... G_n radices aequationis:

$$0 = 1 + \frac{a_1 a_1}{A_1 - x} + \frac{a_2 a_2}{A_2 - x} + \dots + \frac{a_n a_n}{A_n - x},$$

fit.

$$\sqrt{\left(\frac{a_1 a_1}{(A_1 - G_m)^2} + \frac{a_2 a_2}{(A_2 - G_m)^2} + \dots + \frac{a_n a_n}{(A_n - G_m)^2}\right)} \cdot y_m$$
$$= \frac{a_1 x_1}{A_1 - G_m} + \frac{a_2 x_2}{A_2 - G_m} + \dots + \frac{a_n x_n}{A_n - G_m}.$$

13.

Forma aequationis n^{ti} gradus:

$$0 = 1 + \frac{a_1 a_1}{A_1 - x} + \frac{a_2 a_2}{A_2 - x} + \dots + \frac{a_n a_n}{A_n - x},$$

a cuius resolutione problema pendet, eo commodo gaudet, ut ipso intuitu pateat, radices eius omnes esse reales, adeoque earum limites assignari possint.

Statuamus, esse

$$A_1 > A_2 \dots > A_{n-1} > A_n,$$

ita ut

$$A_1 - A_2,\ A_2 - A_3,\ \dots\ A_{n-1} - A_n$$

sint quantitates positivae. Quo statuto, videmus, decrescente x a $A_\varkappa$ usque ad $A_{\varkappa+1}$, simul expressionem

$$1 + \frac{a_1 a_1}{A_1 - x} + \frac{a_2 a_2}{A_2 - x} + \dots + \frac{a_n a_n}{A_n - 1}$$

decrescere a $+\infty$ usque ad $-\infty$; unde inter $A_\varkappa$ et $A_{\varkappa+1}$ una certe radix aequationis propositae iacet. Porro decrescente x a $+\infty$ usque ad A_1, decrescit expressio proposita a $+1$ usque ad $-\infty$, unde etiam inter $+\infty$ et A_1 radix aequationis posita est. Hinc omnes aequationis propositae radices et reales sunt, et singulae positae sunt in singulis intervallis seriei

$$+\infty,\ A_1,\ A_2\ \dots\ A_n.$$

E limitibus assignatis facile etiam patet, quot aequationis propositae radices positivae, quot negativae sint. Statuamus eum in finem, e quantitatibus A_1, A_2 .... A_n esse m positivas, $n-m$ negativas, ita ut e quantitatibus A_m, A_{m+1} se proxime insequentibus altera positiva, altera negativa sit. Quo statuto, facile probatur, prout expressio

$$1 + \frac{a_1 a_1}{A_1} + \frac{a_2 a_2}{A_2} + \dots + \frac{a_n a_n}{A_n}$$

aut positiva aut negativa sit, radicem inter A_m et A_{m+1} positam aut negativam aut positivam esse; ideoque e radicibus aequationis propositae aut esse m positivas, $n-m$ negativas, aut $m+1$ positivas, $n-m-1$ negativas.

[illegible]

$F = [illegible]$

[illegible]

[illegible] gradus. [illegible] quantitates [illegible]

[illegible]

14.

Si [illegible] problematis generalis pro $n-1$ variabilibus [illegible] supponis, [illegible] problema pro n variabilibus facile revocatur ad [illegible], quem antecedentibus consideravimus.

[illegible] functionem

$$F = \sum a_{ik} x_i x_k,$$

in qua ipsis $\varkappa$, λ valores omnes $1, 2 \ldots . n$ tribuuntur, ita repraesentari posse:

$$V = \left[\frac{a_{1,n}x_1 + a_{2,n}x_2 + \ldots . + a_{n-1,n}x_{n-1}}{m} + m x_n\right]^2 + (a_{n,n} - mm) x_n x_n$$
$$+ \sum_{\varkappa,\lambda}\left(a_{\varkappa,\lambda} - \frac{a_{\varkappa,n}a_{\lambda,n}}{mm}\right) x_\varkappa x_\lambda,$$

in qua expressione designat m factorem constantem prorsus arbitrarium, atque numeris $\varkappa$, λ tribuendi sunt valores $1, 2, \ldots . n-1$.

Jam per substitutiones lineares efficiamus:

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 + \ldots . + x_{n-1}x_{n-1} = \xi_1\xi_1 + \xi_2\xi_2 + \ldots . + \xi_{n-1}\xi_{n-1},$$
$$\sum_{\varkappa,\lambda}\left(a_{\varkappa,\lambda} - \frac{a_{\varkappa,n}a_{\lambda,n}}{mm}\right) x_\varkappa x_\lambda = F_1\xi_1\xi_1 + F_2\xi_2\xi_2 + \ldots . + F_{n-1}\xi_{n-1}\xi_{n-1}.$$

Unde functio V formam induit:

$$V = [c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots . + c_{n-1}\xi_{n-1} + m x_n]^2$$
$$+ F_1\xi_1\xi_1 + F_2\xi_2\xi_2 + \ldots . + F_{n-1}\xi_{n-1}\xi_{n-1} + (a_{n,n} - mm) x_n x_n,$$

quae ipsa est forma ς, quam antecedentibus consideravimus. Unde si per transformationem secundam efficimus:

$$\xi_1\xi_1 + \xi_2\xi_2 + \ldots . + \xi_{n-1}\xi_{n-1} + x_n x_n = y_1 y_1 + y_2 y_2 + \ldots . + y_n y_n,$$

simulque:

$$V = G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 + \ldots . + G_n y_n y_n;$$

duae substitutiones iunctae suppeditabunt propositam, eruntque G_1, G_2 ….
…. G_n radices aequationis n^{ti} gradus:

$$0 = 1 + \frac{c_1 c_1}{F_1 - x} + \frac{c_2 c_2}{F_2 - x} + \ldots . + \frac{c_{n-1}c_{n-1}}{F_{n-1} - x} + \frac{mm}{a_{n,n} - mm - x}.$$

Observavimus §o antecedente, ex eiusmodi aequatione vel ipso intuitu sequi, eius radices omnes esse reales, siquidem constantes, quae eam afficiunt, reales sunt. Unde per considerationes antecedentes demonstratum est, si problema pro $n-1$ variabilibus solutionem semper realem habet, etiam pro n variabilibus solutionem problematis semper realem fore. Hinc petitur demonstratio nova, quod problema propositum solutione semper reali gaudet, quippe quod pro valoribus $n = 2$, $n = 3$ facile probatur.

Quantitas m in antecedentibus prorsus arbitraria erat; consideramus casum, quo in infinitum crescit. Eo casu, si statuimus, expressionem

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots . a_{n-1,n-1},$$

mutato $a_{\varkappa,\varkappa}$ in $a_{\varkappa,\varkappa} - x$, abire in $B_{n,n}$, erunt F_1, F_2 …. F_{n-1} radices aequationis $B_{n,n} = 0$; porro $a_{n,n} - mm$ abit in $-\infty$. Iam vero e §o antecedente, siquidem F_1, F_2 …. F_{n-1} magnitudine se excipiunt, quantitates G_1, G_2 …. G_n positae erunt in intervallis seriei

$$+\infty,\ F_1,\ F_2\ \ldots.\ F_{n-1},\ a_{n,n}-mm$$

singulae in singulis. Unde, posito $m=\infty$, sequitur, radices aequationis $\Gamma=0$ sive quantitates G_1, G, ... G_n positas esse singulas inter binas radices aequationis $B_{n,n}=0$, magnitudine se proxime insequentes; praeter maximam, pro qua altera limes est $+\infty$, et minimam, pro qua altera limes est $-\infty$. Quod et ipsum alio modo demonstravit Cl. Cauchy. Idem etiam hunc in modum e formulis supra traditis derivari potest.

Sequitur enim ex algorithmis notis algebraicis, si notationem §i 7. rursus adhibemus, $b_{n,n}=\Sigma\pm a_{1,1}\,a_{2,2}\ldots.\,a_{n-1,n-1}$.
Unde, si ponitur $x=G_m$, abit $B_{n,n}$ in $B^{(m)}_{n,n}$. Erat autem

$$\alpha^{(m)}_n\,\alpha^{(m)}_n=-\frac{B_{n,n}}{\Gamma'},$$

siquidem $\Gamma'=\frac{\partial\Gamma}{\partial x}$, et post differentiationem ponitur $x=G_m$. Iam si in expressione Γ' substituimus loco x radices aequationis $\Gamma=0$ eo ordine, quo magnitudine se excipiunt, eius valores alternatim positivae et negativae fiunt, quod e theoria aequationum liquet. Unde, cum $\alpha^{(m)}_n\,\alpha^{(m)}_n$ semper positivum sit, etiam valores ipsius $B_{n,n}$ alternatim negativae et positivae erunt. Unde singulae radices aequationis $B_{n,n}=0$ positae sunt inter binas radices aequationis $\Gamma=0$ se proxime insequentes, ideoque vice versa singulae radices aequationis $\Gamma=0$ inter binas aequationis $B_{n,n}=0$, se proxime insequentes, advocatis insuper limitibus extremis $+\infty$ et $-\infty$.

Casu trium variabilium functio V in forma illam specialem, quam antecedentibus consideravimus, semper redigi potest. Sit enim:

$$V=l x_1x_1+m x_2x_2+n x_3x_3+2l'x_2x_3+2m'x_3x_1+2n'x_1x_2,$$

ac supponamus, $l'm'n'$ esse positivum; ubi $l'm'n'$ esset negativum, loco V tantum $-V$ considerari deberet. Expressione illa ipsius V comparata cum sequente,

$$V=A_1x_1x_1+A_2x_2x_2+A_3x_3x_3+(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2,$$

habetur:

$$a_1=\sqrt{\left(\frac{m'n'}{l'}\right)},\quad a_2=\sqrt{\left(\frac{n'l'}{m'}\right)},\quad a_3=\sqrt{\left(\frac{l'm'}{n'}\right)},$$

$$A_1=l-\frac{m'n'}{l'},\quad A_2=m-\frac{n'l'}{m'},\quad A_3=n-\frac{l'm'}{n'}.$$

Hinc aequatio cubica resolvenda fit,

$$0=1+\frac{m'n'}{l'(l-x)-m'n'}+\frac{n'l'}{m'(m-x)-n'l'}+\frac{l'm'}{n'(n-x)-l'm'},$$

cuius radices ipso intuitu patet esse reales, quod olim non nisi per amba-

ges a viris doctis demonstratum fuit, cum eadem aequatio sub forma exhibita esset sequente,

$$0 = (l-x)(m-x)(n-x) - l'l'(l-x) - m'm'(m-x) - n'n'(n-x) + 2l'm'n'.$$

simulque patet ex illa forma, singulas radices positas esse inter binas quantitatum

$$\infty,\ l - \frac{m'n'}{l'},\quad m - \frac{n'l'}{m'},\quad n - \frac{l'm'}{n'},$$

magnitudine se proxime insequentes; atque prout quantitas

$$1 + \frac{m'n'}{l'l - m'n'} + \frac{n'l'}{m'm - n'l'} + \frac{l'm'}{n'n - l'm'}$$

aut positiva aut negativa sit, aut tot esse radices positivas, quot e quantitatibus

$$l - \frac{m'n'}{l'},\quad m - \frac{n'l'}{m'},\quad n - \frac{l'm'}{n'}$$

positivae sint, aut numerum radicum positivarum illo numero unitate maiorem esse. Hinc proposita aequatione superficiei secundi ordinis, ad coordinatas orthogonales relata, facillime diiudicas, an superficies sit ellipsoida, an hyperboloida continua, an hyperboloida bipartita.

15.

Supponamus porro, quod est alterum exemplum, functionem V praeter quadrata variabilium adhuc constare quadratis duarum functionum linearium variabilium; sive sit:

$$V = A_1 x_1 x_1 + A_2 x_2 x_2 + \ldots + A_n x_n x_n$$
$$+ [a_1 x + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n]^2 + [a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \ldots + a'_n x_n]^2.$$

Quo casu fit

$$a_{\varkappa,\varkappa} = A_\varkappa + a_\varkappa a_\varkappa + a'_\varkappa a'_\varkappa;$$
$$a_{\varkappa,\lambda} = a_\varkappa a_\lambda + a'_\varkappa a'_\lambda.$$

Hinc aequatio §. 7. proposita:

$$w_\varkappa = a_{\varkappa,1} x_1 + a_{\varkappa,2} x_2 + \ldots + a_{\varkappa,n} x_n,$$

haec fit:

$$w_\varkappa = A_\varkappa x_\varkappa + a_\varkappa u + a'_\varkappa u',$$

siquidem statuitur:

$$u = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n,$$
$$u' = a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \ldots + a'_n x_n.$$

Hinc habetur:

$$x_\varkappa = \frac{1}{A_\varkappa}[w_\varkappa - a_\varkappa u - a'_\varkappa u'].$$

Quibus valoribus ipsarum $x_\varkappa$ in expressionibus ipsarum u, u' substitutis, prodit:

$$\frac{a_1 w_1}{A_1} + \frac{a_2 w_2}{A_2} + \dots + \frac{a_n w_n}{A_n} = P u + P_1 u',$$
$$\frac{a'_1 w_1}{A_1} + \frac{a'_2 w_2}{A_2} + \dots + \frac{a'_n w_n}{A_n} = P_1 u + P_{1,1} u',$$

siquidem ponitur:

$$P = 1 + \frac{a_1 a_1}{A_1} + \frac{a_2 a_2}{A_2} + \dots + \frac{a_n a_n}{A_n},$$
$$P_1 = \frac{a_1 a'_1}{A_1} + \frac{a_2 a'_2}{A_2} + \dots + \frac{a_n a'_n}{A_n},$$
$$P_{1,1} = 1 + \frac{a'_1 a'_1}{A_1} + \frac{a'_2 a'_2}{A_2} + \dots + \frac{a'_n a'_n}{A_n}.$$

E duabus illis aequationibus fit:

$$[PP_{1,1} - P_1 P_1] u = P_{1,1}\left[\frac{a_1 w_1}{A_1} + \frac{a_2 w_2}{A_2} + \dots + \frac{a_n w_n}{A_n}\right]$$
$$- P_1 \left[\frac{a'_1 w_1}{A_1} + \frac{a'_2 w_2}{A_2} + \dots + \frac{a'_n w_n}{A_n}\right],$$
$$[PP_{1,1} - P_1 P_1] u' = P \left[\frac{a'_1 w_1}{A_1} + \frac{a'_2 w_2}{A_2} + \dots + \frac{a'_n w_n}{A_n}\right]$$
$$- P_1 \left[\frac{a_1 w_1}{A_1} + \frac{a_2 w_2}{A_2} + \dots + \frac{a_n w_n}{A_n}\right].$$

Substitutis autem valoribus ipsarum P, P_1, $P_{1,1}$, habetur:

$$PP_{1,1} - P_1 P_1 = 1 + \sum_{\varkappa} \frac{a_\varkappa a_\varkappa + a'_\varkappa a'_\varkappa}{A_\varkappa} + \sum_{\varkappa,\lambda} \frac{(a_\varkappa a'_\lambda - a_\lambda a'_\varkappa)^2}{A_\varkappa A_\lambda},$$

positis pro $\varkappa$, λ valoribus $1, 2 \dots n$.

Valores ipsarum u, u' inventos si in expressione ipsius $x_\varkappa$ supra exhibito substituimus, prodit:

$$x_\varkappa = \frac{w_\varkappa}{a_\varkappa} - \frac{a_\varkappa P_{1,1} - a'_\varkappa P_1}{A_\varkappa (PP_{1,1} - P_1 P_1)}\left[\frac{a_1 w_1}{A_1} + \frac{a_2 w_2}{A_2} + \dots + \frac{a_n w_n}{A_n}\right]$$
$$- \frac{a'_\varkappa P - a_\varkappa P_1}{A_\varkappa (PP_{1,1} - P_1 P_1)}\left[\frac{a'_1 w_1}{A_1} + \frac{a'_2 w_2}{A_2} + \dots + \frac{a'_n w_n}{A_n}\right].$$

Qua aequatione comparata cum hac §. 7. proposita:

$$x_\varkappa = \frac{b_{\varkappa,1} w_1 + b_{\varkappa,2} w_2 + \dots + b_{\varkappa,n} w_n}{\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}},$$

per eandem ratiocinationem, qua §. 12. usi sumus, obtinemus:

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n} = A_1 A_2 \dots A_n [PP_{1,1} - P_1 P_1],$$
$$b_{\varkappa,\varkappa} = \frac{A_1 A_2 \dots A_n}{A_\varkappa}\left[PP_{1,1} - P_1 P_1 - \frac{a'_\varkappa a'_\varkappa P - 2 a'_\varkappa a_\varkappa P_1 + a_\varkappa a_\varkappa P_{1,1}}{A_\varkappa}\right],$$
$$b_{\varkappa,\lambda} = -\frac{A_1 A_2 \dots A_n}{A_\varkappa A_\lambda}[a'_\varkappa a'_\lambda P - (a'_\varkappa a_\lambda + a'_\lambda a_\varkappa) P_1 + a_\varkappa a_\lambda P_{1,1}].$$

Fit autem ipsarum P, P_1, $P_{1,1}$ valoribus substitutis, sive $\varkappa$, λ diversi sint, sive iidem.

$$a'_\varkappa a'_\lambda + P - (a'_\varkappa a_\lambda + a'_\lambda a_\varkappa)P_1 + a_\varkappa a_\lambda P_{1,1} =$$
$$a'_\varkappa a'_\lambda + a_\varkappa a_\lambda + \sum_\mu \frac{(a_\varkappa a'_\mu - a'_\varkappa a_\mu)(a_\lambda a'_\mu - a'_\lambda a_\mu)}{A_\mu},$$

siquidem in summa assignata loco μ ponuntur valores $1, 2, \dots n$.

His praemissis, cum e §. 8., mutato $a_{\varkappa,\varkappa}$ in $a_{\varkappa,\varkappa}-x$, abeat

$$\sum \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$$

in

$$\Gamma = (G_1-x)(G_2-x)\dots(G_n-x),$$

habetur e valore adstructo ipsius $\sum\pm a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{n,n}$, mutato $A_\varkappa$ in $A_\varkappa - x$:

$$\Gamma = (G_2-x)(G_2-x)\dots(G_n-x) =$$
$$(A_1-x)(A_2-x)\dots(A_n-x)\left[1+\sum_\varkappa \frac{a_\varkappa a_\varkappa + a'_\varkappa a'_\varkappa}{A_\varkappa - x} + \sum_{\varkappa,\lambda}\frac{(a_\varkappa a_\lambda - a_\lambda a'_\varkappa)^2}{(A_\varkappa-x)(A_\lambda-x)}\right].$$

Unde determinantur G_1, G_2, ... G_n ut radices aequationis:

$$0 = 1 + \sum_\varkappa \frac{a_\varkappa a_\varkappa + a'_\varkappa a'_\varkappa}{A_\varkappa - x} + \sum_{\varkappa,\lambda}\frac{(a_\varkappa a'_\lambda - a_\lambda a'_\varkappa)^2}{(A_\varkappa-x)(A_\lambda-x)}.$$

Porro statuimus §. 9. mutato $a_{\varkappa,\varkappa}$ in $a_{\varkappa,\varkappa}-G_m$, abire $b_{\varkappa,\lambda}$ in $B^{(m)}_{\varkappa,\lambda}$; unde casu nostro mutato $A_\varkappa$ in $A_\varkappa - G_m$, e valoribus ipsius $b_{\varkappa,\varkappa}$, $b_{\varkappa,\lambda}$ adstructis habetur:

$$B^{(m)}_{\varkappa,\lambda} = -\frac{(A_1-G_m)\dots(A_n-G_m)}{(A_\varkappa-G_m)(A_\lambda-G_m)}\left[a_\varkappa a_\lambda + a'_\varkappa a'_\lambda + \sum_\mu \frac{(a_\varkappa a'_\mu - a'_\varkappa a_\mu)(a_\lambda a'_\mu - a'_\lambda a_\mu)}{A_\mu - x}\right].$$

Quae formula valet, sive diversi sive aequales sint numeri $\varkappa$, λ, cum mutato $A_\varkappa$ in $A_\varkappa - G_m$ expressio $PP_{1,1} - P_1P_1$ evanescat.

E valore ipsius $B^{(m)}_{\varkappa,\lambda}$ invento sequitur per (33.) § 9.:

$$a^{(m)}_\varkappa a^{(m)}_\lambda = -\frac{(A_1-G_m)\dots(A_n-G_m)}{(A_\varkappa-G_m)(A_\lambda-G_m)}\cdot\frac{a'_\varkappa a'_\lambda + a_\varkappa a_\lambda + \sum_\mu \frac{(a_\varkappa a'_\mu - a'_\varkappa a_\mu)(a_\lambda a'_\mu - a'_\lambda a_\mu)}{A_\mu - G_m}}{(G_1-G_m)(G_2-G_m)\dots(G_n-G_m)},$$

quae et ipsa perinde valet formula, sive $\varkappa$, λ diversi, sive aequales sint. Qua formula, postquam quantitates G_m per resolutionem aequationis algebraicae adstructae determinatas habes, coëfficientes propositi determinantur.

Eadem manet methodus, si functio V praeter quadrata variabilium adhuc quadratis trium quarumlibet aut plurium functionum linearium variabilium constat.

16.

Sub finem breviter adhuc agamus de casu, quo functio V gaudet

$V = A_1 x_1 x_1 + A_2 x_2 x_2 + \ldots + A_n x_n x_n + 2 x_n (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1})$; sive in ipsa V praeter quadrata variabilium tantum unius x_n producta in reliquas inveniuntur. Ad quam formam functionem V facile revocas, si pro $n-1$ variabilibus problema solutum accipis.

Ex aequatione §i 7., qua quantitates w_x per x_x exhibentur, habemus casu proposito:

$$w_x = A_x x_x + a_x x_n,$$
$$w_n = A_n x_n + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1},$$

ubi numero x tribuendi sunt valores 1, 2 .... $n-1$. Hinc sequitur:

$$x_x = \frac{1}{A_x}[w_x - a_x x_n],$$

qua expressione in valore ipsius w_n substituta, et posito

$$Q = A_n - \frac{a_1 a_1}{A_1} - \frac{a_2 a_2}{A_2} \ldots - \frac{a_{n-1} a_{n-1}}{A_{n-1}},$$

determinatur x_n per quantitates w_x ope aequationis:

$$Q . x_n = w_n - \frac{a_1 w_1}{A_1} - \frac{a_2 w_2}{A_2} \ldots - \frac{a_{n-1} w_{n-1}}{A_{n-1}},$$

unde

$$Q x_x = \frac{Q}{A_x} . w_x - \frac{a_x}{A_x}\left[w_n - \frac{a_1 w_1}{A_1} - \frac{a_2 w_2}{A_2} \ldots - \frac{a_{n-1} w_{n-1}}{A_{n-1}}\right].$$

Qua aequatione et antecedente comparatis cum ea, qua vice versa quantitates x_m per w_m exprimi statuimus:

$$(\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}) x_x = b_{x,1} w_1 + b_{x,2} w_2 + \ldots + b_{x,n} w_n,$$

obtinetur per eandem ratiocinationem, qua supra usi sumus:

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n} = A_1 A_2 \ldots A_{n-1} . Q$$
$$= A_1 A_2 \ldots A_{n-1}\left[A_n - \frac{a_1 a_1}{A_1} - \frac{a_2 a_2}{A_2} \ldots - \frac{a_{n-1} a_{n-1}}{A_{n-1}}\right].$$
$$b_{x,\lambda} = \frac{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}{A_x A_\lambda} . a_x a_\lambda;$$
$$b_{x,x} = \frac{Q}{A_x} + \frac{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}{A_x A_x} . a_x a_x,$$
$$b_{x,n} = -\frac{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}{A_x} . a_x,$$
$$b_{n,n} = A_1 A_2 \ldots A_{n-1}.$$

ubi numeris x, λ valores conveniunt 1, 2 .... $n-1$.

Ex his valoribus sequitur mutato $a_{x,x}$ in $a_{x,x} - x$ sive A_x in $A_x - x$:

$$\Gamma = (G_1 - x)(G_2 - x) \ldots (G_n - x)$$
$$= (A_1 - x)(A_2 - x) \ldots (A_{n-1} - x)\left[A_n - x - \frac{a_1 a_1}{A_1 - x} - \frac{a_2 a_2}{A_2 - x} \ldots - \frac{a_{n-1} a_{n-1}}{A_{n-1} - x}\right],$$

unde sunt G_1, G_2 .... G_n radices aequationis:

$$0 = A_n - x - \frac{a_1 a_1}{A_1 - x} - \frac{a_2 a_2}{A_2 - x} \cdots - \frac{a_{n-1} a_{n-1}}{A_{n-1} - x}.$$

Porro mutato $a_{x,x}$ in $a_{x,x} - G_m$ sive A_x in $A_x - G_m$, prodeunt aequationes:

$$B_{x,\lambda}^{(m)} = \frac{(A_1 - G_m)(A_2 - G_m) \ldots (A_{n-1} - G_m)}{(A_x - G_m)(A_\lambda - G_m)} \cdot a_x a_\lambda,$$

$$B_{x,n}^{(m)} = -\frac{(A_1 - G_m)(A_2 - G_m) \ldots (A_{n-1} - G_m)}{(A_x - G_m)} \cdot a_x,$$

$$B_{n,n}^{(m)} = (A_1 - G_m)(A_2 - G_m) \ldots (A_{n-1} - G_m),$$

in quarum prima x, λ sive iidem sive diversi statui possunt. De quibus fluunt sequentes:

$$\alpha_x^{(m)} \alpha_\lambda^{(m)} = \frac{a_x a_\lambda}{(A_x - G_m)(A_\lambda - G_m)} \cdot \frac{(A_1 - G_m)(A_2 - G_m) \ldots (A_{n-1} - G_m)}{(G_1 - G_m)(G_2 - G_m) \ldots (G_n - G_m)},$$

$$\alpha_x^{(m)} \alpha_n^{(m)} = -\frac{a_x}{A_x - G_m} \cdot \frac{(A_1 - G_m)(A_2 - G_m) \ldots (A_{n-1} - G_m)}{(G_1 - G_m)(G_2 - G_m) \ldots (G_n - G_m)},$$

$$\alpha_n^{(m)} \alpha_n^{(m)} = \frac{(A_1 - G_m)(A_2 - G_m) \ldots (A_{n-1} - G_m)}{(G_1 - G_m)(G_2 - G_m) \ldots (G_n - G_m)}.$$

Unde coëfficientes propositi fiunt:

$$\alpha_n^{(m)} = \sqrt{\left(\frac{(A_1 - G_m)(A_2 - G_m) \ldots (A_{n-1} - G_m)}{(G_1 - G_m)(G_2 - G_m) \ldots (G_n - G_m)}\right)},$$

$$\alpha_x^{(m)} = -\frac{a_x}{A_x - G_m} \sqrt{\left(\frac{(A_1 - G_m)(A_2 - G_m) \ldots (A_{n-1} - G_m)}{(G_1 - G_m)(G_2 - G_m) \ldots (G_n - G_m)}\right)}.$$

Quae sunt formulae satis concinnae.

De formulis illis sequitur etiam:

$$\alpha_x^{(m)} = -\frac{a_x \alpha_n^{(m)}}{A_x - G_m},$$

unde *substitutiones adhibendae, quarum ope fiat:*

$$A_1 x_1 x_1 + A_2 x_2 x_2 \ldots + A_n x_n x_n + 2 x_n (a_1 x_1 + a_2 x_2 \ldots + a_{n-1} x_{n-1})$$
$$= G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 \ldots + G_n y_n y_n,$$

designantibus $G_1, G_2 \ldots G_n$ *radices aequationis,*

$$0 = A_n - x - \frac{a_1 a_1}{A_1 - x} - \frac{a_2 a_2}{A_2 - x} \cdots - \frac{a_{n-1} a_{n-1}}{A_{n-1} - x},$$

nanc formam concinnam induunt:

$$y_m = -\alpha_n^{(m)} \left[\frac{a_1 x_1}{A_1 - G_m} + \frac{a_2 x_2}{A_2 - G_m} + \ldots + \frac{a_{n-1} x_{n-1}}{A_{n-1} - G_m} - x_n\right],$$

posito:

$$\alpha_n^{(m)} = \sqrt{\frac{(A_1 - G_m)(A_2 - G_m) \ldots (A_n - G_m)}{(G_1 - G_m)(G_2 - G_m) \ldots (G_n - G_m)}}.$$

Aequationem propositam, cuius radices sunt $G_1, G_2 \ldots G_n$, vel ipso intuitu patet, radices omnes habere reales, easque singulas positas iu intervallis seriei:

$$+\infty, A_1, A_2 \ldots, A_{n-1}, -\infty,$$

siquidem statuitur $A_1 > A_2 \ldots > A_{n-2} > A_{n-1}$.

His transactis, iam demonstremus, quomodo per quantitates imaginarias in usum vocatas de quaestionibus propositis algebraicis deducatur transformatio singularis integralis multiplicis quam sequente problemate proponemus.

Problema II.

„Statuatur, inter $n-1$ variabiles $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$, quarum summa „quadratorum $= 1$, aliasque $v_1, v_2 \dots v_{n-1}$, quarum summa quadra„torum et ipsa $= 1$, locum habere aequationes huiusmodi:

$$„v_1 = \frac{\alpha' - \alpha'_1 \xi_1 - \alpha'_2 \xi_2 \dots - \alpha'_n \xi_n}{\alpha - \alpha_1 \xi_1 - \alpha_2 \xi_2 \dots - \alpha_n \xi_n},$$

$$„v_2 = \frac{\alpha'' - \alpha''_1 \xi_1 - \alpha''_2 \xi_2 \dots - \alpha''_n \xi_n}{\alpha - \alpha_1 \xi_1 - \alpha_2 \xi_2 \dots - \alpha_n \xi_n},$$

. . . .

$$„v_n = \frac{\alpha^{(n)} - \alpha_1^{(n)} \xi_1 - \alpha_2^{(n)} \xi_2 \dots - \alpha_n^{(n)} \xi_n}{\alpha - \alpha_1 \xi_1 - \alpha_2 \xi_2 \dots - \alpha_n \xi_n};$$

„sit porro W data functio quaelibet secundi ordinis variabilium ξ_1, „$\xi_2 \dots \xi_n$; proponitur, integrale $(n-2)$tuplum

$$„\int^{n-2} \frac{\partial \xi_1 \, \partial \xi_2 \dots \partial \xi_{n-2}}{\xi_{n-1} W^{\frac{n-2}{2}}}$$

per dictas substitutiones transformare in aliud huiusmodi,

$$„\int^{n-2} \frac{\partial v_1 \, \partial v_2 \dots \partial v_{n-2}}{v_{n-1} [G - G_1 v_1 v_1 - G_2 v_2 v_2 \dots - G_{n-1} v_{n-1} v_{n-1}]^{\frac{n-2}{2}}}."$$

17.

Supponamus, ipsi x tributis valoribus $1, 2 \dots n-1$, in formulis antecedentis problematis esse:

$$1. \quad \frac{x_x}{x_n} = -i\xi_x, \quad \frac{y_x}{y_n} = i v_x,$$

ubi $i = \sqrt{-1}$. Unde formula

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 + \dots + x_n x_n = y_1 y_1 + y_2 y_2 + \dots + y_n y_n$$

abit in hanc:

$$2. \quad 1 - \xi_1 \xi_1 - \xi_2 \xi_2 - \dots - \xi_{n-1} \xi_{n-1} = \frac{y_n y_n}{x_n x_n} (1 - v_1 v_1 - v_2 v_2 - \dots - v_{n-1} v_{n-1}).$$

Porro loco $\alpha_n^{(x)}$, $\alpha_x^{(n)}$, $\alpha_n^{(n)}$ scribamus $i\alpha^{(x)}$, $-i\alpha_x$, α; quo facto e formulis, quae de substitutionibus in problemate antecedente adhibitis fluunt,

$$\frac{y_x}{y_n} = \frac{\alpha_1^{(x)} x_1 + \alpha_2^{(x)} x_2 + \dots + \alpha_n^{(x)} x_n}{\alpha_1^{(n)} x_1 + \alpha_2^{(n)} x_2 + \dots + \alpha_n^{(n)} x_n},$$

$$\frac{x_x}{x_n} = \frac{\alpha'_x y_1 + \alpha''_x y_2 + \dots + \alpha^{(n)}_x y_n}{\alpha'_n y_1 + \alpha''_n y_2 + \dots + \alpha^{(n)}_n y_n},$$

habentur formulae:

$$3.\quad \begin{cases} v_x = \dfrac{\alpha^{(x)} - \alpha^{(x)}_1 \xi_1 - \alpha^{(x)}_2 \xi_2 \dots - \alpha^{(x)}_{n-1} \xi_{n-1}}{\alpha - \alpha_1 \xi_1 - \alpha_2 \xi_2 \dots - \alpha_{n-1} \xi_{n-1}}, \\ \xi_x = \dfrac{\alpha_x - \alpha'_x v_1 - \alpha''_x v_2 \dots - \alpha^{(n-1)}_x v_{n-1}}{\alpha - \alpha' v_1 - \alpha'' v_2 \dots - \alpha^{(n-1)} v_{n-1}}; \end{cases}$$

nec non de hac:

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{\alpha^{(n)}_1 x_1 + \alpha^{(n)}_2 x_2 + \dots + \alpha^{(n)}_n x_n}{x_n} = \frac{y_n}{\alpha'_n y_1 + \alpha''_n y_2 + \dots + \alpha^{(n)}_n x_n},$$

fit:

$$4.\quad \frac{y_n}{x_n} = \alpha - \alpha_1 \xi_1 - \alpha_2 \xi_2 \dots - \alpha_{n-1} \alpha_{n-1} = \frac{1}{\alpha - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 \dots - \alpha_{n-1} v_{n-1}}.$$

Unde e (2.), habetur:

$$1 - \xi_1 \xi_1 - \xi_2 \xi_2 - \dots - \xi_{n-1} \xi_{n-1} = \frac{1 - v_1 v_1 - v_2 v_2 - \dots - v_{n-1} v_{n-1}}{[\alpha - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_{n-1} v_{n-1}]^2}.$$

Formulis (3.) et variabiles $v_1, v_2 \dots v_{n-1}$ per $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{n-1}$ et hae per illas exprimuntur.

Porro, si etiam λ designat numeros $1, 2 \dots n-1$, loco $a_{x,\lambda}$, $a_{x,n}$, $a_{n,n}$ scribatur $-a_{x,\lambda}$, $i a_x$, a. Quo facto, si ponitur in problemate antecedente:

$$W = \frac{V}{x_n x_n} = a_{n,n} + \frac{2a_{1,n} x_1 + 2a_{2,n} x_2 \dots + 2a_{n-1,n} x_{n-1}}{x_n} + \frac{\sum\limits_{x,\lambda} a_{x,\lambda} x_x x_\lambda}{x_n x_n}$$
$$= \frac{G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 + \dots + G_n y_n y_n}{[\alpha'_n y_1 + \alpha''_n y_2 + \dots + \alpha^{(n)}_n y_n]^2}$$

hic habetur, ubi insuper loco G_n scribitur G,

$$5.\quad W = a + 2a_1 \xi_1 + 2a_2 \xi_2 + \dots + 2a_{n-1} \xi_{n-1} + \sum_{x,\lambda} a_{x,\lambda} \xi_x \xi_\lambda$$
$$= \frac{G - G_1 v_1 v_1 - G_2 v_2 v_2 - \dots - G_{n-1} v_{n-1} v_{n-1}}{[\alpha - \alpha' y_1 - \alpha'' y_2 - \dots - \alpha^{(n)} y_n]^2}.$$

Functionem W videmus esse expressionem secundi ordinis variabilium ξ_1, $\xi_2 \dots \xi_{n-1}$ maxime generalem, quippe quae nec terminis linearibus caret.

Per mutationes indicatas expressio

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n},$$

abit in hanc

$$(-1)^{n-1} \Sigma \pm a\, a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n-1,n-1}\ ^*);$$

de qua prodit Γ, si loco a, $a'_{1,1}$, $a''_{2,2}$, $\dots$, $a_{n-1,n-1}$ ponitur:

$$a - x,\quad a_{1,1} + x,\quad a_{2,2} + x \quad \dots \quad a_{n-1,n-1} + x.$$

---

*) In hac expressione formanda loco a scriptum putes $a_{0,0}$ atque indicem 0 spectes tamquam n^{ium} indicem.

Quibus statutis, e §. 8. fit

$$6.\quad \Gamma = (G-x)(G_1-x)(G_2-x)\ldots(G_{n-1}-x),$$

sive determinantur G, $G_1 \ldots G_{n-1}$ ut radices aequationis

$$\Gamma = 0.$$

Deinde e formulis (40.), (41.) §. 10. determinantur coëfficientium $\alpha^{(m)}$, $\alpha_1^{(m)} \ldots \alpha_{n-1}^{(m)}$ quadrata et producta binorum per formulas sequentes, in quibus m designat numeros $1, 2 \ldots n-1$:

$$7.\quad \begin{cases} 2\alpha_x^{(m)}\alpha_\lambda^{(m)} = -\dfrac{\partial G_m}{\partial a_{x,\lambda}}, & \alpha_x^{(m)}\alpha_x^{(m)} = -\dfrac{\partial G_m}{\partial a_{x,x}}, \\ 2\alpha^{(m)}\alpha_x^{(m)} = -\dfrac{\partial G_m}{\partial a_x}, & \alpha^{(m)}\alpha^{(m)} = -\dfrac{\partial G_m}{\partial a}, \\ 2\alpha_x\,\alpha_\lambda = +\dfrac{\partial G}{\partial a_{x,\lambda}}, & \alpha_x\,\alpha_x = +\dfrac{\partial G}{\partial a_{x,x}}, \\ \alpha\alpha = \dfrac{\partial G}{\partial a}. \end{cases}$$

De formula (17.) §. 7. sequitur, per easdem substitutiones (3.), obtineri etiam:

$$8.\quad \begin{cases} W_1 = [a + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_{n-1}\xi_{n-1}]^2 \\ \quad - [a_1 + a_{1,1}\xi_1 + a_{1,2}\xi_2 + \ldots + a_{1,n-1}\xi_{n-1}]^2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad - [a_{n-1} + a_{n-1,1}\xi_1 + a_{n-1,2}\xi_2 + \ldots + a_{n-1,n-1}\xi_{n-1}]^2 \\ \quad = \dfrac{GG - G_1G_1\gamma_1\gamma_1 - G_2G_2\gamma_2\gamma_2 \ldots - G_{n-1}G_{n-1}\gamma_{n-1}\gamma_{n-1}}{[\alpha - \alpha'\gamma_1 - \alpha''\gamma_2 \ldots - \alpha^{(n-1)}\gamma_{n-1}]^2}. \end{cases}$$

Statuamus porro, in formulis problematis antecedentis loco $b_{x,\lambda}$, $b_{x,n}$, $b_{n,n}$ scribi $-b_{x,\lambda}$, $-ib_x$, b. Quo facto observo, ex aequationibus linearibus:

$$\begin{aligned} a\,u + a_1u_1 + \ldots + a_{n-1}u_{n-1} &= w, \\ a_1u + a_{1,1}u_1 + \ldots + a_{1,n-1}u_{n-1} &= w_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}u + a_{n-1,1}u_1 + \ldots + a_{n-1,n-1}u_{n-1} &= w_{n-1}, \end{aligned}$$

sequi vice versa:

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1}u\,\Sigma \pm a a_1' \ldots a_{n-1}^{(n-1)} &= b\,w + b_1w_1 + \ldots + b_{n-1}w_{n-1}, \\ (-1)^{n-1}u_1\Sigma \pm a a_1' \ldots a_{n-1}^{(n-1)} &= b_1w + b_{1,1}w_1 + \ldots + b_{1,n-1}w_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^{n-1}u_{n-1}\Sigma \pm a a_1' \ldots a_{n-1}^{(n-1)} &= b_{n-1}w + b_{n-1,1}w_1 + \ldots + b_{n-1,n-1}w_{n-1}. \end{aligned}$$

Hinc e formula (22.) §. 7. obtinemus:

$$9.\quad W_2 = b - 2b_1\xi_1 - 2b_2\xi_2 \ldots - 2b_{n-1}\xi_{n-1} + \sum_{x,\lambda} b_{x,\lambda}\xi_x\xi_\lambda$$

$$= (-1)^{n-1}G_1G_2\ldots G_{n-1}\cdot\frac{1 - \dfrac{Gv_1v_1}{G_1} - \dfrac{Gv_2v_2}{G_2} \ldots - \dfrac{Gv_{n-1}v_{n-1}}{G_{n-1}}}{[\alpha - \alpha'v_1 - \alpha''v_2 \ldots - \alpha^{(n-1)}v_{n-1}]^2}.$$

18.

Relationes inter coëfficientes propositos, quae de formulis §§. 4. 5. traditis derivantur, hae sunt:

$$
10.\quad \begin{cases}
\alpha\alpha - \alpha'\alpha' - \alpha''\alpha'' \ldots\ldots - \alpha^{(n-1)}\alpha^{(n-1)} = +1, \\
\alpha_x\alpha_x - \alpha'_x\alpha'_x - \alpha''_x\alpha''_x \ldots\ldots - \alpha^{(n-1)}_x\alpha^{(n-1)}_x = -1, \\
\alpha\alpha_x - \alpha'\alpha'_x - \alpha''\alpha''_x \ldots\ldots - \alpha^{(n-1)}\alpha^{(n-1)}_x = 0, \\
\alpha_x\alpha_\lambda - \alpha'_x\alpha'_\lambda - \alpha''_x\alpha''_\lambda \ldots\ldots - \alpha^{(n-1)}_x\alpha^{(n-1)}_\lambda = 0,
\end{cases}
$$

porro:

$$
11.\quad \begin{cases}
\alpha\alpha - \alpha_1\alpha_1 - \alpha_2\alpha_2 - \ldots\ldots - \alpha_{n-1}\alpha_{n-1} = +1, \\
\alpha^{(x)}\alpha^{(x)} - \alpha^{(x)}_1\alpha^{(x)}_1 - \alpha^{(x)}_2\alpha^{(x)}_2 - \ldots\ldots - \alpha^{(x)}_{n-1}\alpha^{(x)}_{n-1} = -1, \\
\alpha\alpha^{(x)} - \alpha_1\alpha^{(x)}_1 - \alpha_2\alpha^{(x)}_2 - \ldots\ldots - \alpha_{n-1}\alpha^{(x)}_{n-1} = 0, \\
\alpha^{(x)}\alpha^{(\lambda)} - \alpha^{(x)}_1\alpha^{(\lambda)}_1 - \alpha^{(x)}_2\alpha^{(\lambda)}_2 - \ldots\ldots - \alpha^{(x)}_{n-1}\alpha^{(\lambda)}_{n-1} = 0.
\end{cases}
$$

Sit porro

$$(-1)^{n-1}\Sigma \pm \alpha\alpha'_1\alpha''_2 \ldots\ldots \alpha^{(n-1)}_{n-1} = A,$$

invenitur

$$12.\quad A = \pm 1,$$

ac generaliter

$$13.\quad A\Sigma \pm \alpha\alpha'_1 \ldots\ldots \alpha^{(m-1)}_{m-1} = \pm\Sigma \pm \alpha^{(m)}_m\alpha^{(m+1)}_{m+1} \ldots\ldots \alpha^{(n-1)}_{n-1}.$$

In qua formula si loco α, $\alpha^{(x)}$, α_x scriptum putas $\alpha^{(0)}_0$, $\alpha^{(x)}_0$, $\alpha^{(0)}_x$, permutando omnibus modis indices 0, 1, 2 .... $n-1$ et pro m ponendo varios valores, permultas alias formulas obtines. In quibus signum anceps $\pm$, signo summatorio praefixum, fit $+$, si termini alterius summae solis coëfficientibus $\alpha^{(x)}_\lambda$ constant, fit illud $-$, si in terminis alterius summae invenitur coëfficiens huiusmodi $\alpha^{(x)}_0$, in terminis alterius coëfficiens $\alpha^{(0)}_x$; ipsis x, λ semper designantibus numeros 1, 2 .... $n-1$.

Addimus, e relationibus appositis sequi, quoties dentur aequationes lineares:

$$
\begin{aligned}
u &= \alpha w - \alpha' w_1 - \alpha'' w_2 - \ldots\ldots - \alpha^{(n-1)} w_{n-1}, \\
u_1 &= \alpha_1 w_1 - \alpha'_1 w_1 - \alpha''_1 w_2 - \ldots\ldots - \alpha^{(n-1)}_1 w_{n-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_{n-1} &= \alpha_{n-1} w_1 - \alpha'_{n-1} w_1 - \alpha''_{n-1} w_2 - \ldots\ldots - \alpha^{(n-1)}_{n-1} w_{n-1},
\end{aligned}
$$

fieri vice versa:

$$
\begin{aligned}
w &= \alpha u - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 - \ldots\ldots - \alpha_{n-1} u_{n-1}, \\
w_1 &= \alpha' u - \alpha'_1 u_1 - \alpha'_2 u_2 - \ldots\ldots - \alpha'_{n-1} u_{n-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
w_{n-1} &= \alpha^{(n-1)} u - \alpha^{(n-1)}_1 u_1 - \alpha^{(n-1)}_2 u_2 - \ldots\ldots - \alpha^{(n-1)}_{n-1} u_{n-1},
\end{aligned}
$$

simulque esse

$$uu - u_1u_1 - u_2u_2 \ldots\ldots - u_{n-1}u_{n-1} = ww - w_1w_1 - w_2w_2 \ldots\ldots - w_{n-1}w_{n-1}.$$

[illegible]

Substitutionem propositam jam transformandis integralibus adhibeamus. [illegible] $\xi, \xi_1 \dots \xi_{n-1}$ atque $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ ut variabiles independentes, de quibus respective ξ_{n-1}, x_{n-1} per (2) pendent. Ac primum ponitur

$$\partial\xi\,\partial\xi_1 \dots \partial\xi_{n-1} = M\,\partial x_1\,\partial x_2 \dots \partial x_{n-1},$$

quaeramus valorem ipsius M. In exemplis, quae [illegible], casibus $n=3$, $n=4$ in commentationibus citatis inveni:

$$M = \frac{1}{a - a' x_1 - a'' x_2} \cdot \frac{\xi_2}{x_2},$$

$$M = \frac{1}{a - a' x_1 - a'' x_2 - a''' x_3} \cdot \frac{\xi_3}{x_3},$$

[illegible] generali

$$M = \frac{1}{a - a' x_1 - a'' x_2 \dots - a^{(n-1)} x_{n-1}} \cdot \frac{\xi_{n-1}}{x_{n-1}}.$$

[illegible]

Sint $\xi, \xi_1 \dots \xi_{n-1}$ [illegible] variabilium $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$, habetur:

$$\partial\xi\,\partial\xi_1 \dots \partial\xi_{n-1} = \Sigma \pm \frac{\partial\xi}{\partial x_1}\,\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2} \dots \frac{\partial\xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\,\partial x_1\,\partial x_2 \dots \partial x_{n-1},$$

[illegible]

$$F(\xi, \xi_1 \dots \xi_{n-1}) = 0,$$

[illegible] ξ_{n-1} [illegible] variabilium $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$. [illegible]

$$\Sigma \pm \frac{\partial\xi}{\partial x}\,\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial\xi_{n-2}}{\partial x_{n-2}},$$

[illegible] $\frac{\partial\xi_k}{\partial x_k}$ [illegible]

$$\frac{\partial\xi_k}{\partial x_k} - \frac{\partial\xi_k}{\partial\xi_{n-1}} \cdot \frac{\partial\xi_{n-1}}{\partial x_k} = \frac{\partial\xi_k}{\partial x_k} - \frac{\partial\xi_k}{\partial\xi_{n-1}} \cdot \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}}{\frac{\partial F}{\partial\xi_{n-1}}}$$

[illegible]

$$\frac{\partial F}{\partial v_x} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial v_x} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial v_x} \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}} \cdot \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial v_x}.$$

Qua facta substitutione, expressio illa abit in hanc,

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}}}{\frac{\partial F}{\partial v_{n-1}}} \Sigma \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial v_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial v_2} \cdots \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial v_{n-1}};$$

sive habetur

Theorema 1.

Datis ξ_1, $\xi_2 \ldots \xi_{n-1}$ ut functionibus ipsarum v_1, $v_2 \ldots v_{n-1}$, si inter variabiles illas datur aequatio

$$F(\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_{n-1}) = 0,$$

erit,

$$\frac{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \ldots \partial \xi_{n-2}}{\frac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}}} = \left(\Sigma \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial v_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial v_2} \cdots \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial v_{n-1}}\right) \cdot \frac{\partial v_1 \partial v_2 \ldots \partial v_{n-2}}{\frac{\partial F}{\partial v_{n-1}}}.$$

Addo, propositis inter variabiles duabus aequationibus, haberi theorema simile:

Theorema 2.

Datis ξ_1, $\xi_2 \ldots \xi_n$ ut functionibus ipsarum v_1, $v_2 \ldots v_n$, si inter variabiles illas proponuntur duae aequationes:

$$F(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) = 0, \quad \Phi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) = 0,$$

erit:

$$\frac{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \ldots \partial \xi_{n-2}}{\frac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_n} - \frac{\partial F}{\partial \xi_n} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{n-1}}} = \left(\Sigma \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial v_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial v_2} \cdots \frac{\partial \xi_n}{\partial v_n}\right) \frac{\partial v_1 \partial v_2 \ldots \partial v_{n-2}}{\frac{\partial F}{\partial v_{n-1}} \frac{\partial \Phi}{\partial v_n} - \frac{\partial F}{\partial v_n} \frac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}}}.$$

Et facile patet, quomodo haec ulterius continuentur.

Fingamus, in theoremate 1. loco $n-1$ variabilium ξ_1, $\xi_2 \ldots \xi_{n-1}$ poni n variabiles x_1, $x_2 \ldots x_n$, loco $n-1$ variabilium v_1, $v_2 \ldots v_{n-1}$ n variabiles y_1, $y_2 \ldots y_n$. Sint porro inter utrasque variabiles datae aequationes in Problemate I. propositae. Quibus statutis fit e theoremate illo, advocata (7.) §. 5.:

$$\frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}} = (\Sigma \pm \alpha'_1 \alpha''_2 \ldots \alpha^{(n)}_n) \frac{\partial y_1 \partial y_2 \ldots \partial y_{n-1}}{\frac{\partial F}{\partial y_n}} = \frac{\partial y_1 \partial y_2 \ldots \partial y_{n-1}}{\frac{\partial F}{\partial y_n}}.$$

Sit

$$F = x_1 x_1 + x_2 x_2 \ldots + x_n x_n - 1 = y_1 y_1 + y_2 y_2 \ldots + y_n y_n - 1,$$

unde

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = 2x_n, \quad \frac{\partial F}{\partial y_n} = 2y_n,$$

habetur theorema sequens:

19.

Substitutionem propositam iam transformandis integralibus adhibeamus. Eum in finem consideremus $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_{n-2}$ atque $v_1, v_2 \ldots\ldots v_{n-2}$ ut variabiles independentes, de quibus respective ξ_{n-1}, v_{n-1} per (2.) pendeant. Ac primum posito

$$\partial\xi_1\,\partial\xi_2\ldots\ldots\partial\xi_{n-1} = M.\partial v_1\,\partial v_2\ldots\ldots\partial v_{n-2},$$

quaeramus valorem ipsius M. In exemplis, quae olim tractavi, casibus $n=3$, $n=4$, in commentationibus citatis inveni:

$$M = \frac{1}{\alpha-\alpha' v_1-\alpha'' v_2}\cdot\frac{\xi_2}{v_2},$$

$$M = \frac{1}{[\alpha-\alpha' v_1-\alpha'' v_2-\alpha''' v_3]^2}\cdot\frac{\xi_3}{v_3},$$

unde facile coniicis, fore casu nostro generali,

$$M = \frac{1}{[\alpha-\alpha' v_1-\alpha'' v_2\ldots\ldots-\alpha^{(n-1)} v_{n-1}]^{n-2}}\cdot\frac{\xi_{n-1}}{v_{n-1}}.$$

At demonstratio ea generalitate non ita facilis est. Cuius in gratiam theoremata quaedam generalia antemittam, quorum demonstrationem brevitatis causa supprimo.

Sint $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_{n-2}$ datae functiones quaelibet variabilium $v_1, v_2 \ldots\ldots$ $\ldots\ldots v_{n-2}$, habetur:

$$\partial\xi_1\,\partial\xi_2\ldots\ldots\partial\xi_{n-2} = \left(\Sigma \pm \frac{\partial\xi_1}{\partial v_1}\,\frac{\partial\xi_2}{\partial v_2}\ldots\ldots\frac{\partial\xi_{n-2}}{\partial v_{n-2}}\right)\partial v_1\,\partial v_2\ldots\ldots\partial v_{n-2},$$

in summa assignata omnimodis permutatis functionum ξ indicibus, ac singulis terminis praefixis signis per notam regulam alternantibus. Quam notationem expressionibus similibus in sequentibus sine ulteriore explicatione adhibebo. Spectemus iam $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_{n-2}$ ut functiones variabilium $v_1, v_2 \ldots\ldots v_{n-1}$, ubi nova variabilis v_{n-1} a reliquis pendet per aequationem

$$F(\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_{n-1}) = 0,$$

designante ξ_{n-1} et ipsa novam functionem datam variabilium $v_1, v_2 \ldots\ldots v_{n-1}$. Hinc in expressione

$$\Sigma \pm \frac{\partial\xi_1}{\partial v_1}\,\frac{\partial\xi_2}{\partial v_2}\ldots\ldots\frac{\partial\xi_{n-2}}{\partial v_{n-2}},$$

loco $\frac{\partial\xi_m}{\partial v_x}$ ponendum est:

$$\frac{\partial\xi_m}{\partial v_x} + \frac{\partial\xi_m}{\partial v_{n-1}}\cdot\frac{\partial v_{n-1}}{\partial v_x} = \frac{\partial\xi_m}{\partial v_x} - \frac{\partial\xi_m}{\partial v_{n-1}}\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial v_x}}{\frac{\partial F}{\partial v_{n-1}}},$$

ubi habetur:

$$\frac{\partial F}{\partial v_x} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial v_x} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial v_x} \dots + \frac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}} \cdot \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial v_x}.$$

Qua facta substitutione, expressio illa abit in hanc,

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}}}{\dfrac{\partial F}{\partial v_{n-1}}} \Sigma \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial v_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial v_{n-1}};$$

sive habetur

Theorema 1.

Datis $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{n-1}$ *ut functionibus ipsarum* $v_1, v_2 \dots v_{n-1}$, *si inter variabiles illas datur aequatio*

$$F(\xi_1, \xi_2 \dots, \xi_{n-1}) = 0,$$

erit,

$$\frac{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \dots \partial \xi_{n-2}}{\dfrac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}}} = \left(\Sigma \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial v_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial v_{n-1}}\right) \cdot \frac{\partial v_1 \partial v_2 \dots \partial v_{n-2}}{\dfrac{\partial F}{\partial v_{n-1}}}.$$

Addo, propositis inter variabiles duabus aequationibus, haberi theorema simile:

Theorema 2.

Datis $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ *ut functionibus ipsarum* $v_1, v_2 \dots v_n$, *si inter variabiles illas proponuntur duae aequationes:*

$$F(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n) = 0, \quad \Phi(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n) = 0,$$

erit:

$$\frac{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \dots \partial \xi_{n-2}}{\dfrac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_n} - \dfrac{\partial F}{\partial \xi_n} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_{n-1}}} = \left(\Sigma \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial v_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial \xi_n}{\partial v_n}\right) \frac{\partial v_1 \partial v_2 \dots \partial v_{n-2}}{\dfrac{\partial F}{\partial v_{n-1}} \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_n} - \dfrac{\partial F}{\partial v_n} \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}}}.$$

Et facile patet, quomodo haec ulterius continuentur.

Fingamus, in theoremate 1. loco $n-1$ variabilium $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{n-1}$ poni n variabiles $x_1, x_2 \dots x_n$, loco $n-1$ variabilium $v_1, v_2 \dots v_{n-1}$ n variabiles $y_1, y_2 \dots y_n$. Sint porro inter utrasque variabiles datae aequationes in Problemate I. propositae. Quibus statutis fit e theoremate illo, advocata (7.) §. 5.:

$$\frac{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}}{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}} = (\Sigma \pm \alpha'_1 \alpha''_2 \dots \alpha^{(n)}_n) \frac{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_{n-1}}{\dfrac{\partial F}{\partial y_n}} = \frac{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_{n-1}}{\dfrac{\partial F}{\partial y_n}}.$$

Sit

$$F = x_1 x_1 + x_2 x_2 \dots + x_n x_n - 1 = y_1 y_1 + y_2 y_2 \dots + y_n y_n - 1,$$

unde

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = 2 x_n, \quad \frac{\partial F}{\partial y_n} = 2 y_n,$$

habetur theorema sequens:

Theorema 3.

Quoties fit per substitutiones lineares, inter variabiles $x_1, x_2 \dots$ $\dots x_n$ atque $y_1, y_2 \dots y_n$ propositas:

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 \dots + x_n x_n = y_1 y_1 + y_2 y_2 \dots + y_n y_n,$$

simulque inter variabiles illas datur aequatio

$$1 = x_1 x_1 + x_2 x_2 \dots + x_n x_n = y_1 y_1 + y_2 y_2 \dots + y_n y_n,$$

fit:

$$\frac{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}}{x_n} = \frac{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_{n-1}}{y_n}.$$

Quo infra utemur theoremate.

20.

His theoremata addi debent sequentia.

Theorema 4.

Supponamus, $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{n-1}$ datas esse sub forma fractionum

$$\xi_1 = \frac{u_1}{u}, \quad \xi_2 = \frac{u_2}{u}, \quad \dots \quad \xi_{n-1} = \frac{u_{n-1}}{u},$$

fit:

$$\Sigma \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial v_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial v_{n-1}} = \frac{1}{u^n} . \Sigma \pm u \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \frac{\partial u_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial v_{n-1}},$$

ubi in altera summa inter indices permutandos etiam referri debet index 0 *seu index deficiens.*

Si in theoremate antecedente functiones $u, u_1, u_2 \dots u_{n-1}$ per eandem functionem t dividuntur, valores ipsarum $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{n-1}$ inde non mutantur, neque igitur valor expressionis

$$\Sigma \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial v_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial v_{n-1}} = \frac{1}{u^n} . \Sigma \pm u \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \frac{\partial u_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial v_{n-1}}.$$

Unde deducis

Theorema 5.

Si loco functionum $u, u_1, u_2, \dots u_{n-1}$ ponitur $\frac{u}{t}, \frac{u_1}{t}, \frac{u_2}{t}, \dots \frac{u_{n-1}}{t}$, designante t aliam functionem quamlibet, expressio

$$\Sigma \pm u \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \frac{\partial u_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial v_{n-1}}$$

abit in

$$\frac{1}{t^n} \Sigma \pm u \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \frac{\partial u_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial v_{n-1}},$$

sive in differentiationibus instituendis denominatorem communem t ut constantem considerare licet.

Theorema 5. iam olim casu $n = 3$ demonstravi (*Comm. III. de integr. dupl. Vol. X.*) Theoremate generali infra utemur. Postremo hoc unum addam.

Theorema 6.

Sint $u, u_1, u_2 \dots u_{n-1}$ expressiones lineares aliarum functionum $w, w_1, w_2 \dots w_{n-1}$, datae per aequationes huiusmodi:

$$u_\varkappa = \alpha_\varkappa w + \alpha'_\varkappa w_1 + \alpha''_\varkappa w_2 + \dots + \alpha^{(n-1)}_\varkappa w_{n-1},$$

fit:

$$\Sigma \pm u \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \frac{\partial u_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial v_{n-1}} = (\Sigma \pm \alpha \alpha'_1 \alpha''_2 \dots \alpha^{(n-1)}_{n-1}) \left(\Sigma \pm w \frac{\partial w_1}{\partial v_1} \frac{\partial w_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial w_{n-1}}{\partial v_{n-1}}\right).$$

Observo, si functiones propositae essent n variabilium $v, v_1, v_2 \dots v_{n-1}$, haberi similiter:

$$\Sigma \pm \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \dots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial v_{n-1}} = (\Sigma \pm \alpha \alpha'_1 \alpha''_2 \dots \alpha^{(n-1)}_{n-1}) \left(\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial w_1}{\partial v_1} \dots \frac{\partial w_{n-1}}{\partial v_{n-1}}\right).$$

21.

Applicemus iam theoremata antecedentia ad substitutionem supra propositam:

$$\xi_\varkappa = \frac{\alpha_\varkappa - \alpha'_\varkappa v_1 - \alpha''_\varkappa v_2 - \dots - \alpha^{(n-1)}_\varkappa v_{n-1}}{\alpha - \alpha' v_1 - \alpha'' v_2 - \dots - \alpha^{(n-1)} v_{n-1}};$$

in qua supponamus:

$$\xi_1 \xi_1 + \xi_2 \xi_2 + \dots + \xi_{n-1} \xi_{n-1} = 1,$$

unde e formula §. 17. tradita,

$$\xi_1\xi_1 + \xi_2\xi_2 \dots + \xi_{n-1}\xi_{n-1} - 1 = \frac{v_1 v_1 + v_2 v_2 \dots + v_{n-1} v_{n-1} - 1}{[\alpha - \alpha' v_1 - \alpha'' v_2 \dots - \alpha^{(n-1)} v_{n-1}]^2},$$

fit etiam:

$$v_1 v_1 + v_2 v_2 \dots + v_{n-1} v_{n-1} = 1.$$

Statuamus igitur:

$$F = \xi_1\xi_1 + \xi_2\xi_2 \dots + \xi_{n-1}\xi_{n-1} - 1 = \frac{v_1 v_1 + v_2 v_2 \dots + v_{n-1} v_{n-1} - 1}{[\alpha - \alpha' v_1 - \alpha'' v_2 \dots - \alpha^{(n-1)} v_{n-1}]^2},$$

unde

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}} = 2\xi_{n-1}, \qquad \frac{\partial F}{\partial v_{n-1}} = \frac{2 v_{n-1}}{[\alpha - \alpha' v_1 - \alpha'' v_2 \dots - \alpha^{(n-1)} v_{n-1}]^2}.$$

Hinc nanciscimur e **theor. 1.**:

$$\frac{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \dots \partial \xi_{n-2}}{\xi_{n-1}} = \left(\Sigma \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial v_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial v_{n-1}}\right) \frac{u^2 \partial v_1 \partial v_2 \dots \partial v_{n-2}}{v_{n-1}},$$

siquidem ponitur:

$$u = \alpha - \alpha' v_1 - \alpha'' v_2 \dots - \alpha^{(n-1)} v_{n-1}.$$

Sit generaliter:

$$u_\varkappa = \alpha_\varkappa - \alpha'_\varkappa v_1 - \alpha''_\varkappa v_2 \dots - \alpha^{(n-1)}_\varkappa v_{n-1},$$

ideoque

$$\xi_\varkappa = \frac{u_\varkappa}{u};$$

habetur e **theor. 4.**:

$$\frac{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \dots \partial \xi_{n-2}}{\xi_{n-1}} = \left(\Sigma \pm u \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \frac{\partial u_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial v_{n-1}}\right) \frac{\partial v_1 \partial v_2 \dots \partial v_{n-2}}{u^{n-2} v_{n-1}}.$$

Jam si in theor. 5. ponimus:

$$w = 1,\; w_1 = -v_1,\; w_2 = -v_2,\; \ldots\; w_{n-1} = -v_{n-1},$$

fit

$$\Sigma \pm w \frac{\partial w_1}{\partial v_1} \frac{\partial w_2}{\partial v_2} \cdots \frac{\partial w_{n-1}}{\partial v_{n-1}} = (-1)^{n-1},$$

unde e theor. illo, advocata (12.), prodit:

$$\Sigma \pm x \frac{\partial x_1}{\partial v_1} \frac{\partial x_2}{\partial v_2} \cdots \frac{\partial x_{n-1}}{\partial v_{n-1}} = (-1)^{n-1} \Sigma \pm \alpha \alpha'_1 \alpha''_2 \ldots \alpha^{(n-1)}_{n-1} = 1.$$

Hinc habetur formula, quam demonstrandam proposuimus

$$\frac{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \ldots \partial \xi_{n-2}}{\xi_{n-1}} = \frac{\partial v_1 \partial v_2 \ldots \partial v_{n-2}}{x^{n-2} v_{n-1}}.$$

Cujus ope habetur e (5.), (8.), (9.), §. 12.:

$$\int^{n-2} \frac{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \ldots \partial \xi_{n-2}}{\xi_{n-1} W^{\frac{n-2}{2}}} = \int^{n-2} \frac{\partial v_1 \partial v_2 \ldots \partial v_{n-2}}{v_{n-1}[G - G_1 v_1 v_1 - G_2 v_2 v_2 \ldots - G_{n-1} v_{n-1} v_{n-1}]^{\frac{n-2}{2}}},$$

$$\int^{n-2} \frac{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \ldots \partial \xi_{n-2}}{\xi_{n-1} W_1^{\frac{n-2}{2}}} = \int^{n-2} \frac{\partial v_1 \partial v_2 \ldots \partial v_{n-2}}{v_{n-1}[G^2 - G_1^2 v_1 v_1 - G_2^2 v_2 v_2 \ldots - G_{n-1}^2 v_{n-1} v_{n-1}]^{\frac{n-2}{2}}},$$

$$\int^{n-2} \frac{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \ldots \partial \xi_{n-2}}{\xi_{n-1} . W_2^{\frac{n-2}{2}}} =$$

$$\frac{1}{[G G_1 G_2 \ldots G_{n-1}]^{\frac{n-2}{2}}} \int^{n-2} \frac{\partial v_1 \partial v_2 \ldots \partial v_{n-2}}{v_{n-1}\left[\frac{1}{G} - \frac{v_1 v_1}{G_1} - \frac{v_2 v_2}{G_2} \cdots - \frac{v_{n-1} v_{n-1}}{G_{n-1}}\right]^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Quarum formularum prima est transformatio proposita.

22.

Addam pauca, quae ad naturam substitutionis propositae melius perspiciendam facere possunt. Introducamus enim loco variabilium $\xi_1, \xi_2 \ldots \ldots, \xi_{n-1}$ alias $x, x_1, x_2, \ldots x_{n-2}$, quae ab illis pendeant per aequationes lineares hujusmodi:

$$x_m = c_1^{(m)} \xi_1 + c_2^{(m)} \xi_2 + \ldots + c_{n-1}^{(m)} \xi_{n-1},$$

statutis inter coëfficientes $c_x^{(m)}$ relationibus talibus, ut fiat:

$$xx + x_1 x_1 + \ldots + x_{n-2} x_{n-2} = \xi_1 \xi_1 + \xi_2 \xi_2 + \ldots + \xi_{n-1} \xi_{n-1} = 1,$$

quas relationes e problemate primo ut notas supponemus.

Sit porro:

$$\alpha_1 = M c_1,\; \alpha_2 = M c_2 \;\ldots,\; \alpha_{n-1} = M c_{n-1},$$

ubi poni debet:

$$M M = \alpha_1 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} \alpha_{n-1} = \alpha\alpha - 1;$$

unde fit:

$$\alpha - \alpha_1 \xi_1 - \alpha_2 \xi_2 \ldots - \alpha_{n-1} \alpha_{n-1} = \alpha - M x.$$

E formula,

$$\xi_p = \frac{\alpha_p - \alpha'_p v_1 - \alpha''_p v_2 \ldots . - \alpha_p^{(n-1)} v_{n-1}}{\alpha - \alpha' v_1 - \alpha'' v_2 \ldots . - \alpha^{(n-1)} v_{n-1}},$$

statuto:

$$C_m^{(x)} = c_1^{(m)} \alpha_1^{(x)} + c_2^{(m)} \alpha_2^{(x)} \ldots . + c_{n-1}^{(m)} \alpha_{n-1}^{(x)},$$

sequitur:

$$x_m = \frac{C_m - C'_m v_1 - C''_m v_2 \ldots . - C_m^{(n-1)} v_{n-1}}{\alpha - \alpha' v_1 - \alpha'' v_2 \ldots . - \alpha^{(n-1)} v_{n-1}}.$$

Fit autem:

$$C = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \ldots . + c_{n-1} \alpha_{n-1} = M(c_1 c_1 + c_2 c_2 + \ldots . + c_{n-1} c_{n-1}),$$

sive

$$C = M;$$

porro si x non $= 0$,

$$C^{(x)} = c_1 \alpha_1^{(x)} + c_2 \alpha_2^{(x)} + \ldots . + c_{n-1} \alpha_{n-1}^{(x)} = \frac{1}{M} (\alpha_1 \alpha_1^{(x)} + \alpha_2 \alpha_2^{(x)} + \ldots . + \alpha_{n-1} \alpha_{n-1}^{(x)}),$$

sive e (11.):

$$C^{(x)} = \frac{\alpha \alpha^{(x)}}{M};$$

porro si m non $= 0$,

$$\begin{aligned} C_m &= c_1^{(m)} \alpha_1 + c_2^{(m)} \alpha_2 + \ldots . + c_{n-1}^{(m)} \alpha_{n-1} \\ &= M [c_1^{(m)} c_1 + c_2^{(m)} c_2 + \ldots . + c_{n-1}^{(m)} c_{n-1}], \end{aligned}$$

sive

$$C_m = 0.$$

Hinc fit

$$C - C' v_1 - C'' v_2 \ldots . - C^{(n-1)} v_{n-1} = \frac{\alpha}{M} \left[\frac{MM}{\alpha} - \alpha' v_1 - \alpha'' v_2 \ldots . - \alpha^{(n-1)} v_{n-1} \right],$$

ideoque

$$x = \frac{\alpha}{M} \cdot \frac{\frac{MM}{\alpha} - \alpha' v_1 - \alpha'' v_2 \ldots . - \alpha^{(n-1)} v_{n-1}}{\alpha - \alpha' v_1 - \alpha'' v_2 \ldots . - \alpha^{(n-1)} v_{n-1}},$$

sive

$$1 + x = \frac{\alpha + M}{M} \cdot \frac{M - \alpha' v_1 - \alpha'' v_2 \ldots . - \alpha^{(n-1)} v_{n-1}}{\alpha - \alpha' v_1 - \alpha'' v_2 \ldots . - \alpha^{(n-1)} v_{n-1}}.$$

Introducamus etiam in locum variabilium v_1, v_2, ... v_{n-1} variabiles novas y, y_1, y_2 .... y_{n-2}, quae ab iis pendeant per aequationes huiusmodi:

$$-y_m = C'_m v_1 + C''_m v_2 + \ldots . + C_m^{(n-1)} v_{n-1},$$

in quibus loco m ponendum 1, 2 .... $n-2$; quibus pro $m = 0$ addenda aequatio:

$$-y = \frac{1}{M} [\alpha' v_1 + \alpha'' v_2 + \ldots . + \alpha^{(n-1)} v_{n-1}].$$

His statutis, fit

$$x = \frac{M + \alpha y}{\alpha + M y} \text{ sive } 1 + x = (\alpha + M) \frac{1 + y}{\alpha + M y};$$

porro, si m designat numeros 1, 2, ... $n-2$, cum sit $C_m = 0$:

$$x_m = \frac{y_m}{\alpha + M y},$$

ideoque

$$\frac{x_m}{1+x} = \frac{1}{\alpha+M}\cdot\frac{y_m}{1+y}.$$

Fit porro:

$$1 = xx + x_1 x_1 + \dots + x_{n-2} x_{n-2} = \frac{(M+\alpha y)^2 + y_1 y_1 + \dots + y_{n-2} y_{n-2}}{(\alpha+My)^2},$$

ideoque cum sit $\alpha\alpha - MM = 1$,

$$0 = 1 - yy - y_1 y_1 \dots - y_{n-2} y_{n-2}.$$

Variabiles $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{n-1}$ et variabiles $v_1, v_2 \dots v_{n-1}$, quae aequationibus satisfaciunt

$$\xi_1\xi_1 + \xi_2\xi_2 + \dots + \xi_{n-1}\xi_{n-1} = 1,$$
$$v_1 v_1 + v_2 v_2 + \dots + v_{n-1} v_{n-1} = 1,$$

substitutionibus propositis exhibebantur aliae per alias ope *fractionum linearium*, si ita vocare licet fractiones, quae denominatore et numeratore linearibus gaudent. Jam si in locum variabilium illarum per substitutiones lineares *integras* aliae introducuntur $x, x_1 \dots x_{n-2}$ et $y, y_1 \dots y_{n-2}$, quae et ipsae satisfaciant aequationibus:

$$xx + x_1 x_1 + \dots + x_{n-2} x_{n-2} = 1,$$
$$yy + y_1 y_1 + \dots + y_{n-2} y_{n-2} = 1,$$

demonstratum est antecedentibus, substitutiones illas semper tales statui posse, ut relationes, quibus variabiles novae aliae per alias determinantur, hanc induant formam simplicem et elegantem:

$$\frac{x_1}{1+x} = \mu\cdot\frac{y_1}{1+y}, \quad \frac{x_2}{1+x} = \mu\cdot\frac{y_2}{1+y}, \quad \dots \quad \frac{x_{n-2}}{1+x} = \mu\cdot\frac{y_{n-2}}{1+y};$$

designante $\mu = \frac{1}{\alpha+M}$ factorem constantem. Idem casu $n = 4$ in commentatione citata (Vol. VIII.) demonstratum invenis. Casu $n = 3$, formulam similem dedit Cl. Gauſs in comm. *determinatio attract.*

23.

Adhibitis substitutionibus, de quibus problemate *primo* actum est, functioni W formam conciliare licet simpliciorem, de qua producta e binis variabilibus conflata abierunt,

$$W = A + A_1\xi_1\xi_1 + A_2\xi_2\xi_2 + \dots + A_{n-1}\xi_{n-1}\xi_{n-1}$$
$$+ 2a_1\xi_1 + 2a_2\xi_2 + \dots + 2a_{n-1}\xi_{n-1}.$$

Quae expressio prodit ex expressione ipsius V, §. 16. proposita,

$$V = A_1 x_1 x_1 + A_2 x_2 x_2 \dots + A_n x_n x_n + 2x_n(a_1 x_1 + a_2 x_2 \dots + a_{n-1} x_{n-1}),$$

si in fractione $\frac{V}{x_n x_n}$ ponitur rursus

$$\frac{x_x}{x_n} = -i\xi_x,$$

porro loco $A_1, A_2 \dots\dots A_{n-1}$ scribitur $-A_1, -A_2 \dots\dots -A_{n-1}$; loco $a_1, a_2 \dots\dots a_{n-1}$ autem $ia_1, ia_2 \dots\dots ia_{n-1}$; denique A loco A_n. Quo facto, e formulis § 16. traditis sequitur, si rursus G scribimus loco G_n:

$$\frac{(x-G)(x-G_1)\dots(x-G_{n-1})}{(A_1+x)(A_2+x)\dots(A_{n-1}+x)} = x - A + \frac{a_1 a_1}{x+A_1} + \frac{a_2 a_2}{x+A_2} \dots + \frac{a_{n-1} a_{n-1}}{x+A_{n-1}};$$

sive $G, G_1 \dots\dots G_{n-1}$ esse radices aequationis:

$$0 = x - A + \frac{a_1 a_1}{x+A_1} + \frac{a_2 a_2}{x+A_2} \dots + \frac{a_{n-1} a_{n-1}}{x+A_{n-1}}.$$

Haec aequatio certe $n-2$ radices reales habet, easque singulas positas in intervallis seriei

$$-A_1, \quad -A_2 \dots\dots -A_{n-1},$$

siquidem $A_1 > A_2 \dots > A_{n-1}$. Reliquae duae radices aut imaginariae aut reales erunt, eaeque, ubi reales sunt, utraque simul aut inter $-\infty$ et $-A_1$, aut inter $-A_{n-1}$ et $+\infty$ positae erunt.

Ponatur, ut supra,

$$\frac{y_m}{y_n} = i v_m,$$

ac loco $\alpha_n^{(m)}, \alpha_n^{(n)}$ scribamus $i\alpha^{(m)}, \alpha$. Quo facto sequens formula, quae de formulis §. 16. traditis fluit,

$$\frac{y_m}{y_n} = \frac{\alpha_n^{(m)}}{\alpha_n^{(n)}} \cdot \frac{\frac{a_1 x_1}{A_1 - G_m} + \frac{a_2 x_2}{A_2 - G_m} \dots + \frac{a_{n-1} x_{n-1}}{A_{n-1} - G_m} - x_n}{\frac{a_1 x_1}{A_1 - G_n} + \frac{a_2 x_2}{A_2 - G_n} \dots + \frac{a_{n-1} x_{n-1}}{A_{n-1} - G_n} - x_n},$$

abit in hanc

$$v_m = \frac{\alpha^{(m)}}{\alpha} \cdot \frac{1 + \frac{a_1 \xi_1}{A_1 + G_m} + \frac{a_2 \xi_2}{A_2 + G_m} \dots + \frac{a_{n-1} \xi_{n-1}}{A_{n-1} + G_m}}{1 + \frac{a_1 \xi_1}{A_1 + G} + \frac{a_2 \xi_2}{A_2 + G} \dots + \frac{a_{n-1} \xi_{n-1}}{A_{n-1} + G}},$$

in qua, ubi de valore ipsius $\alpha_n^{(m)}$ §. 16. tradito fluit, fit:

$$\alpha^{(m)} = \sqrt{\left(-\frac{(G_m+A_1).(G_m+A_2)\dots(G_m+A_{n-1})}{(G_m-G).(G_m-G_1)\dots(G^m-G_{n-1})}\right)},$$

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{(G+A_1).(G+A_2)\dots(G+A_{n-1})}{(G-G_1).(G-G_2)\dots(G-G_{n-1})}\right)}.$$

Quae facile ita quoque exhibentur:

$$\frac{1}{\alpha^{(m)}} = \sqrt{\left(\frac{a_1 a_1}{(G_m+A_1)^2} + \frac{a_2 a_2}{(G_m+A_2)^2} \dots + \frac{a_{n-1} a_{n-1}}{(G_m+A_{n-1})^2} - 1\right)},$$

$$\frac{1}{\alpha} = \sqrt{\left(\frac{a_1 a_1}{(G+A_1)^2} - \frac{a_2 a_2}{(G+A_2)^2} \dots - \frac{a_{n-1} a_{n-1}}{(G+A_{n-1})^2}\right)}.$$

Hinc, *posito*:

$$v_{n-1}\sqrt{\left(-\frac{G+A_1.G+A_2\ldots\ldots G+A_{n-1}}{G_n+A_1.G_n+A_2\ldots\ldots G_n+A_{n-1}}\cdot\frac{G_n-G.G_n-G_1\ldots\ldots G_n-G_{n-1}}{G-G_1.G-G_2\ldots\ldots G_n-G_{n-1}}\right)}$$

$$=\frac{1+\frac{a_1\xi_1}{A_1+G_n}+\frac{a_2\xi_2}{A_2+G_n}\ldots\ldots+\frac{a_{n-1}\xi_{n-1}}{A_{n-1}+G_n}}{1+\frac{a_1\xi_1}{A_1+G}+\frac{a_2\xi_2}{A_2+G}\ldots\ldots+\frac{a_{n-1}\xi_{n-1}}{A_{n-1}+G_n}},$$

designantibus G, G_1, $G_2\ldots\ldots G_{n-1}$ *radices aequationis,*

$$0=x-A+\frac{a_1a_1}{x+A_1}+\frac{a_2a_2}{x+A_2}\ldots\ldots+\frac{a_{n-1}a_{n-1}}{x+A_{n-1}},$$

habetur:

$$\int^{n-1}\frac{\partial\xi_1\partial\xi_2\ldots\ldots\partial\xi_{n-2}}{\xi_{n-1}[A+A_1\xi_1\xi_1+A_2\xi_2\xi_2\ldots\ldots+A_{n-1}\xi_{n-1}\xi_{n-1}+2(a_1\xi_1+a_2\xi_2\ldots\ldots+a_{n-1}\xi_{n-1})]^{\frac{n-1}{2}}}=$$

$$\int^{n-1}\frac{\partial v_1\partial v_2\ldots\ldots\partial v_{n-2}}{v_{n-1}[G-G_1v_1v_1-G_2v_2v_2\ldots\ldots-G_{n-1}v_{n-1}v_{n-1}]^{\frac{n-1}{2}}}$$

inter variabiles ξ_1, $\xi_2\ldots\ldots\xi_{n-1}$ *nec non inter variabiles* v_1, $v_2\ldots\ldots v_{n-1}$ *existentibus aequationibus:*

$$\xi_1\xi_1+\xi_2\xi_2\ldots\ldots+\xi_{n-1}\xi_{n-1}=1,$$
$$v_1v_1+v_2v_2\ldots\ldots+v_{n-1}v_{n-1}=1.$$

Casum huius transformationis $n-1=2$ tractavit Cl. Gauss in Comment. *Determinatio attractionis* etc.

Observo, ad aequationem

$$0=x-A+\frac{a_1a_1}{x+A_1}+\frac{a_2a_2}{x+A_2}\ldots\ldots+\frac{a_{n-1}a_{n-1}}{x+A_{n-1}}$$

perveniri etiam, ubi propositum est, datam functionem W redigere in formam sequentem:

$$W=(p_1+q_1\xi_1)^2+(p_2+q_2\xi_2)^2\ldots\ldots+(p_{n-1}+q_{n-1}\xi_{n-1})^2.$$

Quod ope aequationis inter variabiles ξ_1, $\xi_2\ldots\ldots\xi_{n-1}$ stabilitae

$$\xi_1\xi_1+\xi_2\xi_2\ldots\ldots+\xi_{n-1}\xi_{n-1}=1,$$

efficitur hunc in modum.

Addita enim datae functioni W expressione evanescente,

$$x(\xi_1\xi_1+\xi_2\xi_2\ldots\ldots+\xi_{n-1}\xi_{n-1}-1),$$

habetur

$$A-x=p_1p_1+p_2p_2\ldots\ldots+p_{n-1}p_{n-1}$$
$$x+A_1=q_1q_1,\quad x+A_2=q_2q_2\ldots\ldots,\quad x+A_{n-1}=q_{n-1}q_{n-1},$$
$$a_1=p_1q_1,\quad a_2=p_2q_2\ldots\ldots,\quad a_{n-1}=p_{n-1}q_{n-1}.$$

Unde illa prodit aequatio,

$$A - x = \frac{a_1 a_1}{x + A_1} + \frac{a_2 a_2}{x + A_2} \dots + \frac{a_{n-1} a_{n-1}}{x + A_{n-1}}.$$

Cuius ope determinata x, habetur

$$W = \left[\frac{a_1}{\sqrt{(x+A_1)}} + \sqrt{(x+A_1)} \cdot \xi_1\right]^2 + \left[\frac{a_2}{\sqrt{(x+A_2)}} + \sqrt{(x+A_2)}\xi_2\right]^2 \dots$$
$$\dots + \left[\frac{a_{n-1}}{\sqrt{(x+A_{n-1})}} + \sqrt{(x+A_{n-1})}\xi_{n-1}\right]^2.$$

Unde videmus, ut data functio W modo reali in formam propositam redigatur, radicem x, si fieri possit, ita eligendam esse, ut quantitates

$$x + A_1, \quad x + A_2, \quad \dots \quad x + A_{n-1}$$

omnes positivae evadant; sive aequationis propositae radix x summenda est, si qua datur, inter $-A_{n-1}$ et $+\infty$ posita. Quae ubi datur, observavimus, alteram quoque aequationis radicem inter eosdem limites positam inveniri. Unde *functioni W forma assignata realiter conciliari aut non potest aut binis modis.*

Eadem ratione realem semper invenimus solutionem eamque unicam tantum, ubi propositum est, functioni W formam creare sequentem,

$$W = (p_1 + q_1 \xi_1)^2 + (p_2 + q_2 \xi_2)^2 \dots + (p_m + q_m \xi_m)^2$$
$$-(p_{m+1} + q_{m+1} \xi_{m+1})^2 - (p_{m+2} + q_{m+2} \xi_{m+2})^2 \dots - (p_{n-1} + q_{n-1} \xi_{n-1})^2,$$

designante m unum quemlibet e numeris $1, 2 \dots n-2$. Scilicet hanc formam induit expressio antecedens ipsius W, si aequationis propositae ea radix pro x statuitur, quae inter $-A_m$ et $-A_{m+1}$ posita est; quae semper datur eaque unica.

24.

Si functionem W iam exhibitam supponimus sub forma:

$$W = (p_1 + q_1 \xi_1)^2 + (p_2 + q_2 \xi_2)^2 \dots + (p_{n-1} + q_{n-1} \xi_{n-1})^2,$$

fit aequatio, cuius radices sunt $G, G_1 \dots G_{n-1}$:

$$0 = x - p_1 p_1 - p_2 p_2 \dots - p_{n-1} p_{n-1} + \frac{p_1 p_1 q_1 q_1}{x + q_1 q_1} + \frac{p_2 p_2 q_2 q_2}{x + q_2 q_2} + \dots$$
$$\dots + \frac{p_{n-1} p_{n-1} q_{n-1} q_{n-1}}{x + q_{n-1} q_{n-1}}.$$

Cuius aequationis una radix est $x = 0$, sicuti fieri debet, cum eo casu expressio

$$x(\xi_1 \xi_1 + \xi_2 \xi_2 \dots + \xi_{n-1} \xi_{n-1} - 1)$$

datae functioni W addi non debent, ut formam propositam nanciscatur; quippe qua iam gaudere supponitur. Radice $x = 0$ eiecta, aequationem $(n-1)^{ti}$ gradus obtinemus formae simplicis:

$$\frac{p_1 p_1}{x + q_1 q_1} + \frac{p_2 p_2}{x + q_2 q_2} \dots + \frac{p_{n-1} p_{n-1}}{x + q_{n-1} q_{n-1}} = 1.$$

Cuius radices, siquidem $q_1 > q_2 \dots > q_{n-1}$, positae sunt in intervallis seriei:

$$-q_1 q_1, \quad -q_2 q_2, \quad \dots \quad -q_{n-1} q_{n-1}, \quad +\infty.$$

Erunt igitur radices omnes reales, earumque certo $n-2$ negativae; reliqua aut positiva aut negativa est, prout expressio

$$\frac{p_1 p_1}{q_1 q_1} + \frac{p_2 p_2}{q_2 q_2} \dots + \frac{p_{n-1} p_{n-1}}{q_{n-1} q_{n-1}}$$

aut >1 aut <1. Ceterum e §. 12. sequitur, aequationem illam $(n-1)^{ti}$ gradus eandem esse atque aequationem, ad quam devenitur in problemate I., si statuitur

$$V = [p_1 x_1 + p_2 x_2 \dots + p_{n-1} x_{n-1}]^2$$
$$-[q_1 q_1 x_1 x_1 + q_2 q_2 x_2 x_2 \dots + q_{n-1} q_{n-1} x_{n-1} x_{n-1}].$$

Demonstravi, si functio W forma proposita gaudet, eandem formam altero quoque modo ei conciliari posse. Observo, quod facile probatur, expressionem

$$\frac{p_1 p_1}{q_1 q_1} + \frac{p_2 p_2}{q_2 q_2} \dots + \frac{p_{n-1} p_{n-1}}{q_{n-1} q_{n-1}}$$

pro altero modo fore >1, pro altero <1 *). Unde alterutrum semper supponere licet. Pro altero enim modo, quo W formam assignatam induit, p_m, q_m fiunt:

$$\frac{p_m q_m}{\sqrt{(x + q_m q_m)}}, \quad \sqrt{(x + q_m q_m)},$$

unde expressio illa fit:

$$\frac{p_1^2 q_1^2}{(x + q_1 q_1)^2} + \frac{p_2^2 q_2^2}{(x + q_2 q_2)^2} \dots + \frac{p_{n-1}^2 q_{n-1}^2}{(x + q_{n-1} q_{n-1})^2}$$
$$= 1 - x\left[\frac{p_1 p_1}{(x + q_1 q_1)^2} + \frac{p_2 p_2}{(x + q_2 q_2)^2} \dots + \frac{p_{n-1} p_{n-1}}{(x + q_{n-1} q_{n-1})^2}\right],$$

quod aut <1 aut >1, prout x positiva aut negativa, sive ex antecedentibus, prout expressio illa aut >1 aut <1.

Casu, quem consideramus, habetur porro, si m designat numeros $1, 2, \dots n-1$:

$$\alpha_m \alpha_m = \frac{-(G_m - G)(G_m - G_1)\dots(G_m - G_{n-1})}{(G_m + q_1 q_1)(G_m + q_2 q_2)\dots(G_m + q_{n-1} q_{n-1})},$$

$$\alpha \alpha = \frac{(G - G_1)(G - G_2)\dots(G - G_{n-1})}{(G + q_1 q_1)(G + q_2 q_2)\dots(G + q_{n-1} q_{n-1})}.$$

Qui ut reales sint valores, statuenda est G, G_1, G_2, ... G_{n-1}; hoc est, quoties expressio

*) Considerationibus similibus pro tribus variabilibus factis in quaestionibus celeberrimis de attractione ellipsoidarum superstruxit Cl. Ivory reductionem puncti attracti externi ad internum.



$$\frac{p_1 p_1}{q_1 q_1} + \frac{p_2 p_2}{q_2 q_2} \dots + \frac{p_{n-1} p_{n-1}}{q_{n-1} q_{n-1}}$$

fit >1, erit G radix positiva, qua eo casu aequatio proposita gaudet; quoties expressio illa fit <1, erit $G = 0$.

Habetur porro aequatio identica:

$$\frac{(x-G)(x-G_1)\dots(x-G_{n-1})}{(x+q_1 q_1)(x+q_2 q_2)\dots(x+q_{n-1} q_{n-1})} =$$

$$x - p_1 p_1 - p_2 p_2 \dots - p_{n-1} p_{n-1} + \frac{p_1 p_1 q_1 q_1}{q_1 q_1 + x} + \frac{p_2 p_2 q_2 q_2}{q_2 q_2 + x} \dots + \frac{p_{n-1} q_{n-1} q_{n-1} q_{n-1}}{q_{n-1} q_{n-1} + x}.$$

Qua differentiata et posito post differentiationem $x = G_m$ aut $x = G$, eruitur, si valores ipsarum $\alpha_m \alpha_m$, $\alpha\alpha$ advocamus,

$$\frac{1}{\alpha_m \alpha_m} = \frac{p_1 p_1 q_1 q_1}{(G_m + q_1 q_1)^2} + \frac{p_2 p_2 q_2 q_2}{(G_m + q_2 q_2)^2} \dots + \frac{p_{n-1} p_{n-1} q_{n-1} q_{n-1}}{(G_m + q_{n-1} q_{n-1})^2} - 1,$$

$$\frac{1}{\alpha\alpha} = 1 - \frac{p_1 p_1 q_1 q_1}{(G + q_1 q_1)^2} - \frac{p_2 p_2 q_2 q_2}{(G + q_2 q_2)^2} \dots - \frac{p_{n-1} p_{n-1} q_{n-1} q_{n-1}}{(G + q_{n-1} q_{n-1})^2}.$$

Quoties igitur $G = 0$, fit

$$\frac{1}{\alpha\alpha} = 1 - \frac{p_1 p_1}{q_1 q_1} - \frac{p_2 p_2}{q_2 q_2} \dots - \frac{p_{n-1} p_{n-1}}{q_{n-1} q_{n-1}}.$$

Collectis antecedentibus, casu quo supponitur, quod licet,

$$\frac{p_1 p_1}{q_1 q_1} + \frac{p_2 p_2}{q_2 q_2} \dots + \frac{p_{n-1} p_{n-1}}{q_{n-1} q_{n-1}} < 1,$$

si insuper scribitur $-x$, $-G_m$ loco x, G_m, habetur theorema sequens

Theorema.

„*Proposita functione*

$$„W = (p_1 + q_1 \xi_1)^2 + (p_2 + q_2 \xi_2)^2 \dots + (p_{n-1} + q_{n-1} \xi_{n-1})^2,$$

„*in qua statuitur:* $„\xi_1 \xi_1 + \xi_2 \xi_2 \dots + \xi_{n-1} \xi_{n-1} = 1,$

„*porro supponitur:* $„\frac{p_1 p_1}{q_1 q_1} + \frac{p_2 p_2}{q_2 q_2} \dots + \frac{p_{n-1} p_{n-1}}{q_{n-1} q_{n-1}} < 1:$

„*sint* $G_1, G_2, \dots G_{n-1}$ *radices aequationes:*

$$„\frac{p_1 p_1}{q_1 q_1 - x} + \frac{p_2 p_2}{q_2 q_2 - x} \dots + \frac{p_{n-1} p_{n-1}}{q_{n-1} q_{n-1} - x} = 1,$$

„*quae omnes erunt positivae; ac statuatur:*

$$„\frac{\sqrt{\left(\frac{p_1 p_1 q_1 q_1}{(G_m - q_1 q_1)^2} + \frac{p_2 p_2 q_2 q_2}{(G_m - q_2 q_2)^2} \dots + \frac{p_{n-1} p_{n-1} q_{n-1} q_{n-1}}{(G_m - q_{n-1} q_{n-1})^2} - 1\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p_1 p_1}{q_1 q_1} - \frac{p_2 p_2}{q_2 q_2} \dots - \frac{p_{n-1} p_{n-1}}{q_{n-1} q_{n-1}}\right)}} . v_m$$

$$= \frac{1 - \frac{p_1 q_1 \xi_1}{G_m - q_1 q_1} - \frac{p_2 q_2 \xi_2}{G_m - q_2 q_2} \dots - \frac{p_{n-1} q_{n-1} \xi_{n-1}}{G_m - q_{n-1} q_{n-1}}}{1 + \frac{p_1 \xi_1}{q_1} + \frac{p_2 \xi_2}{q_2} \dots + \frac{p_{n-1} \xi_{n-1}}{q_{n-1}}};$$

„*erit etiam.*

$$„v_1 v_1 + v_2 v_2 \ldots + v_{n-1} v_{n-1} = 1;$$

„*ac habetur transformatio integralis multiplicis indefinita*

$$„\int^{n-2} \frac{\partial \xi_1 \, \partial \xi_2 \ldots \partial \xi_{n-2}}{\xi_{n-1}\left[(p_1+q_1\xi_1)^2+(p_2+q_2\xi_2)^2\ldots+(p_{n-1}+q_{n-1}\xi_{n-1})^2\right]^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$= \int^{n-2} \frac{\partial v_1 \, \partial v_2 \ldots \partial v_{n-2}}{v_{n-1}\left[G_1 v_1 v_1 + G_2 v_2 v_2 \ldots + G_{n-1} v_{n-1} v_{n-1}\right]^{\frac{n-1}{2}}}."$$

Addo, si integrale propositum extenditur ad valores omnes variabilium $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}$, qui satisfaciunt aequationi

$$\xi_1\xi_1 + \xi_2\xi_2 \ldots + \xi_{n-1}\xi_{n-1} = 1,$$

etiam integrale transformatum extendi ad valores omnes variabilium v_1, $v_2, \ldots v_{n-1}$, qui satisfaciunt aequationi

$$v_1 v_1 + v_2 v_2 \ldots + v_{n-1} v_{n-1} = 1.$$

Applicatis quaestionibus algebraicis, quas problemate I. suscepimus, ad transformationem singularem integralium multiplicium: iam quaestionibus illis maiorem conciliemus generalitatem, proponendo binas simul functiones quaslibet homogeneas secundi ordinis per substitutiones lineares transformandas in alias, quae solis variabilium quadratis constant. Quarum functionum altera in problemate I. erat summe quadratorum variabilium, ideoque iam carebat productis e binis conflatis. Quod igitur problema considerari debet ut casus specialis problematis. quod sequentibus proponimus.

Problem III.

„*Datas binas quaslibet functiones V, W homogeneas secundi or-*
„*dinis variabilium $x_1, x_2, \ldots x_n$ per substitutiones lineares huiusmodi.*

$$„x_1 = \beta_1' y_1 + \beta_1'' y_2 \ldots + \beta_1^{(n)} y_n,$$
$$„x_2 = \beta_2' y_1 + \beta_2'' y_2 \ldots + \beta_2^{(n)} y_n,$$
$$„\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$„x_n = \beta_n' y_1 + \beta_n'' y_2 \ldots + \beta_n^{(n)} y_n,$$

„*transformare in alias variabilium $y_1, y_2, \ldots y_n$,*

$$„V = G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 \ldots + G_n y_n y_n,$$
$$„W = H_1 y_1 y_1 + H_2 y_2 y_2 \ldots + H_n y_n y_n,$$

„*quae solis variabilium quadratis constant.*"

25.

Functiones V, W designemus hunc in modum

$$V = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda,$$
$$W = \sum_{\varkappa,\lambda} b_{\varkappa,\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda,$$

quibus in summis numeris $\varkappa$, λ valores omnes tribuuntur $1, 2 \ldots\ldots n$. Statuamus porro

$$a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}, \quad b_{\varkappa,\lambda} = b_{\lambda,\varkappa},$$

ita ut termini in $x_\varkappa x_\lambda$ ducti, ubi $\varkappa$, λ diversi sunt, in functionibus illis sint

$$2a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda, \quad 2b_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda.$$

Supponamus, e substitutionibus propositis vice versa sequi:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 \ldots\ldots + \alpha'_n x_n,\\
y_2 &= \alpha''_1 x_1 + \alpha''_2 x_2 \ldots\ldots + \alpha''_n x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= \alpha^{(n)}_1 x_1 + \alpha^{(n)}_2 x_2 \ldots\ldots + \alpha^{(n)}_n x_n.
\end{aligned}$$

Quibus expressionibus variabilium $y_1, y_2 \ldots\ldots y_n$ substitutis in aequationibus propositis:

$$1. \quad \begin{cases} V = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda = G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 \ldots\ldots + G_n y_n y_n,\\ W = \sum_{\varkappa,\lambda} b_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda = H_1 y_1 y_1 + H_2 y_2 y_2 \ldots\ldots + H_n y_n y_n,\end{cases}$$

singulos comparando terminos nanciscimur:

$$2. \quad \begin{cases} a_{\varkappa,\lambda} = G_1 \alpha'_\varkappa \alpha'_\lambda + G_2 \alpha''_\varkappa \alpha''_\lambda \ldots\ldots + G_n \alpha^{(n)}_\varkappa \alpha^{(n)}_\lambda,\\ b_{\varkappa,\lambda} = H_1 \alpha'_\varkappa \alpha'_\lambda + H_2 \alpha''_\varkappa \alpha''_\lambda \ldots\ldots + H_n \alpha^{(n)}_\varkappa \alpha^{(n)}_\lambda.\end{cases}$$

Determinantur autem coëfficientes $\alpha^{(m)}_\varkappa$ per coëfficientes substitutionum propositarum $\beta^{(m)}_\varkappa$, uti facile patet, per formulas

$$3. \quad \begin{cases} 1 = \alpha^{(\varkappa)}_1 \beta^{(\varkappa)}_1 + \alpha^{(\varkappa)}_2 \beta^{(\varkappa)}_2 \ldots\ldots + \alpha^{(\varkappa)}_n \beta^{(\varkappa)}_n,\\ 0 = \alpha^{(\varkappa)}_1 \beta^{(\lambda)}_1 + \alpha^{(\varkappa)}_2 \beta^{(\lambda)}_2 \ldots\ldots + \alpha^{(\varkappa)}_n \beta^{(\lambda)}_n,\end{cases}$$

in quarum postrema $\varkappa$, λ, diversi supponuntur. Hinc nanciscimur e (2.):

$$4. \quad \begin{cases} \beta^{(\lambda)}_1 a_{\varkappa,1} + \beta^{(\lambda)}_2 a_{\varkappa,2} \ldots\ldots + \beta^{(\lambda)}_n a_{\varkappa,n} = G_\lambda \alpha^{(\lambda)}_\varkappa,\\ \beta^{(\lambda)}_1 b_{\varkappa,1} + \beta^{(\lambda)}_2 b_{\varkappa,2} \ldots\ldots + \beta^{(\lambda)}_n b_{\varkappa,n} = H_\lambda \alpha^{(\lambda)}_\varkappa.\end{cases}$$

Unde posito brevitatis causa

$$5. \quad H_\lambda . a_{\varkappa,\varkappa'} - G_\lambda b_{\varkappa,\varkappa'} = I^{(\lambda)}_{\varkappa,\varkappa'} = I^{(\lambda)}_{\varkappa',\varkappa},$$

habetur e (4.):

$$6. \quad I^{(\lambda)}_{\varkappa,1} \beta^{(\lambda)}_1 + I^{(\lambda)}_{\varkappa,2} \beta^{(\lambda)}_2 \ldots\ldots + I^{(\lambda)}_{\varkappa,n} \beta^{(\lambda)}_n = 0.$$

Quae formula, posito $1, 2, \ldots\ldots n$ loco $\varkappa$, suppeditat n aequationes sequentes.

$$7.\quad \begin{cases} I^{(\lambda)}_{1,1}\beta^{(\lambda)}_1 + I^{(\lambda)}_{1,2}\beta^{(\lambda)}_2 \dots + I^{(\lambda)}_{1,n}\beta^{(\lambda)}_n = 0, \\ I^{(\lambda)}_{2,1}\beta^{(\lambda)}_1 + I^{(\lambda)}_{2,2}\beta^{(\lambda)}_2 \dots + I^{(\lambda)}_{2,n}\beta^{(\lambda)}_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ I^{(\lambda)}_{n,1}\beta^{(\lambda)}_1 + I^{(\lambda)}_{n,2}\beta^{(\lambda)}_2 \dots + I^{(\lambda)}_{n,n}\beta^{(\lambda)}_n = 0. \end{cases}$$

De quibus aequationibus eliminatis $\beta^{(\lambda)}_1, \beta^{(\lambda)}_2 \dots \beta^{(\lambda)}_n$, habes aequationem conditionalem

$$8.\quad \Sigma \pm I^{(\lambda)}_{1,1} I^{(\lambda)}_{2,2} \dots I^{(\lambda)}_{n,n} = 0.$$

De qua aequatione valorem expressionis

$$\frac{G_\lambda}{H_\lambda},$$

per resolutionem aequationis algebraicae n^{ti} ordinis eruis; cuius radices omnes obtines, ponendo pro λ valores $1, 2, \dots n$. Hinc si statuimus

$$I_{x,x'} = H a_{x,x'} - G b_{x,x'},$$

habetur aequatio, respectu ipsarum G, H identica:

$$9.\quad \Sigma \pm I_{1,1} I_{2,2} \dots I_{n,n}$$

$$= \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n} . \left(H - \frac{GH_1}{G_1}\right)\left(H - \frac{GH_2}{G_2}\right)\dots\left(H - \frac{GH_n}{G_n}\right)$$

$$= \Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \dots b_{n,n} . \left(\frac{G_1 H}{H_1} - G\right)\left(\frac{G_2 H}{H_2} - G\right)\dots\left(\frac{G_n H}{H_n} - G\right).$$

E quantitatibus autem G_λ, H_λ alteram semper pro arbitris accipere licet, quippe quarum rationem tantum problemate proposito derterminari, facile patet. E quibus cum etiam I_λ innotescat, e quibuslibet $n-1$ aequationibus, de aequationibus (7.) desumtis, obtines rationes, in quibus sunt

$$\beta^{(\lambda)}_1,\quad \beta^{(\lambda)}_2,\quad \dots\quad \beta^{(\lambda)}_n,$$

per ipsas $I^{(\lambda)}_{x,x'}$ rationaliter expressas. Unde ipsarum $\beta^{(\lambda)}_x$ valores facile derivantur.

Adnotemus adhuc formulas, quae e (2.) sequuntur:

$$10.\quad \begin{cases} a_{x,1}x_1 + a_{x,2}x_2 \dots + a_{x,n}x_n = G_1 \alpha'_x y_1 + G_2 \alpha''_x y_2 + \dots + G_n \alpha^{(n)}_x y_n; \\ b_{x,1}x_1 + b_{x,2}x_2 \dots + b_{x,n}x_n = H_1 \alpha'_x y_1 + H_2 \alpha''_x y_2 + \dots + H_n \alpha^{(n)}_x y_n. \end{cases}$$

26.

Eadem methodo, qua in problemate I. usi sumus, coëfficientium

$$\beta^{(\lambda)}_1,\quad \beta^{(\lambda)}_2,\quad \dots\quad \beta^{(\lambda)}_n$$

quadrata et binorum producta de formulis (7.) derivantur. Supponamus enim aequationes

$$11.\quad \begin{cases} I^{(\lambda)}_{1,1}u_1 + I^{(\lambda)}_{1,2}u_2 \dots + I^{(\lambda)}_{1,n}u_n = w_1, \\ I^{(\lambda)}_{2,1}u_1 + I^{(\lambda)}_{2,2}u_2 \dots + I^{(\lambda)}_{2,n}u_n = w_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ I^{(\lambda)}_{n,1}u_1 + I^{(\lambda)}_{n,2}u_2 \dots + I^{(\lambda)}_{n,n}u_n = w_n. \end{cases}$$

de quibus vice versa sequantur:

$$12. \quad \begin{cases} K^{(\lambda)}_{1,1} w_1 + K^{(\lambda)}_{2,1} w_2 \ldots + K^{(\lambda)}_{n,1} = u_1 \Sigma \pm I^{(\lambda)}_{1,1} I^{(\lambda)}_{2,2} \ldots I^{(\lambda)}_{n,n}, \\ K^{(\lambda)}_{1,2} w_1 + K^{(\lambda)}_{2,2} w_2 \ldots + K^{(\lambda)}_{n,2} = u_2 \Sigma \pm I^{(\lambda)}_{1,1} I^{(\lambda)}_{2,2} \ldots I^{(\lambda)}_{n,n}, \\ \cdots \\ K^{(\lambda)}_{1,n} w_1 + K^{(\lambda)}_{2,n} w_2 \ldots + K^{(\lambda)}_{n,n} = u_n \Sigma \pm I^{(\lambda)}_{1,1} I^{(\lambda)}_{2,2} \ldots I^{(\lambda)}_{n,n}; \end{cases}$$

ubi ex iis, quae in problemate I. adnotavimus, fit rursus

$$K_{\varkappa,\varkappa'} = K_{\varkappa',\varkappa}.$$

His statutis, fit per eandem ratiocinationem, quam §. 9. adhibuimus,

$$13. \quad \beta^{(\lambda)}_{\varkappa} \beta^{(\lambda)}_{\varkappa'} = p^{(\lambda)} K^{(\lambda)}_{\varkappa,\varkappa'},$$

multiplicatore $p^{(\lambda)}$ eodem manente pro omnibus valoribus indicum $\varkappa$, $\varkappa'$. Cuius ut eruatur valor, observo, per substitutiones propositas haberi e (1.):

$$14. \quad \begin{cases} \sum_{\varkappa,\varkappa'} a_{\varkappa,\varkappa'} \beta^{(\lambda)}_{\varkappa} \beta^{(\lambda)}_{\varkappa'} = G_\lambda; \\ \sum_{\varkappa,\varkappa'} b_{\varkappa,\varkappa'} \beta^{(\lambda)}_{\varkappa} \beta^{(\lambda)}_{\varkappa'} = H_\lambda; \end{cases}$$

porro ubi λ, λ' sunt numeri diversi:

$$15. \quad \begin{cases} \sum_{\varkappa,\varkappa'} a_{\varkappa,\varkappa'} \beta^{(\lambda)}_{\varkappa} \beta^{(\lambda')}_{\varkappa'} = 0, \\ \sum_{\varkappa,\varkappa'} b_{\varkappa,\varkappa'} \beta^{(\lambda)}_{\varkappa} \beta^{(\lambda')}_{\varkappa'} = 0. \end{cases}$$

Unde iam habetur e (13.):

$$16. \quad p^{(\lambda)} = \frac{G_\lambda}{\sum_{\varkappa,\varkappa'} a_{\varkappa,\varkappa'} K^{(\lambda)}_{\varkappa,\varkappa'}} = \frac{H_\lambda}{\sum_{\varkappa,\varkappa'} b_{\varkappa,\varkappa'} K^{(\lambda)}_{\varkappa,\varkappa'}},$$

27.

Alium modum determinandi quantitates $\beta^{(\lambda)}_{\varkappa} \beta^{(\lambda)}_{\varkappa'}$, nancisceris differentiando aequationes (14.) secundum constantes $a_{\varkappa,\varkappa'}$, $b_{\varkappa,\varkappa'}$, quae functiones V, W afficiunt. Eum in finem observo, fieri e (4.):

$$17. \quad \begin{cases} \sum_{\varkappa,\varkappa'} a_{\varkappa,\varkappa'} \partial . \beta^{(\lambda)}_{\varkappa} \beta^{(\lambda)}_{\varkappa'} = 2 \sum_{\varkappa} \left(\partial \beta^{(\lambda)}_{\varkappa} \sum_{\varkappa'} a_{\varkappa,\varkappa'} \beta^{(\lambda)}_{\varkappa'} \right) = 2\, G_\lambda \sum_{\varkappa} \alpha^{(\lambda)}_{\varkappa} \partial \beta^{(\lambda)}_{\varkappa}, \\ \sum_{\varkappa,\varkappa'} b_{\varkappa,\varkappa'} \partial . \beta^{(\lambda)}_{\varkappa} \beta^{(\lambda)}_{\varkappa'} = 2 \sum_{\varkappa} \left(\partial \beta^{(\lambda)}_{\varkappa} \sum_{\varkappa'} b_{\varkappa,\varkappa'} \beta^{(\lambda)}_{\varkappa'} \right) = 2\, H_\lambda \sum_{\varkappa} \alpha^{(\lambda)}_{\varkappa} \partial \beta^{(\lambda)}_{\varkappa}. \end{cases}$$

Unde habes, differentiando (14.) secundum $a_{\varkappa,\varkappa}$, $b_{\varkappa,\varkappa}$:

$$18. \quad \begin{cases} \dfrac{\partial G_\lambda}{\partial a_{\varkappa,\varkappa}} = \beta^{(\lambda)}_{\varkappa} \beta^{(\lambda)}_{\varkappa} + 2\, G_\lambda \sum_{\varkappa} \alpha^{(\lambda)}_{\varkappa} \dfrac{\partial \beta^{(\lambda)}_{\varkappa}}{\partial a_{\varkappa,\varkappa}}, \\ \dfrac{\partial H_\lambda}{\partial a_{\varkappa,\varkappa}} = \qquad 2\, H_\lambda \sum_{\varkappa} \alpha^{(\lambda)}_{\varkappa} \dfrac{\partial \beta^{(\lambda)}_{\varkappa}}{\partial a_{\varkappa,\varkappa}}, \\ \dfrac{\partial G_\lambda}{\partial b_{\varkappa,\varkappa}} = \qquad 2\, G_\lambda \sum_{\varkappa} \alpha^{(\lambda)}_{\varkappa} \dfrac{\partial \beta^{(\lambda)}_{\varkappa}}{\partial b_{\varkappa,\varkappa}}, \\ \dfrac{\partial H_\lambda}{\partial b_{\varkappa,\varkappa}} = \beta^{(\lambda)}_{\varkappa} \beta^{(\lambda)}_{\varkappa} + 2\, H_\lambda \sum_{\varkappa} \alpha^{(\lambda)}_{\varkappa} \dfrac{\partial \alpha^{(\lambda)}_{\varkappa}}{\partial b_{\varkappa,\varkappa}}; \end{cases}$$

porro, quoties $\varkappa$ et $\varkappa'$ diversi sunt:

$$19.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial G_\lambda}{\partial a_{\varkappa,\varkappa'}} = 2\beta_\varkappa^{(\lambda)}\beta_{\varkappa'}^{(\lambda)} + 2G_\lambda \sum\limits_\varkappa \alpha_\varkappa^{(\lambda)} \dfrac{\partial \beta_\varkappa^{(\lambda)}}{\partial a_{\varkappa,\varkappa'}}, \\ \dfrac{\partial H_\lambda}{\partial a_{\varkappa,\varkappa'}} = \qquad\qquad 2H_\lambda \sum\limits_\varkappa \alpha_\varkappa^{(\lambda)} \dfrac{\partial \beta_\varkappa^{(\lambda)}}{\partial a_{\varkappa,\varkappa'}}, \\ \dfrac{\partial G_\lambda}{\partial b_{\varkappa,\varkappa'}} = \qquad\qquad 2G_\lambda \sum\limits_\varkappa \alpha_\varkappa^{(\lambda)} \dfrac{\partial \beta_\varkappa^{(\lambda)}}{\partial b_{\varkappa,\varkappa'}}, \\ \dfrac{\partial H_\lambda}{\partial b_{\varkappa,\varkappa'}} = 2\beta_\varkappa^{(\lambda)}\beta_{\varkappa'}^{(\lambda)} + 2H_\lambda \sum\limits_\varkappa \alpha_\varkappa^{(\lambda)} \dfrac{\partial \beta_\varkappa^{(\lambda)}}{\partial b_{\varkappa,\varkappa'}}, \end{cases}$$

E (18.) sequitur:

$$20.\quad \beta_\varkappa^{(\lambda)}\beta_{\varkappa'}^{(\lambda)} = \frac{H_\lambda\,\partial G_\lambda - G_\lambda\,\partial H_\lambda}{H_\lambda\,\partial a_{\varkappa,\varkappa}} = \frac{G_\lambda\,\partial H_\lambda - H_\lambda\,\partial G_\lambda}{G_\lambda\,\partial b_{\varkappa,\varkappa}};$$

e (19.) sequitur:

$$21.\quad \beta_\varkappa^{(\lambda)}\beta_\varkappa^{(\lambda)} = \frac{H_\lambda\,\partial G_\lambda - G_\lambda\,\partial H_\lambda}{2H_\lambda\,\partial a_{\varkappa,\varkappa'}} = \frac{G\;\partial H_\lambda - H_\lambda\,\partial G_\lambda}{2G_\lambda\,\partial b_{\varkappa,\varkappa'}}.$$

Quae sunt formulae quaesitae. E quibus videmus, etiam hic, uti in problemate I. magis speciali, unica formata aequatione n^{ti} gradus, cuius radices sunt

$$\frac{G_\lambda}{H_\lambda},$$

totum confici problema. Videlicet per differentialia partialia harum quantitatum, sumta secundum constantes, quae alterutram functionem propositam afficiunt, statim habentur e (20.), (21.) quantitates

$$\beta_\varkappa^{(\lambda)}\beta_\varkappa^{(\lambda)},\quad \beta_\varkappa^{(\lambda)}\beta_{\varkappa'}^{(\lambda)},$$

unde per extractionem radicis quadraticae ipsi substitutionis propositae coëfficientes $\beta_\varkappa^{(\lambda)}$ prodeunt.

28.

Valores expressionum

$$H_\lambda\,\partial G_\lambda - G_\lambda\,\partial H_\lambda$$

de aequatione, cuius radices sunt $\frac{G_\lambda}{H_\lambda}$, invenimus hunc in modum. Sit brevitatis causa:

$$22.\quad \begin{cases} \Sigma \pm I_{1,1}\, I_{2,2} \ldots\ldots I_{n,n} = I, \\ \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots\ldots a_{n,n} = A, \\ \Sigma \pm b_{1,1}\, b_{2,2} \ldots\ldots b_{n,n} = B; \end{cases}$$

est e (9.):

$$23.\quad I = A\left(H - \frac{GH_1}{G_1}\right)\left(H - \frac{GH_2}{G_2}\right)\ldots\ldots\left(H - \frac{GH_n}{G_n}\right)$$
$$= B\left(\frac{G_1 H}{H_1} - G\right)\left(\frac{G_2 H}{H_2} - G\right)\ldots\ldots\left(\frac{G_n H}{H_n} - G\right),$$

quae aequationes respectu ipsarum G, H identicae sunt. De quibus, cum

sequatur:

$$24.\quad \frac{A}{B} = \frac{G_1 G_2 \ldots . G_n}{H_1 H_2 \ldots . H_n},$$

simul statuere licet:

$$25.\quad \begin{cases} A = G_1 G_2 \ldots . G_n, \\ B = H_1 H_2 \ldots . H_n. \end{cases}$$

Alteram enim quantitatem ex iis, quae §. 25. diximus, ex arbitrio accipere licet. Hinc aequationes (23.) magis concinne exhibere licet hunc in modum:

$$26.\quad I = (G_1 H - H_1 G)(G_2 H - H_2 G) \ldots . (G_n H - H_n G).$$

Differentiata hac aequatione secundum G, H, $a_{x,x'}$, $b_{x,x'}$, ac posito post differentiationem $G = G_\lambda$, $H = H_\lambda$, provenit:

$$27.\quad -\frac{\partial I}{H_\lambda \partial G} = \frac{\partial I}{G_\lambda \partial H} = (G_1 H_\lambda - H_1 G_\lambda)(G_2 H_\lambda - H_2 G_\lambda) \ldots . (G_n H_\lambda - H_n G_\lambda),$$

quo in producto omitti debet factor evanescens

$$G_\lambda H_\lambda - H_\lambda G_\lambda;$$

porro fit:

$$28.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial a_{x,x'}} = (G_1 H_\lambda - H_1 G_\lambda)(G_2 H_\lambda - H_2 G_\lambda) \ldots . (G_n H_\lambda - H_n G_\lambda) \dfrac{H_\lambda \partial G_\lambda - G_\lambda \partial H_\lambda}{\partial a_{x,x'}}, \\ \dfrac{\partial I}{\partial b_{x,x'}} = (G_1 H_\lambda - H_1 G_\lambda)(G_2 H_\lambda - H_2 G_\lambda) \ldots . (G_n H_\lambda - H_n G_\lambda) \dfrac{H_\lambda \partial G_\lambda - G_\lambda \partial H_\lambda}{\partial b_{x,x'}}; \end{cases}$$

sive e (27.):

$$29.\quad \begin{cases} \dfrac{H_\lambda \partial G_\lambda - G_\lambda \partial H_\lambda}{\partial a_{x,x'}} = -H_\lambda \dfrac{\frac{\partial I}{\partial a_{x,x'}}}{\frac{\partial I}{\partial G}} = G_\lambda \dfrac{\frac{\partial I}{\partial a_{x,x'}}}{\frac{\partial I}{\partial H}}, \\ \dfrac{H_\lambda \partial G_\lambda - G_\lambda \partial H_\lambda}{\partial b_{x,x'}} = -H_\lambda \dfrac{\frac{\partial I}{\partial b_{x,x'}}}{\frac{\partial I}{\partial G}} = G_\lambda \dfrac{\frac{\partial I}{\partial b_{x,x'}}}{\frac{\partial I}{\partial H}} \end{cases}$$

Unde habetur e (20.), (21.):

$$30.\quad \begin{cases} \beta_x^{(\lambda)} \beta_x^{(\lambda)} = \dfrac{G_\lambda}{H_\lambda} \cdot \dfrac{\frac{\partial I}{\partial a_{x,x}}}{\frac{\partial I}{\partial H}} = \dfrac{H_\lambda}{G_\lambda} \cdot \dfrac{\frac{\partial I}{\partial b_{x,x}}}{\frac{\partial I}{\partial G}}, \\ \beta_x^{(\lambda)} \beta_{x'}^{(\lambda)} = \dfrac{G_\lambda}{H_\lambda} \cdot \dfrac{\frac{\partial I}{2\partial a_{x,x'}}}{\frac{\partial I}{\partial H}} = \dfrac{H_\lambda}{G_\lambda} \cdot \dfrac{\frac{\partial I}{2\partial b_{x,x'}}}{\frac{\partial I}{\partial G}}. \end{cases}$$

Quibus formulis collatis cum (13.), (16.), colligitur:

$$31.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial H} = \sum\limits_{\kappa,\kappa'} a_{\kappa,\kappa'} K^{(\lambda)}_{\kappa,\kappa'}, \\[2mm] \dfrac{\partial I}{\partial G} = -\sum\limits_{\kappa,\kappa'} b_{\kappa,\kappa'} K^{(\lambda)}_{\kappa,\kappa'}, \\[2mm] \dfrac{\partial I}{H_\lambda \partial a_{\kappa,\kappa'}} = -\dfrac{\partial I}{G_\lambda \partial b_{\kappa,\kappa'}} = K^{(\lambda)}_{\kappa,\kappa'}, \\[2mm] \dfrac{\partial I}{2H_\lambda \partial a_{\kappa,\kappa}} = -\dfrac{\partial I}{2G_\lambda \partial b_{\kappa,\kappa}} = K^{(\lambda)}_{\kappa,\kappa}. \end{cases}$$

Quibus in formulis, sicuti in antecedentibus, post differentiationem ponendum est $G = G_\lambda$, $H = H_\lambda$. Fit porro e (16.), (27.) (31.):

$$32.\quad \varrho^{(\lambda)} = \frac{1}{(G_1 H_\lambda - H_1 G_\lambda)(G_2 H_\lambda - H_2 G_\lambda)\dots(G_n H_\lambda - H_n G_\lambda)},$$

ideoque

$$33.\quad \beta^{(\lambda)}_\kappa \beta^{(\lambda)}_{\kappa'} = \frac{K^{(\lambda)}_{\kappa,\kappa'}}{(G_1 H_\lambda - H_1 G_\lambda)(G_2 H_\lambda - H_2 G_\lambda)\dots(G_n H_\lambda - H_n G_\lambda)}.$$

Docent formulae (30.) unica formata aequatione $I = 0$, cuius radices $\frac{G_1}{H_1}, \frac{G_2}{H_2} \dots \frac{G_n}{H_n}$, determinari etiam ipsos substitutionis propositae coëfficientes $\beta^{(\lambda)}_\kappa$.

29.

Alia formularum systemata memoratu digna hoc modo inveniuntur. Statuamus:

$$34.\quad \begin{cases} a_{\kappa,1} x_1 + a_{\kappa,2} x_2 \dots + a_{\kappa,n} x_n = t_\kappa, \\ b_{\kappa,1} x_1 + b_{\kappa,2} x_2 \dots + b_{\kappa,n} x_n = v_\kappa, \end{cases}$$

de quibus aequationibus vice versa sequuntur hae:

$$35.\quad \begin{cases} (\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}) x_\kappa = A x_\kappa = A_{\kappa,1} t_1 + A_{\kappa,2} t_2 \dots + A_{\kappa,n} t_n, \\ (\Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \dots b_{n,n}) x_\kappa = B x_\kappa = B_{\kappa,1} v_1 + B_{\kappa,2} v_2 \dots + B_{\kappa,n} v_n. \end{cases}$$

Fit autem e (10.), (34.) etiam

$$36.\quad \begin{cases} \alpha'_\kappa . G_1 y_1 + \alpha''_\kappa . G_2 y_2 \dots + \alpha^{(n)}_\kappa . G_n y_n = t_\kappa, \\ \alpha'_\kappa . H_1 y_1 + \alpha''_\kappa . H_2 y_2 \dots + \alpha^{(n)}_\kappa . H_n y_n = v_\kappa, \end{cases}$$

de quibus aequationibus deducitur:

$$37.\quad \begin{cases} G_\kappa y_\kappa = \beta^{(\kappa)}_1 t_1 + \beta^{(\kappa)}_2 t_2 \dots + \beta^{(\kappa)}_n t_n, \\ H_\kappa y_\kappa = \beta^{(\kappa)}_1 v_1 + \beta^{(\kappa)}_2 v_2 \dots + \beta^{(\kappa)}_n v_n. \end{cases}$$

Substituatur in his aequationibus:

$$y_\kappa = \alpha^{(\kappa)}_1 x_1 + \alpha^{(\kappa)}_2 x_2 \dots + \alpha^{(\kappa)}_n y_n;$$

quo facto de iis porro deducitur:

$$38.\quad\begin{cases} x_\varkappa = \frac{\beta'_\varkappa}{G_1}(\beta'_1 t_1 + \beta'_2 t_2 \ldots + \beta'_n t_n) + \\ \quad\frac{\beta''_\varkappa}{G_2}(\beta''_1 t_1 + \beta''_2 t_2 \ldots + \beta''_n t_n) + \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad\frac{\beta^{(n)}_\varkappa}{G_n}(\beta^{(n)}_1 t_1 + \beta^{(n)}_2 t_2 \ldots + \beta^{(n)}_n t_n); \\ x_\varkappa = \frac{\beta'_\varkappa}{H_1}(\beta'_1 v_1 + \beta'_2 v_2 \ldots + \beta'_n v_n) + \\ \quad\frac{\beta''_\varkappa}{H_2}(\beta''_1 v_1 + \beta''_2 v_2 \ldots + \beta''_n v_n) + \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad\frac{\beta^{(n)}_\varkappa}{H_n}(\beta^{(n)}_1 v_1 + \beta^{(n)}_2 v_2 \ldots + \beta^{(n)}_n v_n). \end{cases}$$

Quibus formulis comparatis cum (35.), predit:

$$39.\quad\begin{cases} \frac{A_{\varkappa,\lambda}}{A} = \frac{\beta'_\varkappa \beta'_\lambda}{G_1} + \frac{\beta''_\varkappa \beta''_\lambda}{G_2} \ldots + \frac{\beta^{(n)}_\varkappa \beta^{(n)}_\lambda}{G_n}, \\ \frac{B_{\varkappa,\lambda}}{B} = \frac{\beta'_\varkappa \beta'_\lambda}{H_1} + \frac{\beta''_\varkappa \beta''_\lambda}{H_2} \ldots + \frac{\beta^{(n)}_\varkappa \beta^{(n)}_\lambda}{H_n}. \end{cases}$$

Si in his aequationibus per coëfficientes $\alpha^{(\varkappa)}_\lambda$ exhibemus coëfficientes $\beta^{(\varkappa)}_\lambda$ nec non quantitates $\alpha_{\varkappa,\varkappa'}$, quod fit per formulas (2), aequationes illae identicae evadere debent. Afficiuntur autem coëfficientes $\beta^{(\varkappa)}_\lambda$ omnes eodem denominatore

$$\Sigma \pm \alpha'_1 \alpha''_2 \ldots \alpha^{(n)}_n.$$

Unde si expressiones (39.) sub eundem denominatorem redigimus, ac denominatores in utraque aequationum parte aequiparamus, colligitur:

$$40.\quad\begin{cases} A = \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n} = [\Sigma \pm \alpha'_1 \alpha''_2 \ldots \alpha^{(n)}_n]^2 G_1 G_2 \ldots G_n, \\ B = \Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \ldots b_{n,n} = [\Sigma \pm \alpha'_1 \alpha''_2 \ldots \alpha^{(n)}_n]^2 H_1 H_2 \ldots H_n. \end{cases}$$

Unde etiam sequitur e §. 5.:

$$41.\quad (\Sigma \pm \beta_{1,1} \beta_{2,2} \ldots \beta_{n,n})^2 = \frac{G_1 G_2 \ldots G_n}{A} = \frac{H_1 H_2 \ldots H_n}{B}.$$

De formula

$$\frac{G_1 G_2 \ldots G_n}{A} = \frac{H_1 H_2 \ldots H_n}{B}$$

per considerationes similes iis, quibus §. 5. usi sumus, aequationem (9.) via directa derivare licet.

Sequitur e (39.), posito $\frac{A_{\varkappa,\lambda}}{A}$, $\frac{B_{\varkappa,\lambda}}{B}$ loco $a_{\varkappa,\lambda}$, $b_{\varkappa,\lambda}$, simul $\alpha^{(\varkappa)}_\lambda$, $G_\varkappa$, $H_\varkappa$ abire in $\beta^{(\varkappa)}_\lambda$, $\frac{1}{G_\varkappa}$, $\frac{1}{H_\varkappa}$; unde etiam A, B, $A_{\varkappa,\lambda}$, $B_{\varkappa,\lambda}$, $\beta^{(\varkappa)}_\lambda$ in $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $a_{\varkappa,\lambda}$, $b_{\varkappa,\lambda}$, $\alpha^{(\varkappa)}_\lambda$ abeunt.

IV. Theoremata varia de transformatione et determinatione integralium multiplicium.

30.

His breviter annectam varia theoremata de transformatione et determinatione integralium multiplicium, quae aliam adhuc docent applicationem quaestionum algebraicarum propositarum, atque in Problemate II. dedimus. Eum in finem antemittimus, quae sequuntur.

Supponamus

$$1.\quad x_1 x_1 + x_2 x_2 \ldots + x_n x_n = 1,$$

sitque

$$2.\quad \frac{x_1}{x_n} = \xi_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = \xi_2, \quad \ldots \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = \xi_{n-1};$$

facile probatur, fore:

$$3.\quad \frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n} = \frac{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \ldots \partial \xi_{n-1}}{[1 + \xi_1 \xi_1 + \xi_2 \xi_2 \ldots + \xi_{n-1} \xi_{n-1}]^{\frac{n}{2}}} = x_n^n \partial \xi_1 \partial \xi_2 \ldots \partial \xi_{n-1}.$$

Sit porro:

$$4.\quad \xi_1 = \frac{m_1}{m_n} v_1, \quad \xi_2 = \frac{m_2}{m_n} v_2, \quad \ldots \quad \xi_{n-1} = \frac{m_{n-1}}{m_n} v_{n-1},$$

designantibus $m_1, m_2, \ldots m_n$ constantes: fit e (3.):

$$5.\quad \frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n} = \frac{m_1 m_2 \ldots m_n \partial v_1 \partial v_2 \ldots \partial v_{n-1}}{[m_1^2 v_1 v_1 + m_2^2 v_2 v_2 \ldots + m_{n-1}^2 v_{n-1} v_{n-1} + m_n^2]^{\frac{n}{2}}}.$$

Sit rursus:

$$6.\quad y_1 y_1 + y_2 y_2 \ldots + y_n y_n = 1,$$

atque

$$7.\quad v_1 = \frac{y_1}{y_n}, \quad v_2 = \frac{y_2}{y_n}, \quad \ldots \quad v_{n-1} = \frac{y_{n-1}}{y_n};$$

habetur eodem modo atque (3.):

$$\frac{\partial y_1 \partial y_2 \ldots \partial y_{n-1}}{y_n} = y_n^n \partial v_1 \partial v_2 \ldots \partial v_{n-1};$$

qua formula substituta in (5.), prodit haec formula memorabilis:

$$\frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n} = \frac{m_1 m_2 \ldots m_n \partial y_1 \partial y_2 \ldots \partial y_{n-1}}{y_n [m_1^2 y_1 y_1 + m_2^2 y_2 y_2 \ldots + m_n^2 y_n y_n]^{\frac{n}{2}}}.$$

Habentur autem e (2.), (4.), (7.) inter variabiles $x_1, x_2, \ldots x_n$ et $y_1, y_2, \ldots y_n$ relationes sequentes.

$$9.\quad \begin{cases} x_p = \dfrac{m_p y_p}{[m_1^2 y_1 y_1 + m_2^2 y_2 y_2 \ldots + m_n^2 y_n y_n]^{\frac{1}{2}}}, \\ y_p = \dfrac{x_p}{m_p \left[\dfrac{x_1}{m_1}\dfrac{x_1}{m_1} + \dfrac{x_2}{m_2}\dfrac{x_2}{m_2} \ldots + \dfrac{x_n}{m_n}\dfrac{x_n}{m_n}\right]^{\frac{1}{2}}}, \\ m_1^2 y_1 y_1 + m_2^2 y_2 y_2 \ldots + m_n^2 y_n y_n = \dfrac{1}{\dfrac{x_1}{m_1}\dfrac{x_1}{m_1} + \dfrac{x_2}{m_2}\dfrac{x_2}{m_2} \ldots + \dfrac{x_n}{m_n}\dfrac{x_n}{m_n}}. \end{cases}$$

Si variabilibus $x_1, x_2 \ldots x_n$ valores omnes positivi tribuuntur, qui aequationi (1.) satisfaciunt, variabiles $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_{n-1}$ valores omnes induunt a 0 usque ∞, et vice versa. Simul variabiles $v_1, v_2 \ldots v_{n-1}$ valores omnes induunt a 0 usque ∞, ideoque variabiles $y_1, y_2 \ldots y_n$ valores omnes positivos, qui aequationi (6.) satisfaciunt.

31.

Determinemus pro limitibus assignatis integrale

$$10.\quad S = \int^{n-1} \frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n} = \int^{n-1} \frac{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \ldots \partial \xi_{n-1}}{[1 + \xi_1 \xi_1 + \xi_2 \xi_2 \ldots + \xi_{n-1} \xi_{n-1}]^{\frac{n}{2}}}$$

Eum in finem integrale sub eadem forma exhibeo, quae pro $n = 3$ usitata est, ponendo

$$11.\quad \begin{cases} x_1 = \cos\varphi_1, \\ x_2 = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \\ x_3 = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}, \\ x_n = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1}. \end{cases}$$

Quibus statutis facile probatur, fieri

$$12.\quad \frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}{x_n} = \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2}\, \partial\varphi_1 \partial\varphi_2 \ldots \partial\varphi_{n-1})$$

uti iam indicavi in commentatione anteriore supra citata (Vol. VIII.). Integrali $(n-1)$tuplo inter limites assignatos sumto, anguli $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$ a 0 usque $\frac{\pi}{2}$ extendi debent. Fit autem, quae sunt formulae notae,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\varphi\, \partial\varphi = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1}\varphi\, \partial\varphi = \frac{2.4.6\ldots 2m}{3.5.7\ldots(2m+1)}.$$

Unde, *quoties n est numerus par*, erimus

$$S = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdots \frac{1.3 \ldots (n-5)}{2.4 \ldots (n-4)} \cdot \frac{1.3 \ldots (n-3)}{2.4 \ldots (n-2)} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{2.4.6}{3.5.7} \cdots \frac{2.4 \ldots (n-4)}{3.5 \ldots (n-3)},$$

sive

$$13. \quad S = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{(n-2)(n-4) \ldots 2}.$$

Quoties vero n est impar, fit

$$S = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdots \frac{1.3 \ldots (n-4)}{2.4 \ldots (n-3)}, \frac{2}{3} \cdot \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{2.4.6}{3.5.7} \cdots \frac{2.4 \ldots (n-3)}{3.5 \ldots (n-2)},$$

sive

$$14. \quad S = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)(n-4) \ldots 3}.$$

32.

Invento valore ipsius S, habetur inter limites assignatos valor integralis:

$$15. \quad \int^{n-1} \frac{\partial y_1 \, \partial y_2 \ldots \partial y_{n-1}}{y_n [m_1^2 y_1 y_1 + m_2^2 y_2 y_2 \ldots + m_n^2 y_n y_n]^{\frac{n}{2}}} = \frac{S}{m_1 m_2 \ldots m_n};$$

quae magno usui est formula.

Ponamus in ea $m_1^2 + x$, $m_2^2 + x$, ..., $m_n^2 + x$ loco m_1^2, m_2^2, ... m_n^2, fit:

$$16. \quad \int^{n-1} \frac{\partial y_1 \, \partial y_2 \ldots \partial y_{n-1}}{y_n [x + m_1^2 y_1 y_1 + m_2^2 y_2 y_2 \ldots + m_n^2 y_n y_n]^{\frac{n}{2}}} = \frac{S}{\sqrt{[(x+m_1^2)(x+m_2^2) \ldots (x+m_n^2)]}}.$$

Qua secundum quantitates x, m_1, m_2 .... m_n differentiata, alias varias eruis.

Ducamus (16.) in ∂x, atque integrationem novam instituamus a $x = 0$ usque ad $x = \infty$; quo facto, prodit haec formula:

$$17. \quad \int^{n-1} \frac{\partial y_1 \, \partial y_2 \ldots \partial y_{n-1}}{y_n [m_1^2 y_1 y_1 + m_2^2 y_2 y_2 \ldots + m_n^2 y_n y_n]^{\frac{n}{2}-1}} = \frac{n-2}{2} S \int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{[(x+m_1^2)(x+m_2^2) \ldots (x+m_n^2)]}}.$$

De qua, advocata (8.), etiam hanc deducis elegantem:

$$18.\quad \int^{n-1} \frac{\partial x_1\,\partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n\left[\frac{x_1 x_1}{m_1 m_1} + \frac{x_2 x_2}{m_2 m_2} \ldots + \frac{x_n x_n}{m_n m_n}\right]} =$$

$$\frac{n-2}{2} S \int_0^\infty \frac{m_1 m_2 \ldots m_n \partial x}{\sqrt{[(x+m_1^2)(x+m_2^2)\ldots(x+m_n^2)]}},$$

sive posito $\frac{1}{m_p}$ loco m_p, ac deinde $\frac{1}{x}$ loco x:

$$19.\quad \int^{n-1} \frac{\partial x_1\,\partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n[m_1^2 x_1 x_1 + m_2^2 x_2 x_2 \ldots m_n^2 x_n x_n]} =$$

$$\frac{n-2}{2} S \int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{[(1+m_1^2 x)(1+m_2^2 x)\ldots(1+m_n^2 x)]}} =$$

$$\frac{n-2}{2} S \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{2}-2}.\partial x}{\sqrt{[(x+m_1^2)(x+m_2^2)\ldots(x+m_n^2)]}},$$

Quam formulam ex elegantissimis esse censeo. Generaliorem nanciscimur modo sequente.

Sit X functio quaelibet ipsius x, quam iteratis vicibus a $x = x$ usque ad $x = a$ integremus; sit porro

$$X_m = \int_x^a x^m X \partial x;$$

habetur nota formula:

$$20.\quad 1.2.3 \ldots p \int^{p+1} X \partial x^{p+1} = X_p - p x X_{p-1} + p_2 x^2 X_{p-2} \ldots \pm x^p X_0,$$

ubi

$$p_m = \frac{p(p-1)\ldots(p+1-m)}{1.2\ldots m}.$$

Sit $a = \infty$, $p+1 < \frac{n}{2}$, porro statuatur:

$$X = \int^{n-1} \frac{\partial y_1\,\partial y_2 \ldots \partial y_{n-1}}{y_n[x + m_1^2 y_1 y_1 + m_2^2 y_2 y_2 \ldots + m_n^2 y_n y_n]^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{S}{\sqrt{[(x+m_1^2)(x+m_2^2)\ldots(x+m_n^2)]}},$$

eruitur, $p+1$ vicibus integratione facta a $x = x$ usque $x = \infty$:

$$21.\quad \int^{p+1} X \partial x^{p+1} = \frac{2^{p+1}}{(n-2)(n-4)\ldots(n-2p-2)} \int^{n-1} \frac{\partial y_1\,\partial y_2 \ldots \partial y_{n-1}}{y_n[x + m_1^2 y_1 y_1 + m_2^2 y_2 y_2 \ldots + m_n^2 y_n y_n]^{\frac{n}{2}-p-1}}$$

$$= \frac{X_p - p_1 x X_{p-1} + p_2 x^2 X_{p-2} \ldots \pm x^p X_0}{1.2.3 \ldots p},$$

siquidem ponitur:

$$X_m = S \int_x^\infty \frac{x^m \partial x}{\sqrt{[(x+m_1^2)(x+m_2^2)\ldots(x+m_n^2)]}}.$$

De qua formula, posito $x = 0$, ac scribendo $p-1$ loco p, nanciscimur.

$$22.\quad \frac{2^p.1.2.3\ldots.(p-1)}{(n-2)(n-4)\ldots.(n-2p)}\int^{n-1}\frac{\partial y_1\,\partial y_2\ldots.\partial y_{n-1}}{y_n\,[m_1^2\,y_1y_1+m_2^2\,y_2y_2\ldots.+m_n^2\,y_ny_n]^{\frac{n}{2}-p}}$$
$$=S\int_0^\infty\frac{x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt{[(x+m_1^2)(x+m_2^2)\ldots.(x+m_n^2)]}}.$$

De qua formula per (8.), (9.) deducis hanc:

$$23.\quad \frac{2^p.1.2.3\ldots.(p-1)}{(n-2)(n-4)\ldots.(n-2p)}\int^{n-1}\frac{\partial x_1\,\partial x_2\ldots.\partial x_{n-1}}{x_n\left[\frac{x_1\,x_1}{m_1\,m_1}+\frac{x_2\,x_2}{m_2\,m_2}\ldots.+\frac{x_n\,x_n}{m_n\,m_n}\right]^p}$$
$$=S\int_0^\infty\frac{m_1\,m_2\ldots.m_n\,x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt{[(x+m_1^2)(x+m_2^2)\ldots.(x+m_n^2)]}},$$

sive etiam, ponendo $\frac{1}{m_1}$, $\frac{1}{m_2}$, ... $\frac{1}{m_n}$ loco m_1, m_2, ... m_n, ac deinde $\frac{1}{x}$ loco x:

$$24.\quad \frac{2^p.1.2.3\ldots.(p-1)}{(n-2)(n-4)\ldots.(n-2p)}\int^{n-2}\frac{\partial x_1\,\partial x_2\ldots.\partial x_{n-1}}{x_n\,[m_1^2\,x_1x_1+m_2^2\,x_2x_2\ldots.+m_n^2\,x_nx_n]^p}$$
$$=S\int_0^\infty\frac{x^{p-1}\,\partial x}{\sqrt{[(1+m_1^2x)(1+m_2^2x)\ldots.(1+m_n^2x)]}}$$
$$=S\int_0^\infty\frac{x^{\frac{n}{2}-p-1}\,\partial x}{\sqrt{[(x+m_1^2)(x+m_2^2)\ldots.(x+m_n^2)]}}.$$

In formulis (22. — 24.) suppositum est, esse p numerum integrum >0 atque $<\frac{n}{2}$. Ubi n est numerus par, formulae (23.), (24.) eodem redeunt, dummodo loco p ponitur $\frac{n}{2}-p$. Ubi n est numerus impar, docet comparatio formularum (22.), (24.), sufficere, ut sit $2p$ numerus integer >0 atque $<n$; quo statuto, utraque formula inter se convenit, posito $\frac{n}{2}-p$ loco p, dummodo coëfficientem numericum, posito $2p=q$, exhibes hunc in modum:

$$\frac{2^p.1.2.3\ldots.(p-1)}{(n-2(n-4)\ldots.(n-2p)}=2.\frac{[(q-2)(q-4)\ldots.][(n-q-2)(n-q-3)\ldots.]}{(n-2)(n-4)(n-6)\ldots.},$$

tribus productis continuatis, quousque in numeris positivis possunt.

33.

Integralia simplicia, quibus in antecedentibus integralia $(n-1)$tupla expressimus, exhiberi possunt, etiamsi quantitates m_1^2, m_2^2 .... m_n^2 non explicite datae sint, sed ut radices aequationis algebraicae n^{ti} ordinis. Cuius observationis usum commodum in sequentibus videbimus.

Integralia $(n-1)$tupla ad valores tantum *positivos* variabilium $x_1, x_2, \ldots x_n$ extendimus; in sequentibus integralia ad valores earum extendemus omnes, sive positivos, sive negativos, qui satisfaciunt aequationi (1.):

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 \ldots + x_n x_n = 1.$$

Quam rem ita intelligimus, ac si loco integralis

$$\int^{n-1} \frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n f(x_1, x_2 \ldots x_n)},$$

ponatur summa duorum,

$$\int^{n-1} \frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n f(x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, x_n)} + \int^{n-1} \frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n f(x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, x_n)},$$

in quibus statui debet

$$x_n = \sqrt{((1 - x_1 x_1 - x_2 x_2 \ldots - x_{n-1} x_{n-1}))},$$

valore radicalis semper positivo accepto, ac variabilibus $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ valores reales cum positivi tum negativi tribuendi sunt omnes, pro quibus

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 \ldots + x_{n-1} x_{n-1} = 1.$$

Adhibeamus iam substitutiones, quas in Problemate I. proposuimus, e quibus cum fiat:

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 \ldots + x_n x_n = y_1 y_1 + y_2 y_2 \ldots + y_n y_n,$$

pro limitibus assignatis integralia etiam respectu variabilium $y_1, y_2 \ldots y_n$ ad valores earum omnes extendi debent cum positivos tum negativos, qui aequationi

$$y_1 y_1 + y_2 y_2 \ldots + y_n y_n = 1,$$

satisfaciunt. Per quas substitutiones transformavimus in Probl. I. functionem homogeneam secundi ordinis variabilium $x_1, x_2, \ldots x_n$,

$$V = \sum_{\varkappa, \lambda} a_{\varkappa, \lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

in hanc,

$$V = G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 \ldots + G_n y_n y_n.$$

Demonstravimus porro in Probl. II. §. 19. theor. 3., iisdem substitutionibus adhibitis, esse

$$\frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n} = \frac{\partial y_1 \partial y_2 \ldots \partial y_{n-1}}{y_n}.$$

Unde fit:

$$25. \quad \int^{n-1} \frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n V^m} = \int^{n-1} \frac{\partial y_1 \partial y_2 \ldots \partial y_{n-1}}{y_n [G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 \ldots + G_n y_n y_n]^m}.$$

Supponamus, functionem V pro valoribus omnibus variabilium $x_1, x_2, \ldots \ldots x_n$ valores tantum positivos induere, sicuti ex. gr. locum habet, ubi V proponitur tamquam summa complurium quadratorum functionum linearium ipsarum $x_1, x_2, \ldots x_n$: quo statuto, necessario quantitates $G_1, G_2, \ldots G_n$ omnes erunt positivae.

Observo iam, si in (25.) integrale $(n-1)$tuplum extenditur ad variabilium $y_1, y_2, \ldots y_n$ valores omnes cum positivos tum negativos, pro quibus

$$y_1 y_1 + y_2 y_2 \ldots + y_n y_n = 1,$$

integralis valorem esse 2^ntuplum valoris, quem induit, ubi ad earum valores tantum positivos extendatur. Hinc posito $m = \frac{n}{2}$, e formulis (25.), (15.) nanciscimur:

$$26. \quad \int^{n-1} \frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n [\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda]^{\frac{n}{2}}} = \frac{2^n S}{\sqrt{(G_1 G_2 \ldots G_n)}},$$

sive e formula (18.) §. 7.:

$$27. \quad \int^{n-1} \frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n (\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda)^{\frac{n}{2}}} = \frac{2^n S}{\sqrt{(\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n})}}.$$

De qua formula, differentiationibus secundum constantes $a_{\varkappa,\lambda}$ institutis, rursus innumeras alias deducis.

Vocemus Γ expressionem, in quam abit ipsa

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n},$$

ubi loco $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots a_{n,n}$ scribimus $a_{1,1}+x, a_{2,2}+x, \ldots a_{n,n}+x$. Quae ab expressione Γ §. 8. proposita eo tantum differt, quod loco x scriptum est $-x$. Unde e formula §. 8. proposita fit:

$$\Gamma = (x+G_1)(x+G_2)\ldots(x+G_n).$$

Hinc si in formula (25.) ponitur $m = \frac{n}{2} - p$, $m = p$, ubi p est numerus integer > 0 atque $< \frac{n}{2}$, habetur e (22.), (24.):

$$28. \begin{cases} \int^{n-1} \frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n (\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda)^{\frac{n}{2}-p}} = \frac{2^{n-p}(n-2)(n-4)\ldots(n-2p)}{1.2\ldots(p-1)} S \int_0^\infty \frac{\partial x . x^{p-1}}{\sqrt{\Gamma}}; \\ \int^{n-1} \frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n (\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda)^{p}} = \frac{2^{n-p}(n-2)(n-4)\ldots(n-2p)}{1.2\ldots(p-1)} S \int_0^\infty \frac{\partial x . x^{\frac{n}{2}-p-1}}{\sqrt{\Gamma}}. \end{cases}$$

Quae formulae eo maxime se commendant, quod integralia $(n-1)$tupla proposita ad integralia simplicia absque ulla aequationis algebraicae resolutione revocantur. Ad generaliora adhuc pervenimus modo sequente.

34.

Posito

$$z_1 z_1 + z_2 z_2 \ldots + z_n z_n = 1$$

elementi

$$\frac{\partial z_1\,\partial z_2\,\ldots\,\partial z_{n-1}}{z_n},$$

quod designemus per ∂Z, expressionem generalem per alias variabiles antemittamus.

Sint z_1, z_2, ... z_n datae functiones aliarum variabilium t_1, t_2, ... t_{n-1}, erit

$$z_n \partial Z = \left(\Sigma \pm \frac{\partial z_1}{\partial t_1}\frac{\partial z_2}{\partial t_2}\ldots\frac{\partial z_{n-1}}{\partial t_{n-1}}\right).\partial t_1 \partial t_2 \ldots \partial t_{n-1},$$

siquidem sub signo summatorio indices ipsarum z_1, z_2, ... z_n omnibus modis permutamus atque singulis terminis per notam regulam signa idonea praefigimus. Si expressionem illam iterum ducimus in z_n, atque simili modo expressiones omnes $z_n z_n \partial Z$ exhibemus per differentialia omnium praeter ipsius z_n variabilium z_1, z_2, ... z_n, quod fit ope aequationis

$$z_1 \partial z_1 + z_2 \partial z_2 \ldots + z_n \partial z_n = 0,$$

qua unius cuiuslibet variabilis differentialia per reliquarum exprimuntur: nanciscimur, summatione facta:

$$29.\quad \partial Z = \frac{\partial z_1\,\partial z_2\ldots\partial z_{n-1}}{z_n} = \left(\Sigma \pm \frac{\partial z_1}{\partial t_1}\frac{\partial z_2}{\partial t_2}\ldots\frac{\partial z_{n-1}}{\partial t_{n-1}}.z_n\right)\partial t_1 \partial t_2 \ldots \partial t_{n-1},$$

sub signo summatorio ipsarum z indicibus 1, 2, ... n omnimodis permutatis. Quae expressio generalis elementi ∂Z per alias variabiles et propter symmetriam, qua gaudet, memorabilis est, et saepius commode adhiberi potest.

Supponamus, variabiles $z_1, z_2, \ldots z_n$ datas esse sub forma fractionum,

$$z_\nu = \frac{y_\nu}{t},$$

ubi fieri debet,

$$tt = y_1 y_1 + y_2 y_2 \ldots + y_n y_n;$$

sequitur e theoremate 5. §. 20. proposito, fractionibus illis substitutis in (29.), in differentiationibus instituendis denominatorem t considerari posse ut constantem. Unde fit:

$$30.\quad \frac{\partial z_1\,\partial z_2\ldots\partial z_{n-1}}{z_n} = \frac{\left(\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial t_1}\frac{\partial y_2}{\partial t_2}\ldots\frac{\partial y_{n-1}}{\partial t_{n-1}} y_n\right)}{t^n}\,\partial t_1 \partial t_2 \ldots \partial t_{n-1},$$

Expressionem huiusmodi

$$\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial t_1}\frac{\partial y_2}{\partial t_2}\ldots\frac{\partial y_{n-1}}{\partial t_{n-1}} y_n$$

haud difficile probatur, non mutare formam, nisi quod in constantem ducatur, si per alias variabiles x_1, x_2, ... x_n exprimitur, quarum sunt y_1, y_2, ... y_n functiones lineares, datas per formulam:

$$y_n = a_1^{(n)} x_1 + a_2^{(n)} x_2 \dots + a_n^{(n)} x_n.$$

Scilicet his substitutis valoribus, habetur

$$31. \quad \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial t_1} \frac{\partial y_2}{\partial t_2} \dots \frac{\partial y_{n-1}}{\partial t_{n-1}} y_n$$

$$= (\Sigma \pm a_1' a_2'' \dots a_n^{(n)}) \left(\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \dots \frac{\partial x_{n-1}}{\partial t_{n-1}} . x_n \right).$$

In hac formula, n variabiles $x_1, x_2, \dots x_n$ consideramus tamquam functiones $n-1$ variabilium $t_1, t_2, \dots t_{n-1}$; unde inter illas certa quaedam aequatio locum habere debet. Quam si statuimus,

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 \dots + x_n x_n = 1,$$

fit e (29.):

$$\left(\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \dots \frac{\partial x_{n-1}}{\partial t_{n-1}} x_n \right) \partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_{n-1} = \frac{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}}{x_n}$$

unde habemus e (31.):

$$32. \quad \left(\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial t_1} \frac{\partial y_2}{\partial t_2} \dots \frac{\partial y_{n-1}}{\partial t_{n-1}} \right) \partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_{n-1}$$

$$= (\Sigma \pm a_1' a_2'' \dots a_n^{(n)}) \frac{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}}{x_n}.$$

Quoties igitur

$$z_1 z_1 + z_2 z_2 \dots + z_n z_n = 1,$$
$$x_1 x_1 + x_2 x_2 \dots + x_n x_n = 1,$$

atque dantur $z_1, z_2, \dots z_n$ *per* $x_1, x_2, \dots x_n$ *ope formulae:*

$$z_n = \frac{a_1^{(n)} x_1 + a_2^{(n)} x_2 \dots + a_n^{(n)} x_n}{t},$$

ubi fieri debet:

$$\begin{aligned} tt = {} & (a_1' x_1 + a_2' x_2 \dots + a_n' x_n)^2 + \\ & (a_1'' x_1 + a_2'' x_2 \dots + a_n'' x_n)^2 + \\ & \dots \dots \dots \\ & (a_1^{(n)} x_1 + a_2^{(n)} x_2 \dots + a_n^{(n)} x_n)^2, \end{aligned}$$

habetur formula:

$$33. \quad \frac{\partial z_1 \partial z_2 \dots \partial z_{n-1}}{z_n} = (\Sigma \pm a_1' a_2'' \dots a_n^{(n)}) \frac{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}}{x_n t^n}.$$

Substitutio adhibita ita comparata est, ut variabilibus $x_1, x_2, \dots \dots x_n$ tributis valoribus realibus omnibus, qui aequationi

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 \dots + x_n x_n = 1$$

satisfaciunt, variabiles $z_1, z_2, \dots z_n$ valores reales induant omnes, qui aequationi satisfaciunt

$$z_1 z_1 + z_2 z_2 \dots + z_n z_n = 1,$$

ac vice versa.

35.

His praemissis, sint coefficientes $\alpha_m^{(x)}$ ideoque quantitates y_x eaedem atque in Problemate III. adhibitae. Et cum in problemate illo quantitates $H_1, H_2, \ldots H_n$ arbitrariae sint, ponamus omnes $= 1$. Unde fit:

$$V = \sum_{x,\lambda} a_{x,\lambda} x_x x_\lambda = G_1 y_1 y_1 + G_2 y_2 y_2 \ldots + G_n y_n y_n,$$

$$W = \sum_{x,\lambda} b_{x,\lambda} x_x x_\lambda = y_1 y_1 + y_2 y_2 \ldots + y_n y_n;$$

quarum aequationum postrema suggerit:

$$tt = W,$$

unde

$$z_x = \frac{y_x}{\sqrt{W}},$$

ideopue

$$\frac{V}{W} = G_1 z_1 z_1 + G_2 z_2 z_2 \ldots + G_n z_n z_n.$$

Fit porro e formula (40.) §. 29., ubi ponitur $H_1 = H_2 \ldots = H_n = 1$:

$$(\Sigma \pm \alpha'_1 \alpha''_2 \ldots \alpha_n^{(n)})^2 = \Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \ldots b_{n,n}.$$

Unde formulae (33.) suggerunt:

$$34. \begin{cases} \displaystyle\int^{n-1} \frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n V^p W^{\frac{n}{2}-p}} = \frac{1}{\sqrt{(\Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \ldots b_{n,n})}} \int^{n-1} \frac{\partial z_1 \partial z_2 \ldots \partial z_{n-1}}{z_n [G_1 z_1 z_1 + G_2 z_2 z_2 \ldots + G_n z_n z_n]^p}, \\ \displaystyle\int^{n-1} \frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n V^{\frac{n}{2}-p} W^p} = \frac{1}{\sqrt{(\Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \ldots b_{n,n})}} \int^{n-1} \frac{\partial z_1 \partial z_2 \ldots \partial z_{n-1}}{z_n [G_1 z_1 z_1 + G_2 z_2 z_2 \ldots + G_n z_n z_n]^{\frac{n}{2}-p}}. \end{cases}$$

Hinc, quoties p est numerus integer > 0 ac $< \frac{n}{2}$, habetur e (22.), (24.), siquidem integralia proposita ad valores variabilium reales extenduntur omnes, qui aequationibus

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 \ldots + x_n x_n = 1, \quad z_1 z_1 + z_2 z_2 \ldots + z_n z_n = 1,$$

satisfaciunt:

$$35. \begin{cases} \displaystyle\int^{n-1} \frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n V^p W^{\frac{n}{2}-p}} = \frac{2^{n-p}(n-2)(n-4)\ldots(n-2p) S}{1.2.3\ldots(p-1)(\Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \ldots b_{n,n})^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \frac{\partial x \cdot x^{\frac{n}{2}-p-1}}{\sqrt{[(x+G_1)(x+G_2)\ldots(x+G_n)]}}, \\ \displaystyle\int^{n-1} \frac{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n V^{\frac{n}{2}-p} W^p} = \frac{2^{n-p}(n-2)(n-4)\ldots(n-2p) S}{1.2.3\ldots(p-1)(\Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \ldots b_{n,n})^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \frac{\partial x \cdot x^{p-1}}{\sqrt{[(x+G_1)(x+G_2)\ldots(x+G_n)]}}. \end{cases}$$

Quas formulas observo alteram ex altera prodire, functionibus V et W, sive quod idem est, constantibus $a_{x,\lambda}$ et $b_{x,\lambda}$ inter se permutatis, ac posito $\frac{1}{x}$ loco x. Iam si in Probl. III. §. 25. (9.) ponimus $H = 1$, $G = -x$,

sequitur, posito

$$I_{\varkappa,\lambda} = a_{\varkappa,\lambda} + b_{\varkappa,\lambda}.x,$$

fieri

$$\Sigma \pm I_{1,1} I_{2,2} \ldots . I_{n,n} = (\Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \ldots . b_{n,n})(x+G_1)(x+G_2) \ldots . (x+G_n).$$

Qua expressione substituta in (35.), habetur theorema sequens valde generale.

Theorema.

„*Sit*

$$I_{\varkappa,\lambda} = a_{\varkappa,\lambda} + b_{\varkappa,\lambda}\, x,$$

ubi

$$a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}, \quad b_{\varkappa,\lambda} = b_{\lambda,\varkappa},$$

erit, designante p numerum integrum > 0 ac $< \frac{n}{2}$,

$$\int^{n-1} \frac{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots . \partial x_{n-1}}{x_n \left(\sum\limits_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda\right)^p \left(\sum\limits_{\varkappa,\lambda} b_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda\right)^{\frac{n}{2}-p}} =$$

$$\frac{2^{n-p}(n-2)(n-4) \ldots . (n-2p)}{1.2 \ldots . (p-1)} S \int_0^\infty \frac{\partial x . x^{\frac{n}{2}-p-1}}{\sqrt{(\Sigma \pm I_{1,1} I_{2,2} \ldots . I_{n,n})}},$$

integrali $(n-1)$tuplo extenso ad valores reales variabilium $x_1, x_2, \ldots . x_n$ omnes, qui aequationi

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 \ldots . + x_n x_n = 1$$

satisfaciunt, ac posito, ubi n par,

$$S = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{(n-2)(n-4) \ldots . 2},$$

ubi n impar,

$$S = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)(n-4) \ldots . 3}."$$

Etiam hoc theorema generale ea insigni gaudet proprietate, ut integrale $(n-1)$tuplum revocetur ad simplex absque ulla aequationis algebraicae resolutione. Qua fit, ut per varias differentiationes, institutas secundum constantes $a_{\varkappa,\lambda}$, $b_{\varkappa,\lambda}$, de theoremate illo tamquam de largo fonte innumera alia facile decurrant theoremata.

Ceterum supponimus in theoremate apposito, functiones

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda, \quad \sum_{\varkappa,\lambda} b_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda,$$

pro valoribus realibus variabilium $x_1, x_2, \ldots . x_n$ neque evanescere posse, neque alios negativos valores induere. Alioquin enim integrale $(n-1)$tuplum

propositum aut in infinitum abiret aut adeo imaginarium foret. Hinc probari potest, etiam quantitates G_1, G_2, ... G_n omnes fore positivas, quod et ipsum in antecedentibus vel tacite supposuimus.

Si in theorematis antecedentibus ponitur $n=3$, habentur theoremata, quae in Commentatione nostra Tertia de Integralibus duplicibus (Vol. X.) promulgavimus *).

His addam aliud theorema, quod e theoremate §. 24. proposito fluit, si loco $n-1$ variabilium ξ_1, ξ_2, ... ξ_{n-1} ponantur n variabiles x_1, x_2, ... x_n, simulque in formula (24.) statuatur n impar atque $p=\frac{n-1}{2}$.

Theorema.

Sit n numerus impar, ac suppponatur:

$$\frac{p_1 p_1}{q_1 q_1}+\frac{p_2 p_2}{q_2 q_2} \dots + \frac{p_n p_n}{q_n q_n} < 1,$$

erit

$$\int^{n-1} \frac{\partial x_1 \, \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}}{x_n \left[(p_1+q_1 x_1)^2+(p_2+q_2 x_2)^2 \dots +(p_n+q_n x_n)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}} =$$

$$\frac{2 . \pi^{\frac{n-1}{2}}}{1.2 \dots \left(\frac{n-3}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{\left[x(x+q_1 q_1)(x+q_2 q_2) \dots (x+q_n q_n)\left(1-\frac{p_1 p_1}{x+q_1 q_1}-\frac{p_2 p_2}{x+q_2 q_2} \dots -\frac{p_n p_n}{x+q_n q_n}\right)\right]}},$$

integrali $(n-1)$*tuplo extenso ad variabilium* x_1, x_2, ... x_n *valores reales omnes, qui aequationi*

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 \dots + x_n x_n = 1,$$

satisfaciunt.

Scrib. d. 23. Aug. 1833.

---

*) In commentationis citatae formula postrema, quae theoremati apposito respondet, typothetae errore loco $\sqrt{(xX)}$ positum est $\sqrt{(X)}$.

2.

Über die Zeichen der Mathematik.

(Von Herrn Dr. *Schellbach* zu Berlin.)

---

§. 1.

Um den Gedanken gleich an einen bestimmten Gegenstand zu knüpfen, stellen wir hier die einfachen Rechnungsarten zusammen.

Addition	$a + b = c$	.... 1.
Subtraction	$c - a = b$	.... 2.
	$c - b = a$	.... 3.
Multiplication	$ab = c$	.... 4.
Division	$\frac{c}{a} = b$	.... 5.
	$\frac{c}{b} = a$	.... 6.
Logarithmirung	$\overset{a}{\underset{b}{\times}} = c$	.... 7.
Extrahirung	$a^{\frac{1}{c}} = b$	.. 8.
Potenzirung	$b^c = a$	. 9.

Das Zusammenfallen der Rechnungsarten (2.) und (3.) in die Subtraction, so wie (5.) und (6.) in die Division, erklärt sich aus der Gleichgültigkeit der Summanden und Factoren; in der dritten Gruppe, wo die Gröſsen a, b, c verschiedene Bedeutung haben, sind auch die Rechnungsarten gesondert, welche durch sie bedingt werden.

Die Nothwendigkeit der Bezeichnungsweise des Potenzirens und Extrahirens zeigt sich darin, daſs jetzt weniger mit der Grundgröſse selbst operirt wird, als mit dem Operationszeichen, d. h. daſs die Rechnung mit Potenzen und Wurzeln auf eine Rechnung mit ihren Exponenten zurückgebracht ist. Der Gedanke bietet sich von selbst dar, auch die Logarithmen durch eine schickliche Bezeichnung diesen Vortheil genieſsen zu lassen; daher ist statt der unvollständigen Formel

$$\log a = c$$

die Gleichung

$$\underset{b}{\overset{a}{\times}} = c$$

entstanden.

Die Wahl einer **divisionsförmigen** Bezeichnung der Logarithmen rechtfertigt sich wohl dadurch am besten, dafs

$$\frac{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \ldots}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \ldots}$$

der Logarithmus von a für die Basis b ist.

Der Satz vom Modul wird dann auf folgende Weise geschrieben:

$$10. \quad \underset{b}{\overset{a}{\times}}\ \underset{k}{\overset{b}{\times}} = \underset{k}{\overset{a}{\times}}$$

woraus sogleich folgt:

$$11. \quad 1 = \underset{a}{\overset{a}{\times}} = \underset{b}{\overset{a}{\times}}\ \underset{a}{\overset{b}{\times}} = \underset{b}{\overset{a}{\times}}\ \underset{c}{\overset{b}{\times}}\ \underset{a}{\overset{c}{\times}} = \underset{b}{\overset{a}{\times}}\ \underset{c}{\overset{b}{\times}}\ \underset{d}{\overset{c}{\times}}\ \underset{a}{\overset{d}{\times}} = \ldots$$

Nennt man in der Gleichung (7.) a den Logarithmandus, b die Basis und c den Logarithmus, so läfst sich (11.) durch den Satz ausdrücken: **In einem Producte verschiedener Logarithmen heben sich gleiche Basen gegen gleiche Logarithmanden auf.**

In dieser Form ausgesprochen, prägt sich der Satz (10.) vom Modul dem Gedächtnifs auf der Stelle ein, weil er hier mathematischer erscheint, als in der gewöhnlichen Weise.

Man hat aufserdem folgende Verwandlungen:

$$12. \quad \frac{m}{n}\ \underset{b}{\overset{a}{\times}} = \underset{b}{\overset{a^{\frac{m}{n}}}{\times}} = \underset{b^{\frac{n}{m}}}{\overset{a}{\times}} = \underset{b^n}{\overset{a^m}{\times}} = \underset{b^{\frac{1}{m}}}{\overset{a^{\frac{1}{n}}}{\times}}$$

Auch hier zeigt sich der Vortheil einer **divisionsförmigen** Logarithmen-Bezeichnung deutlich.

So wie für die Multiplication und Division verschiedene Bezeichnungen beibehalten sind, weil sich manche Formeln auf die eine Weise geschickter darstellen lassen, als auf die andere, so kann man auch aus demselben Grunde für die Logarithmen noch eine zweite Bezeichnung einführen. Es ist nemlich ganz gleichbedeutend

$$a \times b \text{ und } a\,.\,b$$

$$\frac{a}{b} \text{ und } a : b$$

eben so sei es mit

$$\underset{b}{\overset{a}{\times}} \text{ und } a \vdots b$$

Sind Logarithmand oder Basis zusammengesetzte Gröfsen, so wird man die letzte Bezeichnung anwenden, also den Logarithmus von $a+b$ für die Basis c schreiben:

$$(a+b)\vdots c$$

Dieser Bezeichnung wird man sich ebenfalls bedienen, wenn der Logarithmus von einem Logarithmus genommen werden soll; also drückt

$$(a\vdots b)\vdots c$$

den Logarithmus von $a\vdots b$ für die Basis c aus.

Durch diese Bezeichnung wird nun auch die formelle Auflösung der Gleichung

$$a^b = c$$

den übrigen mathematischen Operationen analoger; denn so wie man sie sonst in Bezug auf a gewissermafsen multiplicationsweise auflöste, durch

$$a^{b\cdot\frac{1}{b}} = c^{\frac{1}{b}} \text{ d. h. } a = c^{\frac{1}{b}};$$

so löst man sie jetzt in ähnlichem Sinne divisionsweise auf in Bezug auf b durch

$$\overset{a^b}{\underset{a}{\times}} = \overset{c}{\underset{a}{\times}}, \text{ d. h. } b = \overset{c}{\underset{a}{\times}}$$

§. 2.

Der nächste Fortgang von den obigen 9 ersten Gleichungen ist durch die Gleichgültigkeit der Anzahl der Elemente a, b, c gegeben. Sind diese ohne alle Beziehung zu einander, dann entwickelt sich aus den aufgestellten Gleichungen die Buchstabenrechnung. Treten sie aber nur in die einfachste Beziehung der Aufeinanderfolge, so müssen wieder neue Zeichen gewählt werden, die sich an die schon vorhandenen anschliefsen. Hier sind nun zunächst folgende wesentliche Unterschiede der mathematischen Zeichen festzuhalten.

1. Entwicklungszeichen, Zeichen, die aus der Entwickelung der Mathematik selbst entstanden sind, ohne welche überhaupt kein wahrer Fortschritt dieser Wissenschaft möglich ist. Sind die ersten dieser Zeichen gesetzt, so ist die Form der folgenden auch schon bestimmt. Wegen der Einfachheit der ersten mathematischen Operationen wird der Willkür in der Bildung dieser Zeichen auch kein grofser Spielraum geblieben sein, und wir überzeugen uns bald von der Nothwendigkeit und Richtigkeit derselben; bauen wir also auf ihnen fort, so sind wir der

Festigkeit unserer Grundlage versichert. Ein Blick auf die oben aufgestellte Tafel lehrt, dafs schon in der dritten Gruppe die Formen der beiden ersten wieder benutzt sind, wie z. B. bei den Bruch-Exponenten und Logarithmen; denn dafs sich hier die Bezeichnung durch *log* sehr fremdartig ausnehmen würde, leuchtet wohl hinlänglich ein.

2. Abkürzungszeichen, Zeichen, bei denen es nur darauf ankommt, das Wesentliche einer Formel, also das Veränderliche, vom Unwesentlichen, dem Starren, Unveränderlichen, zu sondern, und in einem Bilde zusammenzufassen. Hier hat die Willkür schon bei weitem freieres Spiel. Soll z. B. der k^{te} Binomialcoefficient der n^{ten} Potenz ausgedrückt werden, so kann dies geschehen durch n_k, oder (n, k), oder $\binom{n}{k}$, oder auf eine beliebige andere Weise, wenn nur die Elemente n und k in einem Ausdrucke abgesondert dargestellt werden. Solche Zeichen haben den Werth, dafs sie deutlich hervortreten lassen, was das Wesentliche eines Ausdrucks eigentlich ist; aber ihre Organisation stellt sich in den einzelnen Füllen oft auf die mannigfaltigste Weise von selbst dar, kann daher auch nicht Gegenstand dieser Abhandlung sein sollen. Unter diesen Zeichen können nicht leicht inconsequente vorkommen, wohl aber unter denen der ersten Art.

Bei der Bildung aller Zeichen ist der Grundsatz wichtig, nichts durch Buchstaben zu bezeichnen, was durch blofse Stellung, oder wohl gar schon durch Zahlen ausgedrückt werden kann. Man giebt also die Folge der Coefficienten in Reihen immer durch Indices an, und bezeichnet Operationen nie durch das hingeschriebene Wort derselben, oder durch dessen erste Sylbe oder ersten Buchstaben; denn diese werden sich fast nie der Rechnung unterwerfen lassen, und gerade die höhern Theile der Mathematik sind eine Rechnung mit Rechnungszeichen.

Den ausgesprochenen Ansichten gemäfs, gehen wir zur Bildung neuer Zeichen fort. Man bezeichnet eine Summe von n gleichen Gröfsen a durch na oder

$$a + a + a + a + \ldots\ldots + a = na$$

Demgemäfs setze man nun die Summe der n verschiedenen Gröfsen

$$1. \quad a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-1} = n|a_0$$

Die Summenzahl n giebt an, aus wie viel Gliedern die ganze Summe be-

steht. Dem Summenzeiger σ müssen nach und nach alle ganze Werthe von 0 bis $n-1$ beigelegt werden. Nimmt man die Reihe rückwärts, so ist auch

$$2.\quad a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}=n|a_{n-1-\sigma}.$$

Wäre z. B. zu summiren

$$0+1+2+3+\ldots+(n-1)=n|\sigma$$

so ist, mit Rücksicht auf (2.),

$$n|\sigma=n|(n-1-\sigma)=n|(n-1)-n|\sigma,\quad n|2\sigma=n(n-1),\quad n|\sigma=\frac{n(n-1)}{2}.$$

An dem Gliede $n|(n-1)$ der obigen Gleichung, welches nichts anderes als $n(n-1)$ ist, zeigt sich, dafs die Summenzahl n wieder zur Bedeutung eines **blofsen Factors** herabsinken kann, und eben darin ruht die Nothwendigkeit, die Summen auf die angegebene Weise zu bezeichnen; denn wenn sich ein Begriff aus einem allgemeineren entwickelt hat, so mufs er dessen Bestimmtheit noch mit an sich tragen, und es ist klar, dafs dies hier wirklich mit dem Begriffe der Summenzahl und dem allgemeineren des Factors der Fall ist.

§. 3.

Diese Summenbezeichnung ist also nur ein consequentes Erweitern der Bedeutung des **Factors**. Eine eben solche Erweiterung der Basis einer Potenz zur Basis einer Factorielle, hat zuerst auf die wissenschaftlichste Weise der Herausgeber dieser Zeitschrift, in einer Abhandlung des VII. Bandes derselben, eingeführt.

Wir entlehnen von ihm die Bezeichnung

$$1.\quad a(a+k)(a+2k)\ldots(a+nk-k)=(a,+k)^n \text{ und}$$

$$\frac{1}{(a-k)(a-2k)(a-3k)\ldots(a-nk)}=(a,+k)^{-n},$$

und dehnen dieselbe auch auf das Product

$$2.\quad a_0\,a_k\,a_{2k}\,a_{3k}\ldots a_{nk-k}=a^n_{0,+k}$$

aus. Eben so schreiben wir

$$f(x)f(x+y)f(x+2y)\ldots f(x+ny-y)=f^n(x,+y)$$

und auch

$$\frac{1}{(1-a_0)(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_{n-1})}=(1-a_{x,+1})^{-n}.$$

Die Grundsätze der Binomialcoefficienten lassen sich dann auf folgende Weise ausdrücken:

$$3.\quad \frac{m.m-1.m-2\ldots m-n+1}{1.2.3\ldots n}=\left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^n=\left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^{m-n}=\frac{m.m-1\,m-2\ldots n+1}{1.2.3\ldots m-n},$$

$$4.\quad \left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^{n}+\left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^{n-1}=\left(\frac{m+1,-1}{1,+1}\right)^{n}$$

$$5.\quad \left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^{m}\left(\frac{n-m,-1}{1,+1}\right)^{v}=\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^{v}\left(\frac{n-v,-1}{1,+1}\right)^{m}$$

$$6.\quad \left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^{m}\left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^{n-v}=\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^{v}\left(\frac{v,-1}{1,+1}\right)^{n-m}$$

Die Formel (6.) erscheint hier vielleicht zuerst; in ihr und in (5.) sind die angegebenen **Vertauschungen** der Elemente oft von Nutzen.

Wir schliefsen gleich noch ein brauchbares Zeichen an, um das blofse **Vorkommen** oder **Auftreten** von n Gröfsen a_0, a_1, a_2, ... a_{n-1} anzudeuten; dies geschehe nemlich durch

$$7.\quad n!a_\delta$$

Dem Zeiger δ werden alle ganze Zahlen von 0 bis $n-1$ beigelegt. Also eine Function von x_0, x_1, x_2, ... x_{n-1} wird ausgedrückt durch $f(n!x_\delta)$. Diese Bezeichnung erspart oft viele Weitläufigkeiten.

Ferner bezeichnen wir die **Combinationen ohne Wiederholungen** zu je m der Elemente a_0, a_1, a_2, ... a_{n-1} durch

$$8.\quad (m, n!a_\delta)$$

und die **Combinationen mit Wiederholungen** durch

$$9.\quad [m, n!a_\delta]$$

Es finden bei dieser Bezeichnung bekanntlich folgende Formeln Statt:

$$10.\quad (m, s+1!n\pm s\mp\delta)=(m, s!n\pm s\mp\delta)+n(m-1, s!n\pm s\mp\delta)$$

$$11.\quad [m, s+1!n\pm s\mp\delta]=[m, s!n\pm s\mp\delta]+n[m-1, s+1!n\pm s\mp\delta]$$

Die erste derselben heifst also: die Combinationen ohne Wiederholungen zu m Elementen aus den $s+1$ Elementen

$$n+s,\; n+s-1,\; n+s-2,\; \ldots\; n+1,\; n$$

oder auch

$$n-s,\; n-s+1,\; n-s+2,\; \ldots\; n-1,\; n$$

sind zusammengesetzt aus allen Combinationen dieser Art, denen das Glied n fehlt, und dem Producte desselben mit den Combinationen zu $m-1$ Elementen, denen ebenfalls dieses Glied mangelt.

Ist in den beiden letzten Gleichungen $s=n$, und man wählt die untern Zeichen, so sind die Elemente nur 0, 1, 2, 3, ... n, und dann schreiben wir diese Gleichungen, mit Auslassung der Zeiger, ganz einfach

$$12.\quad (m, n+1)=(m, n)+n(m-1, n)$$

$$13.\quad [m, n+1]=[m, n]+n[m-1, n+1]$$

§. 4.

Wir gehen jetzt zu einer Methode der Reihen-Entwickelung und der Summation über, deren Grundbegriffe uns einfacher und allgemeiner zu sein scheinen, als die der Differenzen-Rechnung, welche gewöhnlich zu diesem Zwecke angewandt wird.

I. Hat man die Functionengleichung

$$1.\quad \varphi(x) = f(x+y) \pm f(x)$$

und multiplicirt sie mit $(\mp)^{n+1}$, nachdem man in ihr $x+ny$ statt x gesetzt hat, so entsteht

$$(\mp)^{n+1}\varphi(x+ny) = (\mp)^{n+1}f(x+(n+1)y) - (\mp)^n f(x+ny)$$

Wird von dieser Gleichung die Summe nach n genommen, so verwandelt sie sich in

$$n|(\mp)^{\sigma+1}\varphi(x+\sigma y) = n|(\mp)^{\sigma+1}f(x+(\sigma+1)y) - n|(\mp)^{\sigma}f(x+\sigma y)$$

Trennt man hier von der ersten Reihe der rechten Seite das letzte Glied ab, und von der zweiten Reihe das erste, so erhält man

$$n|(\mp)^{\sigma+1}\varphi(x+\sigma y) =$$
$$(n-1|(\mp)^{\sigma+1}f(x+(\sigma+1)y) + (\mp)^n f(x+ny) - f(x) - (n-1|(\mp)^{\sigma+1}f(x+(\sigma+1)y)$$

Die beiden Reihen rechts heben sich nun gegen einander auf, und es bleibt

$$2.\quad n|(\mp)^{\sigma+1}\varphi(x+\sigma y) = (\mp)^n f(x+ny) - f(x)$$

oder

$$\mp\varphi(x) + \varphi(x+y) \mp \varphi(x+2y) + \dots + (\mp)^n\varphi(x+ny-y) = (\mp)^n f(x+ny) - f(x)$$

II. Es sei

$$3.\quad \varphi(x) = f(x+y) \pm \psi(x) f(x)$$

Man multiplicire diese Gleichung mit

$$\psi(x+y)\psi(x+2y)\psi(x+3y)\dots\psi(x+my) = \psi^m(x+y, +y)$$

so erhält man

$$\psi^m(x+y, +y)\varphi(x) = \psi^m(x+y, +y)f(x+y) \pm \psi^{m+1}(x, +y)f(x)$$

Diese Gleichung kann aufgefafst werden als

$$V(m, x) = F(m-1, x+y) \pm F(m, x)$$

und giebt dann, wenn man sie mit (1.) und (2.) vergleicht,

$$n|(\mp)^{\sigma+1}V(m-\sigma, x+\sigma y) = (\mp)^n F(m-n, x+ny) - F(m, x)$$

Wird nun $m = n-1$ gesetzt und das, was V und F bedeuten, so erhält man hieraus

$$4.\quad n|(\mp)^{\sigma+1}\psi^{n-1-\sigma}(x+y+\sigma y, +y)\varphi(x+\sigma y) = (\mp)^n f(x+ny) - \psi^n(x, +y)f(x)$$

oder

$$\mp\psi^{n-1}(x+y, +y)\varphi(x) + \psi^{n-2}(x+2y, +y)\varphi(x+y) \mp \psi^{n-3}(x+3y, +y)\varphi(x+2y) + \dots$$
$$\dots + (\mp)^n\varphi(x+ny-y) = (\mp)^n f(x+ny) - \psi^n(x, +y)f(x)$$

Die Gleichung

$$5.\quad \varphi(x) = \chi(x)f(x+y) \pm \psi(x)f(x)$$

läſst sich eben so behandeln; denn multiplicirt man sie mit

$$\chi^m(x-y,-y)\,\psi^p(x+y,+y)$$

so entsteht

$$\chi^m(x-y,-y)\psi^p(x+y,+y)\varphi(x)$$
$$=\chi^{m+1}(x,-y)\psi^p(x+y,+y)f(x+y) \pm \chi^m(x-y,-y)\psi^{p+1}(x,+y)f(x)$$

oder

$$V(m,p,x) = F(m+1,p-1,x+y) \pm F(m,p,x)$$

und hieraus durch Vergleichung mit (1.) und (2.)

$$6.\quad n|(\mp)^{\sigma+1}V(m+\sigma,p-\sigma,x+\sigma y) = (\mp)^n F(m+n,p-n,x+ny) - F(m,p,x)$$

Zur Versinnlichung dieser Formeln wählen wir einige Beispiele.

1) Es ist

$$x^m = x^m\left(\frac{x-1}{x-1}\right) = \frac{x^{m+1}}{x-1} - \frac{x^m}{x-1}$$

oder

$$\varphi(m) = f(m+1) - f(m)$$

Diese Gleichung verwandelt sich nach (2.) in

$$n|\varphi(m+\sigma) = f(m+n) - f(m)$$

d. h.

$$n|x^{m+\sigma} = \frac{x^{m+n}}{x-1} - \frac{x^m}{x-1}$$

oder, wenn man mit x^m dividirt:

$$7.\quad x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1} = n|x^\sigma = \frac{x^n-1}{x-1}$$

2) Die Gleichung (4.) des §. 3.

$$\left(\frac{m+1,-1}{1,+1}\right)^n = \left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^n + \left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^{n-1}$$

kann aufgefaſst werden als

$$f(m+1,n) = f(m,n) + f(m,n-1)$$

und läſst sich dann in die drei Formen bringen:

$$8.\quad f(m+1,n+1) = f(n,n+1) + f(m,n)$$
$$9.\quad f(m,n+1) = f(m+1,n+1) - f(m,n)$$
$$10.\quad f(m,n-1) = f(m+1,n) - f(m,n)$$

deren Vergleichung mit (1.) und (2.) ergiebt:

$$11.\quad k|(-)^\sigma\left(\frac{m+1,-1}{1,+1}\right)^{n+1+\sigma} = (-)^k\left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^{n+k} - \left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^n$$

$$12.\quad k\left|\left(\frac{m+\sigma,-1}{1,+1}\right)^{n+1+\sigma}\right. = \left(\frac{m+k,-1}{1,+1}\right)^{n+k} - \left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^n$$

$$13.\quad k\left|\left(\frac{m+\sigma,-1}{1,+1}\right)^{n-1}\right. = \left(\frac{m+k,-1}{1,+1}\right)^n - \left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^n$$

Künftig wollen wir ein Glied, welches aus einem links vorhergehenden entsteht, wenn in diesem irgend ein Element, z. B. k, gleich Null gesetzt wird, durch $(k=0)$ bezeichnen. Dann schreiben wir z. B. die letzte dieser Gleichungen:

$$\left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^{n-1}+\left(\frac{m+1,-1}{1,+1}\right)^{n-1}+\left(\frac{m+2,-1}{1,+1}\right)^{n-1}+\ldots+\left(\frac{m+k-1,-1}{1,+1}\right)^{n-1}=\left(\frac{m+k,-1}{1,+1}\right)^{n}-(k=0)$$

3) Es ist

$$(a,+\alpha)^p(a+p\alpha,+\alpha)^{m-p} = (a,+\alpha)^m$$
$$(a+m\alpha,+\alpha)^p(a+p\alpha,+\alpha)^{m-p} = (a+p\alpha,+\alpha)^m$$
$$(a+m\alpha,+\alpha)^p(a,+\alpha)^m = (a,+\alpha)^{m+p}$$

Hier sollen a und α ganz beliebige Elemente sein, m und p aber nur positive oder negative ganze Zahlen. Bilden wir nun noch aus den entsprechenden Elementen b und β, n und q drei ähnliche Gleichungen, so können diese mit den obigen auf folgende Weise zusammengestellt werden.

$$14.\quad \left\{\frac{(a+m\alpha,+\alpha)^p}{(b+n\beta,+\beta)^q}\pm\frac{(a,+\alpha)^p}{(b,+\beta)^q}\right\}\frac{(a+p\alpha,+\alpha)^{m-p}}{(b+q\beta,+\beta)^{n-q}}=\frac{(a+p\alpha,+\alpha)^m}{(b+q\beta,+\beta)^n}\pm\frac{(a,+\alpha)^m}{(b,+\beta)^n}$$

$$15.\quad \left\{\frac{(a+m\alpha,+\alpha)^p}{(b+n\beta,+\beta)^q}\pm 1\right\}\frac{(a,+\alpha)^m}{(b,+\beta)^n}=\frac{(a,+\alpha)^{m+p}}{(b,+\beta)^{n+q}}\pm\frac{(a,+\alpha)^m}{(b,+\beta)^n}$$

Diese Gleichungen lassen sich auffassen als

$V(a,b)=F(a+p\alpha,b+q\beta)\pm F(a,b)$ und $V(m,n)=F(m+p,n+q)\pm F(m,n)$

und werden durch Vergleichung mit (1.) und (2.) summirt. Aus (14.) erhalten wir z. B. für $m=n$, $p=1$, $q=-1$

$$16.\quad \frac{(a,+\alpha)^{n-1}}{(b,+\beta)^{n+1}}+\frac{(a-\alpha,+\alpha)^{n-1}}{(b+\beta,+\beta)^{n+1}}+\frac{(a-2\alpha,+\alpha)^{n-1}}{(b+2\beta,+\beta)^{n+1}}+\ldots+\frac{(a-k\alpha+\alpha,+\alpha)^{n-1}}{(b+k\beta-\beta,+\beta)^{n+1}}=$$

$$k\left|\frac{(a-\alpha\sigma,+\alpha)^{n-1}}{(b+\beta\sigma,+\beta)^{n+1}}\right.=\frac{(a-k\alpha,+\alpha)^n}{n(\alpha\beta-n\alpha\beta-a\beta-b\alpha)(b+k\beta,+\beta)^n}-(k=0)$$

Bei diesen Summationen kommt es nur darauf an, die Elemente in den Gleichungen (14.) und (15.) so zu wählen, daſs die Summenzeiger aus den eingeklammerten Theilen der linken Seite verschwinden. Die Gleichungen (14.) und (15.) sind sehr allgemein; aus ihnen flieſsen auch leicht die Reihen (11.), (12.) und (13.), so wie noch viele andere.

4) Setzt man

$$xy = z$$

wo y und z Functionen von x sein mögen, so erhält man durch $n$maliges Differenziren nach x, und Multipliciren mit $\frac{x^{n-1}}{n}$ die Gleichung

$$\frac{x^{n-1}}{n}\frac{\partial^n z}{\partial x^n}=x^{n-1}\frac{\partial^{n-1}y}{\partial x^{n-1}}+\frac{x^n}{n}\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$$

welche aufgefaſst werden kann als

$$\varphi(n) = f(n-1) + \psi(n)f(n),$$

und dann durch Vergleichung mit (3.) und (4.) folgende Reihe giebt:

$$z = k|(-)^{\sigma} \frac{x^{1+\sigma}}{(1,+1)^{1+\sigma}} \frac{\partial^{1+\sigma} z}{\partial x^{1+\sigma}} + (-)^{k} \frac{x^{k+1}}{(1,+1)^{k}} \frac{\partial^{k} y}{\partial x^{k}}$$

5. Wir haben bis jetzt die Auflösung der Gleichung (1.) und (3.) nur benutzt, um φx in eine Reihe zu entwickeln; sie diene zugleich aber auch dazu, die Form von fx durch φx und ψx zu bestimmen, oder, was dasselbe ist, zur Integration von Differenzengleichungen.

Bekanntlich sind von den Differenzengleichungen

$$y_1 = Ry + Q \text{ und } \Delta y + Py = Q$$

die Integrale

$$y = [R_{x-1}] \overset{x}{\Sigma} \frac{Q}{[R_x]^{x+1}} \text{ und } y = [1-P_{x-1}] \overset{x}{\Sigma} \frac{Q}{[1-P_x]^{x+1}}.$$

Diese beiden Differenzengleichungen sind aber nichts anderes, als

$$f(x+h) - \psi(x)f(x) = \varphi(x) \text{ und } f(x+h) - (1-\psi x)f(x) = \varphi x$$

und nach der Formel (4.) erhält man hieraus durch eine leichten Änderung der Werthe der Elemente

$$f(hx) = \psi^{x}(0,+h)\left\{x\left|\frac{\varphi(h\sigma)}{\psi^{\sigma+1}(0,+h)} + f0\right.\right\}$$

und

$$f(hx) = (1-\psi(0,+h))^{x}\left\{x\left|\frac{\varphi(h\sigma)}{(1-\psi(0,+h))^{\sigma+1}} + f0\right.\right\}$$

wo $f0$ die zum Integral zu fügende Constante ist.

Für $h=1$ fallen diese Ausdrücke mit den obigen Integralen zusammen. Es scheint mir übrigens vortheilhaft, diese Integrationen und die obigen Reihenentwickelungen in einen unmittelbarern Zusammenhang zu bringen, als gewöhnlich geschieht.

§. 5.

Ist $\varphi(n,k)$ eine Function der Gröfsen n und k von der Beschaffenheit, dafs

$$1. \quad \varphi(n+1,k+1) = \varphi(n+1,k) + \varphi(n,k)$$

und dafs sie für negative Werthe von n und solche, die gröfser als k sind, verschwindet, so folgt aus diesen Annahmen, wenn man erst $n=-1$ und dann $n=k$ setzt,

$$2. \quad \varphi(0,k+1) = \varphi(0,k)$$

$$3. \quad \varphi(k+1,k+1) = \varphi(k,k)$$

Hat man nun die Gleichung

$$4. \quad f(x) = f(x+y) \pm f(x+z)$$

und multiplicirt sie mit $(\pm)^n \varphi(n,k)$, nachdem man in ihr $x+(z-y)n$ statt x gesetzt hat, so erhält man

$$5.\quad (\pm)^n \varphi(n,k) f(x+(z-y)n)$$
$$= (\pm)^n \varphi(n,k) f(x+y+(z-y)n) + (\pm)^{n+1} \varphi(n,k) f(x+y+(z-y)(n+1))$$

Bezeichnet man der Kürze wegen $f(x+(z-y)n)$ durch $V(n)$ und $f(x+y+(z-y)n)$ durch $F(n)$, und denkt sich dann n durch die ganzen Zahlen von 0 bis n veränderlich, so verwandelt sich (5.) in

$$(n+1|(\pm)^\sigma \varphi(\sigma,k) V(\sigma) = (n+1|(\pm)^\sigma \varphi(\sigma,k) F(\sigma) + (n+1|(\pm)^{\sigma+1} \varphi(\sigma,k) F(\sigma+1)$$

Wird nun von der ersten Reihe der rechten Seite das erste Glied abgesondert, und von der letzten das letzte, so entsteht mit Rücksicht auf (1.) und (2.)

$$(n+1|(\pm)^\sigma \varphi(\sigma,k) V(\sigma)$$
$$= \varphi(0,k) F(0) + n|(\pm)^{\sigma+1} \varphi(\sigma+1,k) F(\sigma+1) + n|(\pm)^{\sigma+1} \varphi(\sigma,k) F(\sigma+1) + (\pm)^{n+1} \varphi(n,k) F(n+1)$$
$$= \varphi(0,k+1) F(0) + n|(\pm)^{\sigma+1} \{\varphi(\sigma+1,k) + \varphi(\sigma,k)\} F(\sigma+1) + (\pm)^{n+1} \varphi(n,k) F(n+1)$$
$$= \varphi(0,k+1) F(0) + n|(\pm)^{\sigma+1} \varphi(\sigma+1,k+1) F(\sigma+1) + (\pm)^{n+1} \varphi(n,k) F(n+1)$$
$$= \varphi(n+1|(\pm)^\sigma \varphi(\sigma,k+1) F(\sigma) + (\pm)^{n+1} \varphi(n,k) F(n+1)$$

oder

$$6.\quad (n+1|^\sigma(\pm) \varphi(\sigma,k) f(x+(z-y)\sigma)$$
$$= (n+1|(\pm)^\sigma \varphi(\sigma,k+1) f(x+y+(z-y)\sigma) + (\pm)^{n+1} \varphi(n,k) f(x+y+(z-y)(n+1))$$

Verschwindet für irgend einen Werth von n, den wir durch r bezeichnen wollen, das letzte Glied $\varphi(r,k) f(x+z+z(z-y)r)$ dieser Gleichung, so erhalten wir

$$7.\quad (r+1|(\pm)^\sigma \varphi(\sigma,k) f(x+(z-y)\sigma) = (r+1|(\pm)^\sigma \varphi(\sigma,k+1) f(x+y+(z-y)\sigma)$$

Ist aber $n=k$, so kann, vermöge der Bedingung (3.), auch das letzte Glied der Formel (6.) mit in die Reihe der rechten Seite aufgenommen werden, und es ergiebt sich daraus dann

$$8.\quad (k+1|(\pm)^\sigma \varphi(\sigma,k) f(x+(z-y)\sigma) = (k+2|(\pm)^\sigma \varphi(\sigma,k+1) f(x+y+(z-y)\sigma)$$

Die Gleichungen (7.) und (8.) lehren, daſs man die Gröſse x immer um ein y und die Gröſse k um die Einheit vermehren oder vermindern kann, bis man, wenn dies n mal geschehen ist, zu den Formeln gelangt:

$$9.\quad (r+1|(\pm)^\sigma \varphi(\sigma,k) f(x+(z-y)\sigma) = (r+1|(\pm)^\sigma \varphi(\sigma,k\pm n) f(x\pm ny+(z-y)\sigma)$$
$$10.\quad (k+1|(\pm)^\sigma \varphi(\sigma,k) f(x+(z-y)\sigma) = (k\pm n+1|(\pm)^\sigma \varphi(\sigma,k\pm n) f(x\pm ny+(z-y)\sigma)$$

welche mit Rücksicht auf die Bedingungen, denen die Function φ unterworfen ist, für $k=0$ und $\varphi(0,0)=c$ in die folgenden übergehen:

$$11.\quad c f(x) = (r+1|(\pm)^\sigma \varphi(\sigma,n) f(x+ny+(z-y)\sigma)$$
$$12.\quad c f(x) = (r+1|(\pm)^\sigma \varphi(\sigma,n) f(x-ny+(z-y)\sigma)$$
$$13.\quad c f(x) = (n+1|(\pm)^\sigma \varphi(\sigma,n) f(x+ny+(z-y)\sigma)$$

In der Gleichung (10.) kann ein negatives n bei der Annahme $k=0$ nicht Statt finden, weil man nicht weifs, was eine negative Summenzahl bedeutet, wohl aber bei der Annahme $n=k$, wodurch man

$$(k+1|(\pm)^{\sigma}\varphi(\sigma,k)f(x+(z-y)\sigma) = cf(x-ky)$$

findet, welche Gleichung aber, für $x+ky$ statt x, mit (13.) identisch wird. Eben so entsteht aus (9.) eine mit (11.) identische Gleichung, wenn man für den negativen Werth von n, $k=n$ setzt.

Aus der Gleichung (4.) des § 3. ist ersichtlich, dafs die Binomialcoëfficienten unter der in (1.) aufgeführten Function verstanden werden können. Wir schliefsen daher aus (13.), dafs sich die Functionengleichung

$$14.\quad f(x) = f(x+y)\pm f(x+z)$$

immer **binomisch** entwickeln läfst, so dafs

$$15.\quad f(x) = (n+1|(\pm)^{\sigma}\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^{\sigma} f(x+ny+(z-y)\sigma) =$$

$$f(x+ny)\pm\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)f(x+ny-y+z)+\left(\frac{n,-1}{n,+1}\right)^{2}f(x+ny-2y+2z)\pm\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^{3}f(x+ny-3y+3z)$$
$$+\ldots+(\pm)^{n}f(x+nz)$$

Verschwindet aber für irgend einen Werth von r das Glied $f(x+z+(z-y)r)$, so erhält man, nach (11.) und (12.), auch noch

$$16.\quad f(x) = (r+1|(\pm)^{\sigma}\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^{\sigma} f(x+ny+(z-y)\sigma)$$

$$17.\quad f(x) = (r+1|(\pm)^{\sigma}\left(\frac{-n,-1}{1,+1}\right)^{\sigma} f(x-ny+(z-y)\sigma)$$

Ganz auf dieselbe Weise hätte man auch die noch allgemeinern Functionen

$$18.\quad \varphi(n+1,k+1) = \varphi(n+1,k)+a\,\varphi(n,k)$$

und

$$19.\quad f(x) = f(x+y)\pm af(x+z)$$

mit einander combiniren können, wo a als ein constanter Factor angenommen wird. Die Vergleichung von (18.) mit der Gleichung (12.) des §. 3. lehrt, dafs unter dieser Form die Combinationen ohne Wiederholungen begriffen sind, dafs sich also eine Gleichung wie (19.) in eine Reihe entwickeln läfst, deren Coëfficienten aus solchen Combinationen bestehen.

(Der Schlufs folgt im nächsten Hefte.)

3.
Lehrsätze,
zu beweisen.

(Von Herrn Prof. Dr. *Gudermann* zu Münster.)

1. Schneiden sich drei sphärische Sehnen (oder Secanten) AA', BB', CC' eines Nebenkreises in Einem Puncte, und die Peripherie des Kreises in den Puncten A, B, C, A', B', C', so ist immer

$$\sin\frac{AB'}{2}.\sin\frac{CA'}{2}.\sin\frac{BC'}{2}=\sin\frac{B'C}{2}.\sin\frac{A'B}{2}.\sin\frac{C'A}{2}.$$

2. Wird ein Nebenkreis (A), dessen sph. Radius a ist, von zwei anderen Kreisen unter dem gleichen Winkel α geschnitten und ist der Abstand seines Mittelpunctes von der (reellen oder idealen) gemeinschaftlichen Sehne dieser beiden Kreise $=d$, so ist das Verhältnifs $\frac{\sin\partial}{\sin a.\cos\alpha}$ für alle Kreise (A) unveränderlich, obgleich sich d, a, α gleichzeitig ändern.

3. Beschreibt man aus einem Puncte A die drei Nebenkreise (A), (A'), (A'') mit den Radien α, α', α''; aus einem Puncte B die Kreise (B), (B'), (B'') mit den Radien β, β', β'' und aus einem Puncte C die Kreise (C), (C'), (C'') mit den Radien γ, γ', γ''; construirt man ferner den Durchschnitts-Punct der Chordalen der drei Kreise (ABC), den der Kreise $(A'B'C')$ und auch noch den der Kreise $(A''B''C'')$, so befinden sich diese drei Puncte in Einem Hauptkreise, wenn ist

$$\frac{\cos\beta'\cos\gamma-\cos\beta\cos\gamma'}{\cos\beta''\cos\gamma-\cos\beta\cos\gamma''}=\frac{\cos\alpha'\cos\gamma-\cos\alpha\cos\gamma'}{\cos\alpha''\cos\gamma-\cos\alpha\cos\gamma''}.$$

Dieser Gleichung leistet man auf unzählige Arten Genüge, z. B., wenn man setzt

$$\alpha'=\alpha+\mu,\ \beta'=\beta+\mu,\ \gamma'=\gamma+\mu \text{ und } \alpha''=\alpha+\nu,\ \beta''=\beta+\nu,\ \gamma''=\gamma+\nu,$$

und unter μ und ν beliebige positive oder negative Hauptbogen verstanden werden. Werden aber die Symmetralen und zwar homologe Symmetralen der vorhin genannten Kreis-Ternionen construirt, so schneiden sie sich in Einem Puncte, wenn ist

$$\frac{\sin\beta'\sin\gamma-\sin\beta\sin\gamma'}{\sin\beta''\sin\gamma-\sin\beta\sin\gamma''}=\frac{\sin\alpha'\sin\gamma-\sin\alpha\sin\gamma'}{\sin\alpha''\sin\gamma-\sin\alpha\sin\gamma''}.$$

Dieselbe Bedingung gilt auch für die drei übrigen Ternionen homologer Symmetralen.

Es haben auch diese allgemeinen Formeln zum Theil dann noch Sinn, wenn einige Kreise sich auf einen Punct reduciren. Die Symmetralen und Chordalen sind hier eben so aufgefafst, wie in den Schriften des Herrn Prof. Plücker, nur dafs jetzt Hauptkreise statt der geraden Linien zu nehmen sind.

4. Ist AC (Taf. I. Fig. 1.) ein beliebiger Bogen (auf der Oberfläche einer Kugel) von einer gesetzlichen Curve, welcher zwischen seinen beiden Endpuncten A und C keinen Wendepunct (und auch keinen Rückkehrpunct) hat, so gehört zu jedem Hauptkreise, welcher die Curve AC berührt, ein sphärischer Mittelpunct (Pol), und diese Mittelpuncte befinden sich sämmtlich in einer zweiten (in der reciproken) Curve; die beiden Mittelpuncte der Hauptkreise, welche die Curve AC in den Puncten A und C berühren, mögen a und c heifsen: sie fassen auf der reciproken Curve einen Bogen ac ein, dessen Form und Länge durch die Form und Länge des Bogens AC genau bestimmt ist; dieser Bogen ac mag der dem Bogen AC zugehörige reciproke Bogen genannt werden, weil der Bogen ac eben so von AC abhängt, wie umgekehrt AC von ac.

Auf beiden Seiten von AC giebt es einen reciproken Bogen ac, und diese beiden Bogen sind symmetrisch, also auch gleich lang; derjenige, welcher auf der concaven Seite des Bogens AC sich befindet, heifse der positive, und der auf der convexen Seite befindliche heifse der negative reciproke Bogen. Ist der Bogen AC ein Hauptbogen (ein Bogen eines Hauptkeises), und also im Sinne der Sphärik weder concav, noch convex, sondern sphärisch gerade, so reducirt sich der reciproke Bogen ac auf einen Punct, dann fällt c mit a zusammen, und es ist $ac=0$.

Durch diesen Punct ist dann freilich nicht, bei vorgenommener Umkehrung, die Länge von AC, sondern nur die Lage dieses Hauptbogens (sammt seiner Form) bestimmt.

5. Ist in (Taf. I. Fig. 1.) ein Dreieck ABC auf der Kugel, eingeschlossen von den drei Seiten AC, BC, AB, welche Theile von drei ganz verschiedenen Curven sein dürfen, und sich unter den Winkeln A, B, C schneiden, so gehört zu jeder Seite ein reciproker Bogen, nemlich zur Seite AC der reciproke Bogen ac, zu BC gehöre bc und zu AB endlich gehöre ab. Sind nun alle drei Seiten des Dreiecks nach Innen concav, so ist der Flächeninhalt F des Dreiecks ABC ausgedrückt durch die Formel

$$F = A + B + C - ab - bc - ac - \pi,$$

wenn der Radius der Kugel die Längen-Einheit ist, und unter π die Ludolphische Zahl verstanden wird.

Sind alle drei Seiten nach Aufsen concav (also nach Innen convex), so ist jeder reciproke Bogen negativ zu nehmen, und es ist dann also

$$F = A + B + C + ab + bc + ac - \pi.$$

Wenn einige Seiten (eine oder zwei) nach Aufsen concav sind, so sind nur ihre reciproken Bogen negativ zu nehmen; sind z. B. die Seiten AC und CB nach Aufsen concav, während die Seite AB nach Aufsen convex ist, so ist die Formel

$$F = A + B + C - ab + ac + bc - \pi.$$

Ist eine Seite weder nach Aufsen, noch nach Innen concav, sondern ist sie ein Hauptbogen, so ist ihr reciproker Bogen (wie schon in No. 4. angegeben wurde), als ein Punct anzusehen, und gleich Null zu setzen. Ist also CA ein Hauptbogen, und auch CB, während AB ein Bogen von einer beliebigen Curve ist, so ist $ca = cb = 0$, und der Inhalt des Dreiecks ABC nun ausgedrückt durch die Formel

$$F = A + B + C - ab - \pi,$$

wenn AB nach Innen concav ist; aber durch die Formel

$$F = A + B + C + ab - \pi,$$

wenn AB nach Aufsen concav ist. Ist auch noch AB ein Hauptbogen, so ist auch $ab = 0$, und man kommt nun auf die allgemein bekannte Formel $F = A + B + C - \pi$ für den Inhalt eines gewöhnlichen sphärischen Dreiecks wieder zurück.

Hat eine Seite des Dreiecks ABC einen Wendepunct, so theilt er sie in zwei Theile, und auch der reciproke Bogen ist dann als aus zwei Theilen bestehend anzusehen, wovon der positiv ist, welcher zu dem nach dem Inneren concaven Theile der Seite gehört, der andere Theil aber negativ ist.

6. Aus dem vorigen allgemeinen Theoreme kann offenbar leicht eine Formel hergeleitet werden für den Inhalt einer sphärischen Figur, welche beliebig viele Seiten hat, wenn jede Seite ein Bogen einer sphärischen Curve ist, und auch alle diese Curven von einander verschieden sind. Als eine Anwendung hiervon mag auch das Folgende gelten.

Ist in (Fig. 2.) $ACBD$ eine beliebige sphärische, nach dem Inneren concave Curve, deren Flächeninhalt $= F$ ist, so theilen wir die Curve durch eine neue Curve (oder auch durch mehrere Curven) in Theile; die Curve AB mag nach C hin convex, also nach D hin concav sein; der reciproke Bogen zu ACB sei acb und der reciproke Bogen zu ADB sei adb, der reciproke Bogen zu AB sei ab, dann ist nach No. 5. die Fläche

$$ACB = A + B + ab - acb \text{ und die Fläche}$$
$$ABD = (\pi - A) + (\pi - B) - ab - adb.$$

Werden die beiden Gleichungen addirt, so erhält man $F = 2\pi - acbd$, oder $F + acbd = 2\pi$; d. h. der Flächeninhalt der Curve $ABCD$, vermehrt um den Umfang der reciproken Curve $abcd$, ist gleich der doppelten Ludolphischen Zahl.

7. Wenn man auf jedem Hauptbogen, welcher eine Curve berührt, vom Berührungspuncte an gerechnet, nach derselben Seite hin einen Quadranten abschneidet, so befinden sich die Endpuncte dieser Quadranten in einer zweiten Curve, welche die Normal-Curve der ersten heifsen mag. Zu jedem Puncte einer Curve gehört also ein bestimmter Punct der Normal-Curve, und zu jedem Bogen ein bestimmter Bogen der Normal-Curve, welcher der Normal-Bogen heifsen kann.

Zwei reciproke Curven haben dieselbe Evolute, aber auch dieselbe Normal-Curve. Werden zwei reciproke Bogen durch s und s' bezeichnet, und der zugehörige Normal-Bogen durch S, so ist

$$S = \int \sqrt{(ds^2 + ds'^2)}.$$

Sind M und M' zwei zusammengehörige Puncte der reciproken Curven s und s', und ist N der ihnen zugehörige Punct der Normal-Curve, so kann man einen beliebigen Hauptkreis als Abscissenlinie nehmen, und von den drei Puncten M, M', N auf sie die Perpendikel z, z' und Z als Applicaten fällen; wird nun noch von einem anderen Puncte N' der Normal-Curve die Applicate Z' auf die Abscissenlinie gefällt, so schliefst der Bogen NN' mit den Applicaten Z und Z' und dem intercipirten Stücke der Abscissenlinie eine Fläche F ein, welche mit einer der beiden Normalen der beiden reciproken Curven in den Puncten M und M' (die sich zu einem Quadranten ergänzen), eine unveränderliche Summe ausmacht.

8. Wird die Normale der Curve s in No. 7. für ihren Punct M durch n bezeichnet, so ist $\tan n = \frac{\sin z}{\sin z'}$; wird der Krümmungs-Halbmesser derselben Curve für den Punct M durch r bezeichnet, so ist $\tan r = \frac{\partial \sin z}{\partial \sin z'} = \frac{\partial s}{\partial s'}$. Wird der Krümmungs-Halbmesser der Normal-Curve für den Punct N durch R bezeichnet, so ist $\tan R = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\sqrt{(\partial s^2 + \partial s'^2)}}{\partial r}$.

Anmerk. Andere einfache Relationen übergehend, mag nur die Bemerkung noch Platz finden, dafs der analytische Beweis der in No. 5. aufgestellten Formel von einer so allgemeinen Relation unter Integralen, deren Summe oder Differenz in geschlossener Form angegeben werden kann, abhängt, dafs diese Relation in ihrer Allgemeinheit sehr wahrscheinlich die Fundamental-Formeln für die Vergleichung aller transcendenten Functionen (insbesondere der elliptischen) umfafst. Wird die analytische Darstellung in gänzlicher Reinheit nicht etwa vorgezogen, so kann der Beweis auch durch eine geometrische Betrachtung geführt werden, und ist dann am einfachsten. Beide Arten des Beweises werden gewünscht.

9. Ein überaus fruchtbarer Lehrsatz der Sphärik ist der folgende:

Ist $ABCD$ Fig. 3. ein beliebiges sph. Viereck, und nimmt man in jeder Seite (oder paarweise auch in den Verlängerungen derselben) einen Punct an, in der Figur die Puncte P, N, Q, M, so dafs ist:

$$\frac{\sin AP}{\sin BP} \cdot \frac{\sin BN}{\sin CN} \cdot \frac{\sin CQ}{\sin DQ} \cdot \frac{\sin DM}{\sin AM} = 1,$$

so entstehen, wenn PQ und MN gezogen werden, acht neue Vierecke von derselben Art, als das vorige. Für das Viereck $APQD$ hat man z. B. die Relation

$$\frac{\sin AB}{\sin PB}\cdot\frac{\sin PE}{\sin QE}\cdot\frac{\sin QC}{\sin DC}\cdot\frac{\sin DM}{\sin AM} = 1.$$

Jede von diesen neun metrischen Relationen hat zwei einfache geometrische Bedeutungen; in Beziehung auf das Viereck $APEM$ hat man z. B. den Satz, dafs sich die drei Hauptbogen DN, BQ und AE in Einem Puncte G schneiden.

Schneiden sich, was jedoch nicht nöthig ist, die drei Hauptbogen DC, MN, AB verlängert in Einem Puncte, so schneiden sich auch AD, PQ, CB verlängert in Einem Puncte.

Die analogen planimetrischen Sätze gelten auch dann noch, wenn das geradlinige Viereck nicht eben ist, und dann drückt jede der neun metrischen Relationen auch noch aus, dafs vier Puncte, z. B. die Puncte P, N, Q, M in einer Ebene enthalten sind; sie kann also als die Gleichung einer Ebene angesehen werden.

Specielle Formen des analogen planimetrischen Satzes finden sich in dem ersten Theile von Plücker's analytisch-geometrischen Entwickelungen.

10. Schneidet man zwei Hauptkreise QX und QX' (Fig. 4.) durch beliebig viele Transversalen AA', BB', CC', DD' etc., welche selbst den Punct Q zwischen sich fassen dürfen, so dafs ist

$$\frac{\sin AB.\sin CD}{\sin A'B'.\sin C'D'} = \frac{\sin BC.\sin AD}{\sin B'C'.\sin A'D'};\quad \frac{\sin BC.\sin DE}{\sin B'C'.\sin D'E'} = \frac{\sin CD.\sin BE}{\sin C'D'.\sin B'E'}$$

u. s. w. und bestimmt man in jedem der vorhandenen Vierecke den Durchschnitts-Punct seiner beiden Diagonalen, so befinden sich alle diese Puncte in einem Hauptkreise, welcher nur in einem besonderen Falle durch Q geht, und welcher L heifsen mag.

Schneidet man alle Transversalen AA', BB' etc. durch einen Hauptkreis M in den Puncten a, b, c, d etc., und theilt man dann jede Transversale durch einen vierten Punct harmonisch, z. B. AA' so durch a', dafs ist $\sin Aa.\sin A'a' = \sin Aa'.\sin A'a$, so befinden sich auch diese Theil-Puncte a', b', c', d' etc. in Einem Hauptkreise N, und die beiden Hauptkreise M und N schneiden sich immer auf dem vorhin erwähnten

Hauptkreise L; bewegt sich also M, mithin auch N, so ist der Ort ihres Durchschnitts-Punctes dieser Hauptkreis L.

Wenn die Linie L durch Q geht, so schneiden sich die Transversalen AA', BB', etc. in Einem Puncte, und für diesen besonderen Fall ist das analoge planimetrische Gesetz ebenfalls bekannt.

Wie heifsen die Lehrsätze, welche den vorstehenden beiden nach dem Gesetze der Reciprocität gegenüber stehen?

Münster, im Februar 1834.

4.

Théorèmes relatifs aux intégrales des fonctions algébriques.

(Par M. *Poisson*, à Paris, 1. décembre, 1833.)

I.

On comprend sous la dénomination de fonctions algébriques, non seulement les fonctions rationnelles, entières ou fractionnaires, et celles qui sont exprimées par des combinaisons de radicaux, mais encore les quantités déterminées par des équations d'un degré quelconque, dont les coëfficients sont des fonctions rationnelles de la variable.

Les quantités exprimées *sous forme finie* sont plus générales; outre des radicaux, elles peuvent renfermer dans leurs expressions, des logarithmes et des exponentielles, ou bien, elles peuvent dépendre d'équations qui contiennent ces deux sortes de transcendantes, réelles ou imaginaires, ce qui comprend les arcs de cercle et leurs sinus.

On exposera ci-après des théorèmes sur les intégrales des fonctions algébriques, remarquables par leur grande généralité et par la simplicité des considérations qui y conduisent. Ces théorèmes résultent, en effet, du procédé vulgaire de l'intégration par partie, ou de l'équation

$$1.\quad \int x\,\partial y + \int y\,\partial x = xy + C,$$

dans laquelle C est une constante arbitraire, et x et y sont deux variables, entre lesquelles nous établirons successivement différentes liaisons. Ils subsisteront également, et acquiereront encore plus de généralité, si l'on remplace x dans cette équation, par un polynome ou une fonction rationnelle et entière de x, que je representerai par X, de sorte qu'on ait

$$2.\quad \int X\,\partial y + \int y\,\partial X = Xy + C.$$

II.

Supposons d'abord que les variables x et y soient liées entre elles par l'équation:

$$3.\quad ax^n + bx^{n-1} \ldots . + kx + l = (a'x^n + b'x^{n-1} \ldots . + k'x + l')y,$$

dans laquelle a, b, ... k, l, a', b', ... k', l', sont des coëfficients con-

stants et donnés, et n désigne un nombre entier et positif, aussi donné. Faisons, pour abréger,

$$\frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l}{a'x^n + b'x^{n-1} + \ldots + k'x + l'} = fx,$$

et, ensuite

$$\int y\,\partial x = \int fx\,\partial x = Fx;$$

Fx sera une fonction algébrique et logarithmique, que l'on obtiendra toujours par les règles de l'intégration des fonctions rationnelles; et l'équation (1.) deviendra

$$\int x\,\partial y = xfx - Fx + C.$$

D'ailleurs, on tirera de l'équation (3.) un nombre n de valeurs de x en fonctions de y, que je representerai par $y_1, y_2, \ldots . y_n$; si donc on met à la place de x, dans l'équation précédente, celle de ces n valeurs qui répond à l'indice quelconque i, on aura

$$4. \quad \int y_i\,\partial y = y y_i - Fy_i + C;$$

d'où il résulte que l'intégrale $\int y_i\,\partial y$, qui est, pour ainsi dire, inverse de $\int fx\,\partial x$, peut toujours s'obtenir en fonction de y, sous forme finie, comme cette dernière en fonction de x.

On rendra ce théorème plus général, en partant de l'équation (2.) au lieu de l'équation (1.). En faisant alors

$$\int fx\,\partial X = Fx,$$

et désignant par Y_i, ce que devient X quand on y met y_i à la place de x, nous aurons

$$\int Y_i\,\partial y = y\,Y_i - Fy_i + C;$$

en sorte que l'intégrale $\int Y_i\,\partial y$ s'obtiendra aussi, sous forme finie, en fonction de y.

Si fx est une fonction entière, c. a. d., si le coëfficient de y dans l'équation (3.) est une constante C, la fonction Fx ne contiendra pas de logarithmes. En faisant

$$y\,Y_i - Fy_i = P_i,$$

cette quantité P_i sera une fonction rationnelle et entière de y_i. Si donc on égale à zéro le produit

$$(u - P_1)(u - P_2) \ldots . (u - P_n),$$

on aura une équation du degré n, savoir,

$$u^n + Au^{n-1} + Bu^{n-2} + \ldots + Xu + L = 0,$$

dont les coëfficients A, B, ... K, L, seront des fonctions symétriques des racines y_1, y_2, ... y_n, de l'équation (3.), qui s'exprimeront, par conséquent, au moyen de ses coëfficients a, b, ... k, et de son dernier terme $l - l'y$, et qui seront des fonctions rationnelles et entières de y. Dans ce cas, les n valeurs de P_i, ou de $\int Y_i \partial y - C$, qui répondent à $i = 1, = 2, \ldots$ $\ldots = n$, pourront donc être regardées comme les racines d'une équation du degré n, facile à déduire de l'équation (3.).

III.

Pour donner une application du théorème précédent, que l'on puisse vérifier, je suppose que l'équation (3.) ne soit que du second degré et se réduise à

$$5. \quad (a - a'y)x^2 + (b - b'y)x + c - c'y = 0.$$

On en déduira, pour ses deux racines,

$$y_1 = \frac{b'y - b + v}{2(a - a'y)}, \quad y_2 = \frac{b'y - b - v}{2(a - a'y)},$$

en faisant, pour abréger,

$$v = \sqrt{[(b'y - b)^2 - 4(a'y - a)(c'y - c)]}.$$

En supposant aussi $X = x$, on aura, en même tems,

$$Fx = \int \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \partial x.$$

Par les règles ordinaires, on en conclura

$$Fx = \frac{ax}{a'} + A \log(x - \alpha) + B \log(x - \beta),$$

en désignant par α et β les deux racines de l'équation

$$a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

et faisant, pour abréger,

$$\frac{(a'b - ab')\alpha + a'c - ac'}{(\alpha - \beta)a'^2} = A, \qquad \frac{(a'b - ab')\beta + a'c - ac'}{(\beta - \alpha)a'^2} = B.$$

Par conséquent, l'équation (1.) deviendra

$$\int y_i \partial y = (a'y - a)\frac{y_i}{a'} - A \log(y_i - \alpha) - B \log(y_i - \beta) + C,$$

et si l'on y met successivement les valeurs de y_1 et y_2 à la place de y_i, et que l'on fasse la somme et la différence des resultats, on aura

$$6. \quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{b'y - b}{a - a'y} \partial y = \frac{b - b'y}{a'} - A \log[(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha)] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - B \log[(y_1 - \beta)(y_2 - \beta)] + \text{const.}, \\ \displaystyle\int \frac{v \partial y}{a'y - a} = \frac{v}{a'} + A \log\left(\frac{y_1 - \alpha}{y_2 - \alpha}\right) + B \log\left(\frac{y_1 - \beta}{y_2 - \beta}\right) + \text{const.} \end{cases}$$

Les produits $(y_1-\alpha)(y_2-\alpha)$ et $(y_1-\beta)(y_2-\beta)$ ne sont autre chose que le premier membre de l'équation (5.) divisé par $a-a'y$, et dans lequel on substitueroit successivement α et β au lieu de x; et comme ces substitutions réduisent à zéro le coëfficient de y dans ce premier membre, il s'ensuit que l'on a

$$(y_1-\alpha)(y_2-\alpha)=\frac{a\alpha^2+b\alpha+c}{a-a'y},\quad (y_1-\beta)(y_2-\beta)=\frac{a\beta^2+b\beta+c}{a-a'y}.$$

Donc, en observant que

$$\frac{b'y-b}{a-a'y}=-\frac{b'}{a'}+\frac{ab'-a'b}{(a-a'y)a'},$$

et ayant égard aux valeurs de A et B, la première équation (6.) deviendra

$$\frac{ab'-a'b}{a'}\int\frac{\partial y}{a-a'y}=-\frac{(ab'-a'b)}{a'^2}\log(a-a'y)+\text{const.};$$

ce qui est, en effet, évident.

Quant à la deuxième équation (6.), on a d'abord

$$A\log\left(\frac{y_1-\alpha}{y_2-\alpha}\right)+B\log\left(\frac{y_1-\beta}{y_2-\beta}\right)$$
$$=\frac{a'b-ab'}{2a'^2}\log\frac{(y_1-\alpha)(y_1-\beta)}{(y_2-\alpha)(y_2-\beta)}+\frac{(a'b-ab')(\alpha+\beta)+2a'c-2ac'}{2(\alpha-\beta)a'^2}\log\frac{(y_1-\alpha)(y_2-\beta)}{(y_2-\alpha)(y_1-\beta)};$$

au moyen des valeurs de y_1 et y_2, et à cause de

$$\alpha+\beta=-\frac{b'}{a'},\quad \alpha\beta=\frac{c'}{a'},$$

on trouve

$$\frac{(y_1-\alpha)(y_1-\beta)}{(y_2-\alpha)(y_2-\beta)}=\frac{(ab'-a'b+a'v)(b'y-b)-(2ac'-2a'c+b'v)(a'y-a)}{(ab'-a'b-a'v)(b'y-b)-(2ac'-2a'c-b'v)(a'y-a)},$$
$$\frac{(y_1-\alpha)(y_2-\beta)}{(y_2-\alpha)(y_1-\beta)}=\frac{(4a'c'-b'^2)y-2a'c-2ac'+bb'-(\alpha-\beta)a'v}{(4a'c'-b'^2)y-2a'c-2ac'+bb'+(\alpha-\beta)a'v};$$

et cela étant, cette seconde équation (6.) devient

$$\int\frac{v\,\partial y}{a'y-a}=\frac{v}{a'}+\frac{a'b-ab'}{2a'^2}\log\frac{(ab'-a'b+a'v)(b'y-b)-(2ac'-2a'c+b'v)(a'y-a)}{(ab'-a'b-a'v)(b'y-b)-(2ac'-2a'c-b'v)(a'y-a)}$$
$$+\frac{2a'^2c+ab'^2-2aa'c'-a'bb'}{2(\alpha-\beta)a'^2}\log\frac{(4a'c'-b'^2)y-2a'c-2ac'+bb'-(\alpha-\beta)a'v}{(4a'c'-b'^2)y-2a'c-2ac'+bb'+(\alpha-\beta)a'v}+\text{const.};$$

ce que l'on pourra effectivement vérifier par les règles ordinaires du calcul intégral.

Dans le cas de $\alpha=\beta$, le 3e terme de cette formule se presente sous la forme $\frac{0}{0}$; et comme on a alors $b'^2=4a'c'$, on trouve $\frac{v}{a'}$ pour sa vraie valeur. Si a' est zéro, on supposera d'abord cette constante infiniment petite, et l'on développera ensuite la formule suivant les puissances de a'.

IV.

Je suppose actuellement que l'équation qui lie entre elles les variables x et y, ne differe de l'équation (3.) qu'en ce qu'elle renferme y^2 au lieu de y, de sorte que nous ayons

$$7.\quad ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l = (a'x^n + b'x^{n-1} + \ldots + k'x + l')y^2.$$

Je désignerai toujours par $y_1, y_2, \ldots y_n$, les n valeurs de x que l'on tire de cette équation, et par Y_i ce que devient le polynome X, lorsqu'on y met y_i au lieu de x. L'équation (7.) donne aussi

$$y = \pm\sqrt{(fx)};$$

fx étant la même fonction rationnelle que précédemment. En regardant le radical $\sqrt{(fx)}$ comme une quantité positive, on devra prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que la variable y sera positive ou négative. Pour fixer les idées, je supposerai qu'elle soit positive; et si l'on fait alors

$$\int\sqrt{(fx)}\,\partial X = \psi x,$$

et que l'on mette y_i au lieu de x dans l'équation (2.), elle deviendra

$$\int Y_i\,\partial y + \psi y_i = yY_i + C.$$

Cette équation subsistera pour les n racines de l'équation (7.). En les substituant successivement à la place de y_i, et prenant la somme des résultats, on aura donc

$$8.\quad \psi y_1 + \psi y_2 + \ldots + \psi y_n = yY - \int Y\,\partial y + C,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = Y,$$

et C étant toujours une constante arbitraire. Or, puisque Y_i est une fonction rationnelle de y_i, la somme Y sera une fonction rationnelle et symétrique des racines de l'équation (7.), dont on pourra obtenir la valeur en fonction rationnelle des coëfficients de cette équation. Cette quantité Y est donc une fonction rationnelle de y; et, par conséquant, l'intégrale $\int Y\,\partial y$ s'obtiendra toujours sous forme finie.

Donc, en vertu de l'équation (8.), la somme des valeurs de l'intégrale ψx, qui répondent aux n racines de l'équation (7.) prises successivement pour la variable x, s'exprimera sous forme finie, en fonction de y, quoique cette intégrale ψx ne puisse pas s'obtenir sous forme finie, ni même se réduire, en général, à des fonctions plus simples, telle que les fonctions elliptiques.

V.

Avant d'aller plus loin, il est bon de vérifier ce théorème sur un exemple.

Supposons, pour cela, que l'équation (7.) soit

$$(1-x)(h-x) = (1+x)(h+x)y^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$9. \quad x^2-(1+h)px+h = 0;$$

h étant une constante, et en faisant, pour abréger,

$$\frac{1+y^2}{1-y^2} = p.$$

Supposons aussi que l'on ait simplement $X=x$.

On aura, dans ce cas,

$$10. \quad \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}(1+h)p+\frac{1}{2}\sqrt{((1+h)^2p^2-4h)}, \\ y_2 = \frac{1}{2}(1+h)p-\frac{1}{2}\sqrt{((1+h)^2p^2-4h)}, \end{cases}$$

pour les deux racines de l'équation donnée. La quantité Y sera leur somme en sorte que l'on aura aussi

$$Y = \frac{(1+h)(1+y^2)}{1-y^2},$$

$$\int Y\partial y = -(1+h)y+(1+h)\log\frac{1+y}{1-y}.$$

L'intégrale representée par ψx sera

$$\psi x = \int\sqrt{\left(\frac{(1-x)(h-x)}{(1+x)(h+x)}\right)}\partial x;$$

et si nous faisons

$$\int\frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{((1-x^2)(h^2-x^2))}} = \varphi x, \quad \int\frac{x\partial x}{\sqrt{((1-x^2)(h^2-x^2))}} = \varphi' x,$$

elle pourra s'écrire ainsi

$$\psi x = \varphi x-(1+h)\varphi' x.$$

Par conséquent, l'équation (8.) deviendra

$$11. \quad \varphi y_1+\varphi y_2 = (1+h)\left(\frac{2y}{1-y^2}-\log\frac{1+y}{1-y}+\varphi' y_1+\varphi' y_2\right)+C.$$

Elle subsistera pour toutes les valeurs positives de y, en y regardant le radical $\sqrt{[(1-x^2)(h^2-x^2)]}$ comme une quantité positive. Si cette variable est négative, l'équation (11.) subsistera encore, en y changeant le signe du radical, ce qui changera ceux de φx et $\varphi' x$,

On aura, sous forme finie,

$$\varphi' x = \frac{1}{2}\log[2x^2-1-h^2+2\sqrt{((1-x^2)(h^2-x^2))}].$$

L'équation (9.) donne

$$1-x^2=(1+h)(1-px), \qquad h^2-x^2=(1+h)(h-px);$$

d'où il résulte d'abord

$$\varphi' x = \tfrac{1}{2}\log(1+h)+\tfrac{1}{2}\log[2px-1-h+2\sqrt{((1-px)(h-px))}];$$

mais en vertu de l'équation (9.), on a aussi

$$(1-px)(h-px) = h-(1+h)px+p^2x^2 = x^2(p^2-1);$$

et en faisant

$$p+\sqrt{(p^2-1)} = \frac{1+y}{1-y} = q,$$

on en conclut

$$\varphi' x = \tfrac{1}{2}\log(1+h)+\tfrac{1}{2}\log(2qx-1-h).$$

Cela étant, nous aurons

$$\varphi' y_1+\varphi' y_2 = \log(1+h)+\tfrac{1}{2}\log[4q^2y_1y_2-2q(1+h)(y_1+y_2)+(1+h)^2];$$

et comme, d'après la même équation (9.) dont y_1 et y_2 sont les deux racines, on a

$$12. \quad y_1y_2=h, \quad y_1+y_2=(1+h)p,$$

il en résulte que la quantité comprise sous le second logarithme se réduira au carré de $\frac{(1-h)(1+y)}{1-y}$, en ayant égard aux valeurs de p et q; par conséquent, on aura

$$\varphi' y_1+\varphi' y_2 = \log(1-h^2)+\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Au moyen de cette valeur, et en comprenant le terme $(1+h)\log(1-h^2)$ dans la constante C, la partie logarithmique disparoîtra du second membre de l'équation (11.), qui deviendra simplement

$$\varphi y_1+\varphi y_2 = \frac{2(1+h)y}{1-y^2}+C.$$

Pour déterminer la constante C, je supposerai que les intégrales φy_1 et φy_2 s'évanouissent pour $y=0$, ce qui rendra nulle cette constante. D'après les formules (10.), on a $y_1=1$ et $y_2=h$ pour $y=0$; les quantités φy_1 et φy_2 seront donc alors l'intégrale φx, prise depuis $x=1$ jusqu'à $x=y_1$ pour φy_1, et depuis $x=h$ jusqu'à $x=y_2$ pour φy_2; en sorte que l'on aura finalement

$$13. \quad \int_1^{y_1}\frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{((1-x^2)(h^2-x^2))}}+\int_h^{y_2}\frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{((1-x^2)(h^2-x^2))}} = \frac{2(1+h)y}{1-y^2}.$$

On vérifiera cette équation en différentiant ses deux membres par rapport à y; ce qui donne

$$\frac{(h+y_1^2)\partial y_1}{\sqrt{((1-y_1^2)(h^2-y_1^2))}}+\frac{(h+y_2^2)\partial y_2}{\sqrt{((1-y_2^2)(h^2-y_2^2))}} = \frac{2(1+h)(1+y^2)\partial y}{(1-y^2)^2};$$

or, l'équation (9.) donne aussi, d'après ce qu'on a vu plus haut,

$$\sqrt{((1-x^2)(h^2-x^2))} = x(1+h)\sqrt{(p^2-1)};$$

en différentiant cette même équation (9.), il vient

$$[2x-(1+h)p]\partial x = (1+h)x\partial p;$$

en mettant donc successivement y_1 et y_2 à la place de x, dans ces deux dernières équations, on aura les valeurs des radicaux contenus dans l'équation différentielle précédente, et des différentielles ∂y_1 et ∂y_2; et en vertu des équations (12.), ces quatre valeurs et celle de p rendront cette équation différentielle identique.

Il suit de cette vérification que l'équation (13.) a lieu; non seulement pour les valeurs positives ou négatives de y, mais aussi pour les valeurs imaginaires de cette variable. En y mettant $y\sqrt{-1}$ à la place de y, et changeant le signe de l'un des facteurs sous les radicaux, nous aurons cette seconde équation

$$14. \quad \int_1^{y_1} \frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{((1-x^2)(x^2-h^2))}} + \int_h^{y_2} \frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{((1-x^2)(x^2-h^2))}} = -\frac{2(1+h)y}{(1+y^2)},$$

dans laquelle la variable y sera supposée réelle, et où l'on prendra les radicaux avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, selon que cette variable sera positive ou négative. En même tems, les équations (12.) deviendront

$$15. \quad y_1 y_2 = h, \quad y_1 + y_2 = \frac{(1+h)(1-y^2)}{1+y^2}.$$

VI.

L'une ou l'autre de ces équations (13.) ou (14.), la seconde, par exemple, pourra encore être vérifiée par la transformation des intégrales qu'elle renferme, en fonctions elliptiques.

A cet effet, je suppose la constante h moindre que l'unité, et je fais

$$1-h^2 = c^2, \quad x^2 = \frac{h^2}{1-c^2\sin^2\varphi}.$$

Il en resultera

$$\frac{\partial x}{\sqrt{((1-x^2)(x^2-h^2))}} = \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}};$$

les valeurs de φ qui répondent à $x=1$ et $x=h$ seront $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ et $\varphi=0$; en appelant donc φ_1 et φ_2, celles qui répondent à y_1 et y_2, l'équation (14.) prendra la forme:

$$h\left[\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi_1} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}} + \int_0^{\varphi_2} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}\right]$$
$$+h^2\left[\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi_1} \frac{\partial\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{\varphi_2} \frac{\partial\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\right] = -\frac{2(1+h)y}{1+y^2},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$h\left[\int_0^{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}+\int_0^{\varphi_2}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}\right]$$
$$+h^2\left[\int_0^{\varphi_1}\frac{\partial\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}+\int_0^{\varphi_2}\frac{\partial\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\right]=$$
$$h\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}+h^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\partial\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}-\frac{2(1+h)y}{1+y^2}.$$

D'ailleurs, on a identiquement

$$\frac{h^2\,\partial\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}\,\partial\varphi-c^2\,\partial.\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}};$$

en employant les notations connues de **Legendre**, pour désigner les fonctions elliptiques de première et de seconde espèce, on aura donc

$$h[F(c,\varphi_1)+F(c,\varphi_2)]+E(c,\varphi_1)+E(c,\varphi_2)$$
$$=hF(c,\tfrac{1}{2}\pi)+E(c,\tfrac{1}{2}\pi)-\frac{2(1+h)y}{1+y^2}+\frac{c^2\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi_1)}}+\frac{c^2\sin\varphi_2\cos\varphi_2}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi_2)}}.$$

Mais, d'après la valeur de x^2, on a

$$16.\quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{(x^2-h^2)}}{cx},\quad \cos\varphi=\frac{h\sqrt{(1-x^2)}}{cx},\quad \sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}=\frac{h}{x};$$

d'où l'on conclut, en vertu de l'équation (9.),

$$\frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}=\frac{1}{x}\sqrt{[(x^2-h^2)(1-x^2)]}=\frac{y}{x}(1+x)(h+x),$$

en mettant $y\sqrt{-1}$ au lieu de y, et prenant le radical avec le même signe que y, comme le suppose l'équation (14.). On aura donc

$$\frac{c^2\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi_1)}}+\frac{c^2\sin\varphi_2\cos\varphi_2}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi_2)}}=\frac{hy}{y_1y_2}(y_1+y_2)+2y(1+h)+y(y_1+y_2);$$

quantité qui se réduit à $\frac{4y(1+h)}{1+y^2}$, en ayant égard aux équations (15.). Par conséquent nous aurons, pour l'équation (14.) transformée en fonctions elliptiques,

$$17.\quad h[F(c,\varphi_1)+F(c,\varphi_2)]+E(c,\varphi_1)+E(c,\varphi_2)=$$
$$hF(c,\tfrac{1}{2}\pi)+E(c,\tfrac{1}{2}\pi)+\frac{2y(1+h)}{1+y^2};$$

resultat facile à vérifier, au moyen des propriétés connues de ce genre de quantités.

Soit, en effet, w un angle tel que l'on ait

$$F(c,\varphi_1)+F(c,\varphi_2)=F(c,w);$$

pour ce même angle, on aura aussi, comme on sait,

$$E(c,\varphi_1)+E(c,\varphi_2)=E(c,w)+c\sin w\sin\varphi_1\sin\varphi_2;$$

d'après la première formule (16.), appliquée aux angles φ_1 et φ_2, on a

d'ailleurs
$$c^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \frac{1}{y_1 y_2} \sqrt{[(y_1^2 - h^2)(y_2^2 - h^2)]};$$
quantité qui se réduit à $\frac{2y(1+h)}{1+y^2}$, en vertu des équations (15.); par conséquent, l'équation (17.) deviendra
$$18. \quad hF(c,w) + E(c,w) = hF(c,\tfrac{1}{2}\pi) + E(c,\tfrac{1}{2}\pi) + \frac{2y(1+h)}{1+y^2}(1 - \sin w).$$
Or, on sait aussi que l'angle w sera déterminé par l'équation *)
$$\cos w = \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi_1)} \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi_2)}}{1 - c^2 \sin^2\varphi_1 \sin^2\varphi_2};$$
et d'après les formules (16.), le numérateur de cette expression a pour valeur
$$\frac{h^2}{c^2}\left[\sqrt{[(1-y_1^2)(1-y_2^2)]} - \frac{1}{y_1 y_2}\sqrt{[(y_1^2 - h^2)(y_2^2 - h^2)]}\right];$$
quantité qui se reduit à zéro, en vertu des équations (15.). On a donc
$$\cos w = 0, \quad w = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \sin w = 1;$$
ce qui rend identique l'équation (18.) qu'il s'agissoit de vérifier.

VII.

Revenons maintenant à l'équation (8.).

En la différentiant par rapport à y, on a
$$\sqrt{(fy_1)}\,\partial Y_1 + \sqrt{(fy_2)}\,\partial Y_2 + \ldots + \sqrt{(fy_n)}\,\partial Y_n = y\,\partial Y;$$
et dans cette équation différentielle entre $y, y_1, y_2, \ldots y_n$, ces $n+1$ variables sont séparées; car Y est une fonction de y (§. IV.), et $Y_1, Y_2, \ldots \ldots Y_n$, sont respectivement des fonctions de $y_1, y_2, \ldots y_n$. Or, en mettant successivement $y_1, y_2, \ldots y_n$, au lieu de x dans l'équation (7.), on aura
$$ay_1^n + by_1^{n-1} + \ldots + ky_1 + l = (a'y_1^n + b'y_1^{n-1} + \ldots + k'y_1 + l')y^2,$$
$$ay_2^n + by_2^{n-1} + \ldots + ky_2 + l = (a'y_2^n + b'y_2^{n-1} + \ldots + k'y_2 + l')y^2,$$
. . . .

. . . .
$$ay_n^n + by_n^{n-1} + \ldots + ky_n + l = (a'y_n^n + b'y_n^{n-1} + \ldots + k'y_n + l')y^2;$$
ce système d'équations algébriques entre les $n+1$ variables $y, y_1, y_2, \ldots \ldots y_n$, satisfera donc à l'équation différentielle précédente; mais il n'en sera qu'une intégrale particulière, parcequ'il ne renferme aucune constante arbitraire.

---

*) *Traité des fonctions elliptiques, tome 1er, page 22.*

Pour un indice quelconque i, on se rappellera que l'on a, dans cette équation différentielle,

$$fy_i = \frac{ay_i^n + by_i^{n-1} + \ldots + ky_i + l}{a'y_i^n + b'y_i^{n-1} + \ldots + k'y_i + l'},$$

et que Y_i est une fonction rationnelle et entière de y_i, ou un polynome en y_i, d'un degré quelconque.

VIII.

Le théorème contenu dans l'équation (8.) est distinct de celui qu'Abel a donné dans le journal de M. Crelle*), et dont Legendre a fait la base du 3e supplément à son traité des fonctions elliptiques. Mais on parvient aussi à un théorème semblable à celui d'Abel, par les considérations très-simples qui nous ont conduit à l'équation (8.).

Pour le faire voir, soient $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, $f_1 x$, $f_2 x$, quatre polynomes d'un degré quelconque par rapport à x: les coëfficients des deux premiers sont des constantes données; ceux des deux dernièrs sont des fonctions rationnelles d'une variable z; une autre variable y est liée à x et y par les deux équations;

$$(a.) \quad \varphi_1 x = y^2 \varphi_2 x, \quad f_1 x = y f_2 x;$$

d'où l'on tire cette troisième équation

$$(b.) \quad \varphi_1 x (f_2 x)^2 - \varphi_2 x (f_1 x)^2 = 0,$$

entre x et z. La première équation (a.) donne aussi

$$y = \pm \sqrt{\left(\frac{\varphi_1 x}{\varphi_2 x}\right)},$$

où l'on prendra le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que le rapport $\frac{f_1 x}{f_2 x}$, qui exprime la valeur de y tirée de la seconde équation (a.), sera positif ou négatif.

Désignons aussi par X une fonction rationnelle et donnée de la seule variable x, et faisons

$$\pm \int X \sqrt{\left(\frac{\varphi_1 x}{\varphi_2 x}\right)} \partial x = \psi x;$$

le signe étant déterminé d'après celui de y, ou de $\frac{f_1 x}{f_2 x}$, comme on vient de le dire. L'intégrale $\int X \partial x$ se composera d'une partie entière et d'une partie logarithmique; en sorte que l'on pourra toujours la représenter par

$$\int X \partial x = P + A \log(x - \alpha) + B \log(x - \beta) + \text{etc.};$$

*) Tome III., page 313.

P étant un polynome en x, et A, B, etc., α, β, etc.; désignant des constantes réelles ou imaginaires, dont le nombre sera double de celui qui marque le degré du dénominateur de X.

Cela posé, si l'on met $\int X\partial x$ au lieu de X dans l'équation (2.), on aura

$$\int\left(\int X\partial x\right)\partial y+\int yX\partial x=y\int X\partial x+C;$$

et d'après les valeurs précédentes de y, ψx, $\int X\partial x$, il en résultera

$$\psi x+\int P\partial y+A\int\log(x-\alpha)\partial y+B\int\log(x-\beta)\partial y+\text{etc.}$$
$$=yP+yA\log(x-\alpha)+yB\log(x-\beta)+\text{etc.}+C.$$

Mais, en intégrant par partie, on a

$$\int\log(x-\alpha)\partial y=y\log(x-\alpha)-\int\frac{y\partial x}{x-\alpha},$$
$$\int\log(x-\beta)\partial y=y\log(x-\beta)-\int\frac{y\partial x}{x-\beta};$$

etc.;

d'après la valeur de $\int X\partial x$, on a aussi

$$X\partial x-\partial P=\frac{A\partial x}{x-\alpha}+\frac{B\partial x}{x-\beta}+\text{etc.};$$

il en résultera donc

$$A\int\log(x-\alpha)\partial y+B\int\log(x-\beta)\partial y+\text{etc.}$$
$$=yA\log(x-\alpha)+yB\log(x-\beta)+\text{etc.}+\int y(\partial P-X\partial x),$$

et, par conséquent

$$\psi x+\int P\partial y+\int y\partial P-\int yX\partial x=yP+C.$$

Donc, à cause de

$$\int P\partial y+\int y\partial P=yP,\quad y=\frac{f_1 x}{f_2 x},$$

on aura simplement

$$\psi x=\int\frac{Xf_1 x}{f_2 x}\partial x+C.$$

En différentiant l'équation (*b*.) par rapport à x et z, on en déduira une valeur de ∂x que je représenterai par

$$\partial x=X'\partial z;$$

X' étant une fonction rationnelle de x et z. Si donc on fait

$$\frac{XX'f_1 x}{f_2 x}=Q,$$

de sorte que Q soit aussi une fonction rationnelle de x et z, on aura

$$\psi x=\int Q\partial z+C.$$



Maintenant, soit m le degré de l'équation ($b.$) par rapport à x; désignons par z_1, z_2, ... z_m, ses m racines en fonctions de z, et par Q_1, Q_2, ... Q_m, les valeurs correspondantes de Q: en faisant, pour abréger,

$$Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_m = Z,$$

substituant successivément z_1, z_2, ... z_m, à la place de x, dans l'équation précédente, et prenant la somme des résultats, nous aurons

$$\psi z_1 + \psi z_2 + \ldots + \psi z_m = \int Z\,\partial z + C.$$

Or, Z sera une fonction symétrique et rationnelle des racines de l'équation ($b.$), et, conséquemment une pareille fonction de ses coëfficients; par conséquent l'intégrale $\int Z\,\partial z$ s'obtiendra toujours sous forme finie, par les règles ordinaires; d'où il résulte que la somme des valeurs de l'intégrale ψx, qui répondent aux m racines de l'équation ($b.$), s'obtiendra aussi sous forme finie, en fonction des coëfficients des quatre polynomes $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, $f_1 x$, $f_2 x$; ce qui est conforme au théorème d'Abel que l'on vient de citer. Dans cette somme, on devra ajouter ou retrancher les diverses valeurs de ψx, selon que les valeurs correspondantes z_1, z_2, ... z_m, de x, rendront positive ou négative la valeur de y, ou du rapport $\frac{f_1 x}{f_2 x}$.

On se borne ici à faire voir que la somme des m valeurs de ψx est toujours exprimable sous forme finie; la valeur de cette somme s'obtiendra, dans chaque cas, par le calcul des fonctions symétriques des racines d'une équation, qui fera connoître la quantité Z, et ensuite par les règles de l'intégration des fractions rationnelles, qui donneront l'intégrale $\int Z\,\partial z$; mais Abel a donné l'expression générale de cette somme de valeurs, ainsi qu'on peut le voir dans son mémoire et dans le supplément de Legendre. Cette expression, pour être appliquée aux notations précédentes, suppose que l'on fasse

$$\varphi_1 x\,\varphi_2 x = \varphi x, \qquad X = \frac{fx}{(x-\alpha)\varphi x};$$

φx et fx étant des polynomes en x d'un degré quelconque, et α désignant une constante donnée.

IX.

Au lieu de mettre y^2 à la place de y dans l'équation (3.), ainsi qu'on l'a fait précédemment (§. 4.), on auroit pu remplacer y par la puissance quelconque m de cette variable, et il est évident qu'on seroit par-

venu à une équation (8.) dans laquelle l'intégrale ψx contiendroit la racine m au lieu de la racine carrée d'une fonction rationnelle de x. Plus généralement encore, on peut étendre l'équation (8.) à l'intégrale d'une fonction algébrique quelconque, explicite ou implicite, et le raisonnement relatif à cette extension ne sera qu'une répétition de celui qu'on a exposé dans le quatrième paragraphe.

En effet, soient X un polynome en x et fx une fonction algébrique de cette variable; si nous faisons

$$y = fx, \quad \psi x = \int fx \, \partial X,$$

l'équation (2.) deviendra

$$(c.) \quad \int X \partial y + \psi x = yX + C.$$

Supposons que l'on fasse disparoître les radicaux et les dénominateurs dans l'équation $y = fx$, désignons par $R = 0$ l'équation qui en résultera, et soit n son degré par rapport à x. On en tirera n valeurs de x en fonctions de y; nous les representerons par $y_1, y_2, \ldots. y_n$, et par $Y, Y_2, \ldots \ldots Y_n$, les valeurs correspondantes de X. En substituant successivement ces n valeurs de x dans l'équation précédente, et prenant la somme des résultats, nous aurons

$$\int (Y_1 + Y_2 + \ldots. + Y_n) \partial y + \psi y_1 + \psi y_2 + \ldots. + \psi y_n = y(Y_1 + Y_2 + \ldots. Y_n) + \text{const.},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\psi y_1 + \psi y_2 + \ldots. + \psi y_n = yY - \int Y \partial y + \text{const.},$$

en faisant, pour abréger,

$$Y_1 + Y_2 + \ldots. + Y_n = Y.$$

Or, cette somme Y sera une fonction symétrique et rationnelle des racines de l'équation $R = 0$; par conséquant, une semblable fonction de ses coëfficients, et, conséquemment aussi, une fonction rationnelle de y. Donc l'intégrale $\int Y \partial y$ s'obtiendra toujours sous forme finie, par les règles ordinaires; donc aussi la somme des n valeurs de l'intégrale ψx, d'une fonction algébrique quelconque, qui répondent aux n valeurs de x tirées de l'équation $R = 0$, est toujours exprimable sous forme finie en fonction de y.

On parviendra à un second théorème distinct de cette proposition générale, en supposant, comme dans le paragraphe précédent, que la variable y soit liée à x et à une autre variable z, par l'équation

$$f_1 x = y f_2 x,$$

de ce paragraphe. Mettons, de plus, $\int X \partial x$ à la place de X dans ψx qui deviendra alors

$$\psi x = \int X f x \, \partial x;$$

et supposons que X soit actuellement une fonction rationnelle, entière ou fractionnaire de x, de sorte que l'on ait, comme dans ce même paragraphe,

$$\int X \partial x = P + A \log(x-\alpha) + B \log(x-\beta) + \text{etc.}$$

En y substituant cette valeur de $\int X \partial x$ au lieu de X, l'équation (c.) deviendra

$$\psi x + \int P \partial y + A \int \log(x-\alpha)\, \partial y + B \int \log(x-\beta)\, \partial y + \text{etc.} =$$
$$Py + yA \log(x-\alpha) + yB \log(x-\beta) + \text{etc.} + C.$$

Par l'intégration par partie, pratiquée sur les intégrales $\int \log(x-\alpha)\, \partial y$, $\int \log(x-\beta)\, \partial y$, etc., on réduira cette équation à

$$\psi x = \int y X \partial x + C,$$

ou bien à

$$\psi x = \int \frac{X f_1 x}{f_2 x} \partial x + C,$$

en mettant pour y sa valeur $\frac{f_1 x}{f_2 x}$. Or, si l'on substitue aussi cette valeur de y dans l'équation $R = 0$, il en résultera une équation en x et z que je désignerai par $T = 0$, et je representerai par $\partial x = X' \partial z$ sa différentielle par rapport à ces deux variables, dont X' sera une fonction rationnelle. En faisant, comme plus haut,

$$\frac{X X' f_1 x}{f_2 x} = Q,$$

cette quantité Q sera également une fonction rationnelle de x et z, et l'on aura

$$\psi x = \int Q \partial z + C.$$

Je désignerai par m le degré de l'équation $T = 0$ par rapport à x; je representerai par $z_1, z_2, \ldots. z_m$, ses m racines, et par $Q_1, Q_2, \ldots. Q_m$, les valeurs correspondantes de Q: en faisant toujours

$$Z_1 + Z_2 + \ldots. + Z_m = Z,$$

substituant successivement $z_1, z_2, \ldots. z_m$, au lieu de z dans l'équation précédente, et prenant la somme des resultats, on aura

$$\psi z_1 + \psi z_2 + \ldots. + \psi z_m = \int Z \partial z + \text{const.}$$

Cela posé, on verra, comme précédemment, que l'intégrale $\int Z\,\partial z$ pourra toujours s'obtenir sous forme finie. Par conséquent, quelles que soient la fonction algébrique fx et la fonction rationnelle X de x, la somme des valeurs de l'intégrale ψx, ou $\int Xfx\,\partial x$, qui répondent aux valeurs de x tirées de l'équation $f_1 x = f_2 x fx$, laquelle devient, $T = 0$ après qu'on a fait disparoître les radicaux et les dénominateurs; cette somme, disons-nous, sera toujours exprimable sous forme finie, en fonction de la variable z, dont les coëfficiens des polynomes $f_1 x$ et $f_2 x$ sont des fonctions rationnelles quelconques.

5.

Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes.

(Par Mr. *Plücker*, prof. ord. de math. à l'université de Halle.)

La découverte du *principe de reciprocité* (théorie des polaires reciproques) ou ce qui est identiquement la même chose, celui de *dualité* a fait naître une foule de questions nouvelles, dont l'une que je regarde avec M. Poncelet comme fondamentale n'a pas été resolue jusqu'à ce jour malgré les efforts des plus habiles géomètres.

M. Gergonne lorsqu'il introduisit le premier ses doubles colonnes, qui depuis ont fait fortune a supposé que le degré d'une courbe soit égal à celui de sa polaire, ou, en autres termes, que le nombre des points d'intresection d'une courbe algébrique d'un degré quelconque avec une droite donnée soit en général égal au nombre des tangentes à la même courbe passant par un point donné. Plusieurs ans au paravant M. Poncelet avoit déjà reconnu le contraire, en annonçant que, si le degré de la proposée est m, le nombre de ses tangentes, partant d'un même point donné est de $m(m-1)$: fait évident et très facile à prouver par l'analyse. Cedant enfin malgré lui M. Gergonne garantit à ses doubles colonnes leur validité en remplaçant seulement dans l'une d'elles le mot *degré* par le mot *classe*. D'après cette dénomination une courbe proposée du $m^{\text{ième}}$ degré est de la $m(m-1)^{\text{ième}}$ classe et sa polaire de la $m^{\text{ième}}$ classe. Cette nouvelle classification des courbes me parait très importante; en l'adoptant je me plais de reconnaitre que la méprise même d'un homme d'esprit porte ses fruits.

Dès que les courbes passent le second degré il se presente une difficulté, que je vais exposer. Le degré d'une courbe proposée étant m, celui de sa polaire sera en général $m(m-1)$. Cette nouvelle courbe a réciproquement pour sa polaire la proposée. Tandis donc, qu'en général une courbe du $m(m-1)^{\text{ième}}$ degré a pour polaire une courbe du $m(m-1)[m(m-1)-1]^{\text{ième}}$ degré, une courbe particulière de ce même

degré a pour polaire une courbe du $m^{\text{ième}}$ degré seulement. Ainsi par exemple à une courbe du $3^{\text{ième}}$ degré repond comme polaire une courbe du $6^{\text{ième}}$, à une courbe du $6^{\text{ième}}$ degré en général une courbe du $30^{\text{ième}}$; mais dans le cas particulier en question ce degré se reduit de 27 unités et redescend au troisième. De même à une courbe du $4^{\text{ième}}$ degré repond comme polaire une courbe du $12^{\text{ième}}$, à une courbe du $12^{\text{ième}}$ degré en général une courbe du $132^{\text{ième}}$; mais dans le cas particulier ce degré, en se rabaissant de 128 unités, redevient le $4^{\text{ième}}$ Quelle et donc la nature de la courbe particulière qui produise une réduction si extraordinaire? Voilà la difficulté à résoudre.

M. Poncelet essaya d'en donner l'explication dans le présent Journal (vol. IV. p. 13.). Il l'a trouvé dans les points doubles de la courbe polaire de la proposée, dont chacun d'après lui produit dans le degré de la polaire réciproque une réduction de deux unités. Je designois aussitôt (Analitische Entwickelungen vol. II. p. 288., note) cette explication comme incomplete, vu qu'une courbe du $m(m-1)^{\text{ième}}$ degré ne pourroit jamais avoir un nombre de points doubles suffisant pour opérer la réduction exigée. J'aurais dû ajouter, que dans le cas de $m=3$, la courbe proposée ne permettant pas d'être touchée par une même ligne droite en deux points différens, sa polaire ne pourroit pas admettre de points doubles. Plus tard, dans la suite de ses mémoires (voy. le présent Journal vol. VIII., p. 38.) M. Poncelet convient, en parlant de l'explication en question „de n'avoir fait que glisser sur cette importante et difficile matière." Ensuite il continue ainsi: „En effet la solution de ces „questions dépend du perfectionnement d'une autre théorie, celle des points „singuliers des courbes, qui n'est pas encore complètement faite malgré „les savantes recherches de nos premiers géomètres, et elle tient aussi „aux difficultés les plus ardues de la science de l'élimination. Mais, quoi„que les considérations d'une géométrie purement intuitive, appuyée de „notions qui dérivent de l'admission du principe de continuité, nous aient „permis d'entrer plus avant dans le fond de la question, nous ne saurions „nous flatter cependant d'en avoir éclairci entièrement les difficultés et „d'avoir dissipé tous les nuages dont elle demeure encore enveloppée."

Voilà l'état de la question dont je me propose de consigner ici la solution.

Une courbe peut être regardée ou comme décrite par un point ou comme enveloppée par une ligne droite. Au premier mode de génération se rapporte la manière généralement en usage de représenter une courbe par une équation entre deux variables. Dans cette génération c'est un cas tout singulier si le point générateur s'arrète pour se diriger en sens contraire; les courbes représentées par les équations générales d'un degré quelconque n'admettent pas en général de points de rébroussement. Elles n'admettent pas non plus en général de points multiples ou isolés. Mais elles auront en général un certain nombre de points d'inflexion, qui ne se comportent nullement comme points singuliers, car dans de tels points le mouvement du point générateur n'est pas interrompu. Dans le second mode de génération, auquel se rapporte un algorithme non moins facile, il n'existe pas en général de points d'inflexion, parceque dans un tel point le mouvement de la droite génératrice s'arrète et continue ensuite en sens contraire. Il n'existe pas non plus en général de tangentes multiples. Mais il y aura en général un certain nombre de points doubles et de de points de rébroussement. Dans ces derniers points le mouvement de la droite génératrice ne présente aucune singularité, elle y continue à se mouvoir dans le même sens. La définition de la tangente n'est pas la même dans les deux modes de génération; dans le premier toute ligne droite passant par deux points coïncidans (consecutifs ou non) jouit du rôle de tangente, dans le second la tangente c'est la droite génératrice dans ses différentes positions. De là résulte qu'à chaque point double d'une courbe proposée reponde une réduction de *deux* unités dans le degré de sa polaire, comme M. Poncelet l'a remarqué le premier, pourvu toutefois que le point double ne soit en particulier un *point de rébroussement;* dans ce cas au contraire la réduction est de *trois* unités. D'après ces préliminaires, je passe à l'énoncé de la solution.

Les courbes représentées par l'équation générale du $m^{\text{ième}}$ degré ont en général un nombre de points d'inflexion égal à $3m(m-2)=M$ et un nombre de tangentes doubles égal à

$$\tfrac{1}{2}(m+3)m(m-2)(m-3) = N.$$

Leurs courbes polaires du $m(m+1)^{\text{ième}}$ degré auront donc en général M points de rébroussement et N points doubles proprement dits. Le degré de leurs polaires, qui pour les courbes de leur degré, est en général le

$m(m+1)[m(m+1)-1]^{\text{ième}}$, s'abaise donc de $(3M+2N)$ unités et redescend ainsi au $m^{\text{ième}}$.

Dans le cas de $m=3$ la réduction provient donc uniquement des points d'inflexion de la proposée, qui sont au nombre de 9. Six de ces 9 points sont toujours imaginaires.

Dans le cas de $m=4$ la réduction provient des 24 points d'inflexion et des 28 tangentes doubles de la proposée. Et ainsi de suite.

Je dois me contenter ici d'avoir énoncé ce resultat, auquel se rattachent une foule de question du plus grand interêt dans la théorie générale des courbes algébriques. On trouvera tous les développemens désirables sur cet important sujet dans un ouvrage qui paraîtra en peu de mois, dans lequel je me propose d'exposer un système de géométrie analytique en partant de points de vue nouveaux et en m'occupant presque exclusivement des courbes de degrés superieurs.

Halle, ce 14. Février 1834.

6.

Über eine allgemeinere Art der Affinität geometrischer Figuren.

(Von Herrn *A. F. Möbius*, Professor in Leipzig.)

In meinem „barycentrischen Calcul" habe ich zu zeigen gesucht, dafs, aufser den schon in den ersten Elementen der Geometrie in Betracht kommenden Beziehungen, in welchen Figuren zu einander stehen können, und wonach zwei Figuren einander gleich und ähnlich, oder ähnlich allein, heifsen, es noch einige andere dergleichen Beziehungen oder Verwandtschaften gebe, die, obschon von allgemeinerer Beschaffenheit, als jene schon bekannten, doch in das Gebiet der Elementar-Geometrie noch gehören, indem auch bei ihnen Puncten der einen Figur, welche in einer Geraden liegen, in einer Geraden enthaltene Puncte der andern Figur entsprechen. Ich nannte diese allgemeineren Verwandtschaften Affinität und Collineations-Verwandtschaft; denn die Gleichheit, die ich an jenem Orte zwar ebenfalls als eine besondere Verwandtschaft behandelt habe, ist im Grunde nur als eine specielle Art der Affinität zu betrachten.

Bei der Collineations-Verwandtschaft ist, wie schon ihr Name ausdrücken soll, gedachtes Entsprechen gerader Linien das alleinige sie charakterisirende Merkmal. Bei der Affinität hingegen kommt als zweites Merkmal noch hinzu, dafs je zwei Theile der einen Figur — Flächentheile, oder Theile des Raums, nachdem die Figur in einer Ebene oder im Raume überhaupt enthalten ist, — sich ihrem Inhalte nach eben so zu einander verhalten, wie die entsprechenden Theile der andern Figur.

So wie nun aus der Affinität die allgemeinere Verwandtschaft der Collineation entspringt, wenn wir von den oben erwähnten zwei Merkmalen blofs das erste beibehalten: so wird die Affinität gleichfalls in eine allgemeinere Verwandtschaft übergehen, wenn wir das erste Kennzeichen nicht mehr berücksichtigen und nur das zweite noch festhalten. Bei dieser allgemeineren Art von Affinität entsprechen also die Puncte zweier Ebenen einander dergestalt, dafs, wenn in der einen Ebene irgend

eine in sich zurücklaufende Linie gezogen wird, die entsprechende Linie in der andern Ebene, d. h. die Linie, welche durch die den Puncten der erstern Linie entsprechenden Puncte geht, eine Fläche einschliefst, die zu der von der erstern Linie begrenzten Fläche in einem constanten Verhältnisse steht. Und eben so ist es bei zwei Räumen von drei Dimensionen, die in dieser allgemeinern affinen Beziehung stehen sollen, hinreichend, wenn je zwei entsprechende Theile des einen und andern Raums, d. h. solche, deren Grenzflächen durch entsprechende Puncte bestimmt werden, ein constantes Verhältnifs zu einander haben. Hierbei können also, und werden im Allgemeinen, geraden Linien und Ebenen des einen Raums Curven und krumme Flächen im andern entsprechen, und zwar Curven und Flächen, die jede beliebige Form haben können. Denn so lange noch nicht die einander entsprechen sollenden Puncte bestimmt sind, hindert uns nichts, diese Bestimmung bei zwei Ebenen z. B. damit anzufangen, dafs wir dem Perimeter eines geradlinigen Vielecks in der einen Ebene irgend eine in sich zurücklaufende Curve in der andern entsprechend setzen, wenn nur die Flächen beider Figuren in dem constanten Verhältnisse stehen, welches je zwei entsprechende Flächen zu einander haben sollen.

Schon hieraus ist abzunehmen, dafs die Grundformeln dieser Verwandtschaft, d. i. die allgemeinen Relationen zwischen den Coordinaten zweier entsprechenden Puncte, Gleichungen mit partiellen Differenzen sein werden, indem nur solche Gleichungen zu willkürlichen Functionen und damit zu willkürlichen Curven und Flächen führen können. Diese Grundformeln zu entwickeln, und ihre Integration auszuführen, welches hier auf besonders einfache Weise geschehen kann, ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes. Ehe wir jedoch diese analytische Untersuchung beginnen, wollen wir, gröfserer Anschaulichkeit willen, den Gegenstand zuerst auf folgende rein geometrische Weise in's Auge fassen.

---

§. 1. Heifsen M und N die beiden Ebenen, deren Puncte in affiner Beziehung zu einander stehen sollen. Man denke sich die Ebene N mit zwei Systemen paralleler Geraden T, T_1, T_2, ... U, U_1, U_2, ... überzogen, von denen die Linien des einen Systems die des andern rechtwinklig schneiden; die Linien jedes der beiden Systeme für sich seien,

jede von der nächstfolgenden, unendlich wenig, aber gleich weit entfernt. Hierdurch wird N in eine unendliche Menge unendlich kleiner und einander gleicher Rechtecke zerlegt.

Heifsen nun $X, X_1, X_2, \ldots. Y, Y_1, Y_2, \ldots.$ die den $T, T_1, \ldots. U, U_1, \ldots.$ entsprechenden Linien in der Ebene M, so mufs M durch diese Linien ebenfalls in unendlich kleine und einander gleiche Vierecke getheilt werden, deren jedes von irgend zwei auf einander folgenden Linien der einen Reihe $X, \ldots.$ und zwei auf einander folgenden Linien der andern Reihe $Y, \ldots.$ begrenzt wird. Sind diese Linien wirklich gezogen, so ist damit die affine Beziehung beider Ebenen vollkommen bestimmt. Denn für irgend einen Punct der einen Ebene läfst sich nunmehr der entsprechende in der andern angeben, — dem Durchschnitte von T_p und U_q in N entspricht der Durchschnitt von X_p und Y_q in M, — und je zwei sich entsprechende Flächentheile in N und M verhalten sich wie eines der Elementar-Rechtecke in N zu einem der Elementar-Vierecke in M.

§. 2. Es entsteht jetzt die Frage, wie viel von den Linien $X, X_1, \ldots. Y, Y_1, \ldots.$ in M willkürlich gezogen werden können, und wie hiernach die übrigen zu bestimmen sind, damit die durch die Kreuzung der beiden Systeme entstehenden Vierecke, der Forderung gemäfs, einander gleich werden, und zu den rechteckigen Elementen der Ebene N in einem gegebenen Verhältnisse stehen. Wir wollen der Antwort hierauf die Betrachtung einiger speciellen Fälle vorangehen lassen.

1. Es ist klar, dafs die Forderung gleicher Elemente in M erfüllt wird, wenn jedes der beiden Systeme $X, \ldots.$ und $Y, \ldots.$ aus parallelen Geraden besteht, die in gleichen und unendlich kleinen Entfernungen auf einander folgen. Denn, welchen Winkel auch die Parallelen des einen Systems mit denen des andern machen, so wird dann immer die Ebene in einander gleiche und ähnliche Parallelogramme zerlegt. Auch sieht man ohne Schwierigkeit, dafs dann je drei Puncten der einen Ebene, welche in einer Geraden liegen, drei ebenfalls in einer Geraden befindliche Puncte der andern entsprechen. Mithin ist diese Beziehung der beiden Ebenen die Affinität im engern Sinne selbst.

2. Man lasse, wie im vorigen Falle, $Y, Y_1, \ldots.$ in gleichen Abständen von einander entfernte parallele Gerade sein; X aber sei eine willkürliche Curve. Denkt man sich nun diese Curve ohne Änderung ihrer

Gestalt parallel sich fortbewegend, so daſs jeder ihrer Puncte eine Parallele mit Y beschreibt, und hält man von allen den verschiedenen Lagen der Curve eine Reihe solcher fest, welche in unendlich kleinen und gleichen Entfernungen von einander abstehen, so werden dies die übrigen Linien X_1, X_2, ... sein. Denn auch auf diese Weise wird die Ebene in einander gleiche Parallelogramme getheilt, von denen aber nur diejenigen einander zugleich ähnlich sind, welche in einer und derselben Parallele mit Y liegen.

Hierbei entsprechen also den Graden U, U_1, ... die Geraden Y, Y_1, ..., den Geraden T, T_1, ... die Curven X, X_1, ... und eben so, wie man leicht wahrnimmt, jedem dritten Systeme paralleler Geraden in N ein System einander gleicher und ähnlicher und parallel liegender Curven in M, so daſs je zwei einander entsprechende Puncte zweier dieser Curven in einer Parallele mit Y sind.

3. Sei X eine Gerade, und die Puncte, in denen sie von Y, Y_1, ... geschnitten wird, seien gleich weit von einander entfernt. Die Linien Y, Y_1, ... aber seien Gerade, welche sich in einem von X endlich entfernten Puncte D schneiden. Man übersieht dann sogleich, daſs die Linie X_1 eine mit X parallele Gerade sein muſs, indem nur unter dieser Bedingung die zwischen X und X_1 enthaltenen Trapeze einander gleich sein können. Aus demselben Grunde müssen auch X_2 mit X_1, X_3 mit X_2, u. s. w. parallel, also X, X_1, X_2, ... einander parallele Gerade sein und zugleich in demselben Verhältniſs einander näher liegen, in welchem sie von D weiter abstehen, da in dem nämlichen Verhältnisse die von D ausgehenden Linien Y, Y_1, ... sich desto weiter von einander entfernen. Das System der Parallelen X, X_1, ... ist übrigens nicht bloſs auf die eine Seite des Punctes D beschränkt, sondern erstreckt sich auch auf die andere Seite von D, dergestalt, daſs D zwischen allen diesen Parallelen eine symmetrische Lage hat.

Um das Gesetz, nach welchem hierbei die Puncte beider Ebenen M und N auf einander zu beziehen sind, näher noch kennen zu lernen, wollen wir zwei sich entsprechende Vierecke, w in M und v in N, in's Auge fassen. Von dem Viereck w seien X und X_1, Y und Y_1 die zwei Paar gegenüberstehender Seiten; also T und T_1, U und U_1 die zwei Paar gegenüberbestehender Seiten von v. Während nun die Linien X, Y und Y_1 fest bleiben, bewege sich die Linie X_1, welche gleich aufangs dem

Puncte D näher liege, als X, parallel mit X bleibend, nach D mit gleichförmiger Geschwindigkeit zu. Hiermit wächst anfangs der Inhalt von w, aber immer langsamer. Von dem Augenblicke an aber, in welchem X_1 durch D geht, und daher das Viereck w zu einem Dreiecke wird, verwandelt sich die Zunahme in Abnahme, da gedachtes Dreieck bei der ferneren Bewegung von X_1 ein auf der entgegengesetzten Seite von D liegendes, und daher negativ zu nehmendes Dreieck, als Increment, erhält. Hat sich X_1 auf dieser Seite eben so weit von D entfernt, als X auf der andern von D liegt, so ist $w = 0$, und bei noch weiterer Bewegung von X_1 wird w negativ.

Damit nun diesen Änderungen des Inhaltes von w proportionale Änderungen von v entsprechen, so muſs die Linie T_1, welche, parallel sich fortbewegend, mit den fest bleibenden Linien T, U, U_1 ein Rechteck v zu bilden fortfährt, von T sich immer langsamer entfernen, bis sie in eine Lage Θ kommt, welche der durch D gehenden Lage von X_1 entspricht; sie muſs hierauf wieder nach T zurückkehren, und zuletzt durch T auf die andere Seite von T sich wenden, wobei v aus dem Positiven durch Null in das Negative übergeht. Hieraus ziehen wir nun die Folgerungen:

a) daſs dem Puncte D in M, in welchem sich Y, Y_1, ..., schneiden, in N nicht bloſs ein Punct, sondern alle in einer gewissen mit T parallelen Geraden Θ enthaltenen Puncte entsprechen;

b) daſs nur die auf der einen Seite von Θ liegenden Puncte in N entsprechende Puncte in M haben, und

c) daſs jedem dieser Puncte in N zwei Puncte in M entsprechen, zwischen welchen der Punct D stets in der Mitte liegt.

4. Wir wollen wiederum die Linien Y, Y_1, Y_2, ... gerade sein und sich in einem Puncte D schneiden lassen, nächstdem aber annehmen, daſs die unendlich kleinen Winkel, welche je zwei nächstfolgende bilden, insgesammt einander gleich sind. Ist alsdann X ein aus D als Mittelpunct beschriebener Kreis, so erhellet leicht, daſs die übrigen Linien X_1, X_2, ... mit X concentrische Kreise sein müssen, und daſs der gegenseitige Abstand je zweier nächstfolgenden Kreise, oder der Unterschied ihrer Halbmesser, in demselben Verhältnisse abnehmen muſs, in welchem die Halbmesser selbst zunehmen. Den Geraden T, T_1, ... entsprechen daher jetzt Kreise, und es wird mithin jedem Puncte in M eine Reihe unend-

lich vieler Puncte in N entsprechen, die sämmtlich in einer Parallele mit T und in gleich grofsen endlichen Entfernungen von einander liegen. Eben so wie im vorigen Beispiele wird ferner auch hier dem Puncte D jeder Punct in N entsprechen, der in einer gewissen Parallele Θ mit T sich befindet; auch werden nur den auf der einen Seite von Θ liegenden Puncten in N Puncte in M, und zwar jedem in N zwei in M entsprechen, zwischen welchen D in der Mitte ist.

§. 3. Seien nunmehr, um den ganz allgemeinen Fall zu betrachten, Y, Y_1, Y_2, ... irgend beliebige Linien, und nur folgenden zwei aus der Natur der Sache selbst fliefsenden Bedingungen im Allgemeinen unterworfen:

a) dafs je zwei nächstfolgende derselben, wie Y und Y_1, überall einander unendlich nahe sind, und dafs folglich jedes Element der einen mit dem nächstliegenden Elemente der andern als parallel angesehen werden kann;

b) dafs bei je drei nächstfolgenden Curven, wie Y, Y_1, Y_2, die Abstände jedes Elementes der mittlern Linie Y_1 von den nächstliegenden Elementen der zu beiden Seiten befindlichen Linien Y und Y_2 unendlich nahe in dem Verhältnisse der Gleichheit zu einander stehen, dafs also diese zwei schon an sich unendlich kleinen Abstände nur um ein unendlich Kleines einer höhern Ordnung von einander verschieden sind.

Dieses vorausgesetzt, sei X eine beliebige, die Linien Y, Y_1, Y_2, ... unter endlichen Winkeln schneidende Linie, und es kommt nun zunächst darauf an, der X unendlich nahe eine zweite Linie X_1 zu ziehen, dergestalt, dafs alle die unendlich kleinen Parallelogramme, in welche der zwischen X und X_1 enthaltene Streifen durch die Linien Y, Y_1, Y_2, ... zerlegt wird, einen und denselben gegebenen Flächeninhalt f haben. Dieses ist aber immer möglich. Denn heifsen $p, p_1, p_2, \ldots$ die Theile, in welche X in den Durchschnitten mit Y, Y_1, ... getheilt wird, und $q, q_1, q_2, \ldots$ die zugehörigen Breiten des Streifens, so sind pq, p_1q_1, p_2q_2, ... jene Parallelogramme ihrem Inhalte nach, und es sollen daher $pq = p_1q_1 = \ldots = f$ sein. Es mufs folglich die Breite des Streifens in demselben Verhältnisse zu- oder abnehmen, in welchem die Theile p, p_1, ... ab- oder zunehmen, und da sich diese Theile der Voraussetzung b) zufolge nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern, so wird auch die Breite stetig wachsen oder kleiner werden, und folglich die Linie X_1, eben so wie X, eine ste-

tige sein. Die Breite des Streifens an einer bestiminen Stelle, z. B. beim Elemente p, ist $= f : p$.

Auf gleiche Weise läfst sich eine auf X und X_1 folgende und der X_1 unendlich nahe dritte Linie X_2 ziehen, so dafs der von X_1 und X_2 begrenzte Streifen durch Y, Y_1, ... in einander und dem f gleiche Parallelogramme getheilt wird. Unter derselben Bedingung kann man ferner auf X_2 eine vierte Linie X_3 eine fünfte X_4, u. s. w. ins Unendliche, folgen lassen.

Hiermit ist nun, wie gefordert wurde, die Ebene M durch die zwei Systeme von Linien X, X_1, ... und Y, Y_1, ... in Elemente von einer und derselben gegebenen Gröfse zerlegt. Dabei konnte das eine dieser Systeme, Y, Y_1, ..., bis auf die unter a) und b) bemerkten Bedingungen, ganz willkürlich, und gleichergestalt eine der Curven des andern Systems, X, willkürlich genommen werden. Hiermit aber und mit dem gegebenen constanten Inhalte des Flächen-Elements waren alle übrigen Linien X_1, X_2, ... des andern Systems vollkommen bestimmt.

§. 4. Denselben Gegenstand wollen wir nun mit Hülfe der Analysis untersuchen. Seien x, y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punctes der Ebene M, und t, u die rechtwinkligen Coordinaten des ihm in der Ebene N nach irgend einem Gesetz entsprechenden Punctes, so sind t und u als gewisse Functionen von x, y zu betrachten, und es ist demnach, wenn wir hier, und ähnlicher Weise in dem Folgenden, die partiellen Differenzen $\frac{dt}{dx}$, $\frac{dt}{dy}$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ der Kürze willen mit t_x, t_y, u_x, u_y bezeichnen:

$$1. \quad dt = t_x dx + t_y dy, \qquad 2. \quad du = u_x dx + u_y dy.$$

So wie daher dem Puncte (x, y) der Punct (t, u), so entspricht dem Puncte $(x + dx, y + dy)$ der Punct

$$(t + t_x dx + t_y dy,\ u + u_x dx + u_y dy),$$

folglich dem Puncte $(x + dx, y)$ der Punct $(t + t_x dx, u + u_x dx)$
und - - - $(x, y + dy)$ - - - $(t + t_y dy, u + u_y dy)$.

Nun ist der Inhalt des Elementar-Dreiecks in der Ebene M, welches die Puncte (x, y), $(x + dx, y)$ und $(x, y + dy)$ zu Ecken hat, $= \frac{1}{2} dx\, dy$, und der Inhalt des von den entsprechenden Puncten in N gebildeten Dreiecks, $= \frac{1}{2}(t_x u_y - t_y u_x) dx\, dy$. Sollen demnach, unserer Aufgabe gemäfs, je zwei sich entsprechende Flächen-Elemente der Ebenen M und N in einem constanten Verhältnisse $= 1 : m$ zu einander stehen, so hat man

die Fundamentalgleichung zwischen partiellen Differenzen:

$$\text{I.}\quad t_x u_y - t_y u_x = m,$$

woraus sich alle im Vorigen enthaltenen Resultate werden herleiten lassen. Doch wollen wir zuvor auf eine aus dieser Gleichung sich leicht ergebende, aber vielleicht nicht ganz uninteressante, analytische Folgerung aufmerksam machen.

Da nemlich nach Festsetzung der Gleichung I. auch umgekehrt jedes Element in N sich zu dem entsprechenden Elemente in M wie $\frac{1}{m}:1$ verhält, so mufs, indem man x und y als Functionen von t, u betrachtet, und hiernach

$$3.\quad dx = x_t dt + x_u du, \qquad 4.\quad dy = y_t dt + y_u du$$

setzt, auch die Gleichung Statt finden:

$$x_t y_u - x_u y_t = \frac{1}{m};$$

und da diese Gleichung, und die vorige I., offenbar auch dann noch zusammen bestehen, wenn m von einem Paare entsprechender Puncte zum andern veränderlich ist, so schliefsen wir:

Was auch t und u für Functionen von x, y, und mithin auch x und y für Functionen von t, u sein mögen, so ist immer:

$$(t_x u_y - t_y u_x)(x_t y_u - x_u y_t) = 1.$$

Rein analytisch dürfte sich diese Formel folgendergestalt am einfachsten beweisen lassen. Aus (1.) und (2.) folgt:

$$u_y dt - t_y du = (t_x u_y - t_y u_x) dx.$$

Hierin müssen sich, weil dt und du von einander unabhängig sind, die Coefficienten von dt, du, dx eben so zu einander verhalten, wie in (3.), und es ist daher:

$$t_x u_y - t_y u_x = -\frac{t_y}{x_u}.$$

Von der andern Seite fliefst aus (3.) und (4.):

$$y_u dx - x_u dy = (x_t y_u - x_u y_t) dt,$$

und da diese Gleichung mit (1.) identisch sein mufs, so hat man

$$x_t y_u - x_u y_t = -\frac{x_u}{t_y};$$

folglich u. s. w.

Auf gleiche Art kann man weiter schliefsen, dafs, wenn v und w irgend welche Functionen von t, u, also auch von x, y sind, und man, wie vorhin,

$$5. \begin{cases} dt = t_x dx + t_y dy, & du = u_x dx + u_x dy, \\ dv = v_t dt + v_u du, & dw = w_t dt + w_u du, \\ dx = x_v dv + x_w dw, & dy = y_v dv + u_w dw, \end{cases}$$ und überdies

$$6. \quad t_x u_y - t_y u_x = m, \quad v_t w_u - v_u w_t = m_1, \quad x_v y_w - x_w y_v = m_2$$

setzt, daſs alsdann

$$m.m_1.m_2 = 1$$

ist. Denn betrachtet man x und y, t und u, v und w als rechtwinklige Coordinaten dreier in drei Ebenen sich entsprechender Puncte, und sind e, e_1, e_2 drei sich entsprechende Flächen-Elemente der Ebenen, so verhält sich:

$$e:e_1 = 1:m, \quad e_1:e_2 = 1:m_1, \quad e_2:e = 1:m_2,$$

folglich u. s. w. *).

Daſs analoge Relationen auch bei vier und mehreren Paaren veränderlicher Gröſsen, deren jedes von jedem der übrigen auf beliebige Weise abhängig ist, Statt finden müssen, erhellet auf diesem geometrischen Wege von selbst.

§. 5. Unsere Aufgabe besteht nunmehr darin, für t und u solche Functionen $F(x,y)$ und $f(x,y)$ von x, y zu finden, welche der Gleichung

$$\text{I.} \quad t_x u_y - t_y u_x = m,$$

---

*) Will man sich hiervon analytisch überzeugen, so combinire man die 6 Gleichungen (5.) dergestalt, daſs man in den zwei letzten derselben, welche dx und dy durch dv und dw ausdrücken, dv und dw mittelst der zwei vorhergehenden Gleichungen durch dt und du ausdrückt, und sodann für dt und du ihre Werthe aus den zwei ersten Gleichungen substituirt. Auf diese Weise erhält man zwei Gleichungen, jede zwischen dx und dy, deren vier Coefficienten insgesammt Null sein müssen, weil dx und dy von einander unabhängig sind. Die Nullsetzung dieser Coefficienten giebt, wenn man noch, der Kürze willen,

$$7. \begin{cases} x_v v_t + x_w w_t = X, & y_v v_t + y_w w_t = Y, \\ x_v v_u + x_w w_u = X', & y_v v_u + y_w w_u = Y' \end{cases}$$

setzt, folgende vier zwischen den partiellen Differenzen in (5.) bestehende Relationen:

$$t_x X + u_x X' = 1, \quad t_y Y + u_y Y' = 1,$$
$$t_y X + u_y X' = 0, \quad t_x Y + u_x Y' = 0.$$

Hieraus flieſsen, mit Rücksicht auf (6.), die 4 Gleichungen:

$$mX = u_y, \quad mY = -u_x,$$
$$mX' = -t_y, \quad mY' = t_x,$$

und hieraus folgt:

$$8. \quad m(XY' - X'Y) = 1.$$

Durch Verbindung der Gleichungen (7.) ergiebt sich aber:

$$x_v m_1 = w_u X - w_t X', \quad y_v m_1 = w_u Y - w_t Y', \quad -w_u m_2 = y_v X' - x_v Y';$$

und wenn man aus diesen 3 Gleichungen x_v und y_v eliminirt:

$$m_1 m_2 = XY' - X'Y,$$

folglich wegen (8.):

$$m m_1.m_2 = 1.$$

wo m eine gegebene Constante ist, Genüge leisten. Weil aus einer Differentialgleichung sich nur eine Funtion bestimmen läfst, so kann die eine der Functionen t und u, es sei t, nach Willkür angenommen werden (d. h. die Linien Y, Y_1, ... in der Ebene M können beliebige sein, §. 3.), und die andere u ist dann durch Integration von I. herzuleiten. Zu diesem Ende wollen wir die Gleichung I. zunächst auf eine hierzu noch passendere Form zu bringen suchen.

Aus der Gleichung $u = f(x, y)$ kann man sich y mittelst der Gleichung $t = F(x, y)$ eliminirt denken. Hierdurch wird u eine Function von t, x, und es ist alsdann:

$$du = u_t dt + u_x dx = u_t(t_x dx + t_y dy) + u_x dx.$$

Bei dieser Ansicht hat man daher statt der vorigen u_x und u_y, wo u geradezu als Function von x, y betrachtet wurde, resp. $u_t t_x + u_x$ und $u_t t_y$ zu setzen, und die Gleichung I. zieht sich nach Substitution dieser Ausdrücke zusammen in

$$-t_y u_x = m.$$

Hieraus folgt aber:

$$u_x dx = -\frac{m dx}{t_y},$$

und es kommt, wenn man, mittelst der Gleichung $t = F(x, y)$, t_y als Function von x, t ausdrückt, und sodann integrirt, indem man t constant nimmt:

$$u = Q + \varphi t, \quad \text{wo} \quad Q = -m\int \frac{dx}{t_y},$$

und φt eine willkürliche Function von t ist. Substituirt man dann in Q und φt für t seinen Werth $F(x, y)$, so hat man, wie verlangt wurde, u als Function von x und y gefunden.

Die willkürliche Function φt kann, in Übereinstimmung mit §. 3., stets so bestimmt werden, dafs der Axe der t, oder irgend einer mit ihr gezogenen Parallele, deren Gleichung $u = e$ ist, irgend eine gegebene Curve in der Ebene M entspricht, d. h. dafs die Gleichung $e = Q + \varphi t$ irgend eine gegebene Gleichung $f_1(x, y) = 0$ zwischen x und y ist. Man hat deshalb nur x und y aus Q mittelst der Gleichungen $f_1(x, y) = 0$ und $t = F(x, y)$ zu eliminiren, und auf diese Weise Q als eine Function von t auszudrücken. Denn man erhält somit $\varphi t = e - Q$ als eine bekannte Function von t.

§. 6. Dafs die willkürliche Function, welche zu dem particulären Werthe Q von u hinzutritt, eine Function von $F(x, y)$ oder t sein mufs, läfst sich folgendergestalt auch geometrisch einsehen. Man denke sich wiederum das in §. 1. beschriebene, von den zwei Systemen T, T', ... und U, U', ... gebildete Netz, wodurch die Ebene N in einander gleiche rechteckige Elemente zerlegt wird; die Linien T, ... seien mit der Axe der t, und U, ... mit der Axe der u parallel. Seien ferner P und Q zwei solche Functionen von x, y, dafs sie, resp. $= t$ und u gesetzt, eine offene Beziehung zwischen den Ebenen M und N hervorbringen, dafs also, wenn $u = b$ und $t = a$ die Gleichungen sind, welche irgend einer der Geraden T, ... und irgend einer der Geraden U zukommen, in der Ebene M die entsprechenden Linien der Systeme X, ... und Y, ... die Gleichungen $Q = b$ und $P = a$ haben.

Die Gleichheit der Elemente in N wird nun nicht aufgehoben, und ihre Gröfse bleibt dieselbe, wenn wir die Geraden U, ... unverändert lassen, dagegen die Geraden T, ... in beliebige einander gleiche und parallel liegende Curven verwandeln, so dafs die zwischen je zwei dieser Curven fallenden Theile von U, U_1, ... noch von derselben Gröfse sind, als vorher, wo T, ... Gerade waren (Vergl. §. 2. 2.). Es werden folglich M und N in affiner Beziehung und nach demselben Verhältnisse $1:m$ auch dann noch zu einander stehen, wenn wir die Linien Y, Y_1, ... den Geraden U, ... und die Linien X, ... den nunmehrigen Curven T, ... entsprechend setzen.

Sei nun $u - \varphi t = 0$ die Gleichung der Curve, in welche die Axe der t übergegangen ist, also $u - \varphi t = b$ die Gleichung der Curve, in welche sich irgend eine andere Gerade des Systems T, ... deren Gleichung $u = b$ war, verwandelt hat. Dieser Geraden, und also auch der nunmehrigen Curve, entspricht aber in M die Curve, deren Gleichung $Q = b$; und da dieses für jeden beliebigen Werth der Constante b gilt, so hat man jetzt $u - \varphi t = Q$, statt der vorigen Gleichung $u = Q$. Die Gleichung $t = P$ dagegen bleibt ungeändert, da die Geraden U, ..., nach wie vor, den Curven Y, ... entsprechen sollen.

Ist daher durch die Gleichungen $t = P$ und $u = Q$ eine affine Beziehung zwischen M und N festgestellt, so bleibt eine solche Beziehung, und das constante Verhältnifs zwischen entsprechenden Flächentheilen ist noch dasselbe, wenn man $t = P$ und $u = Q + \varphi t = Q + \varphi Q$ setzt.

§. 7. Wir wollen jetzt die in §. 5. entwickelte analytische Methode an den in §. 2. aufgestellten Beispielen erläutern und daher erstens

$$t = ax + by + c$$

setzen, so dafs der Axe der u und den ihr parallelen Geraden ein System von Parallelen in M entspricht, und dafs der Abstand je zweier der erstern Parallelen von einander dem gegenseitigen Abstande der entsprechenden letztern Parallelen proportional ist. Denn für $t = t'$ und $t = t''$ schneiden die entsprechenden Parallelen in M die Axe der x in Puncten, welche vom Anfangspuncte der x um $\frac{t'-c}{a}$ und $\frac{t''-c}{a}$, also von einander um die mit $t''-t'$ proportionale Linie $\frac{t''-t'}{a}$ entfernt sind.

Aus der Gleichung für t folgt aber $t_y = b$, und damit

$$Q = -m\int\frac{dx}{b} = -\frac{mx}{b},$$

und

$$u = -\frac{mx}{b} + \varphi t.$$

Werde nun verlangt, die Function φ so zu bestimmen, dafs für $u = e$ die erhaltene Gleichung in $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ übergehe, dafs also einer gewissen Parallele mit der Axe der t eine gegebene Gerade in M entspreche. Die Elimination von y aus der Gleichung für diese Gerade und aus der Gleichung für t giebt

$$x = \frac{b_1 t - cb_1 + c_1 b}{ab_1 - a_1 b},$$

und damit

$$\varphi t = e + \frac{m(b_1 t - cb_1 + c_1 b)}{b(ab_1 - a_1 b)};$$

und es wird die Gleichung für u, wenn man in der nun gefundenen Function φ, für t seinen gegebenen Werth setzt, nach gehöriger Reduction:

$$(ab_1 - a_1 b)(u - e) = m(a_1 x + b_1 y + c_1).$$

Bestimmt man daher a_1 und b_1 so, dafs $ab_1 - a_1 b = m$, so wird:

$$u = a_1 x + b_1 y + c_1,$$

wo $c_1 =$ dem vorigen $c_1 + e$, oder, was dasselbe sagt:

Bei den Gleichungen

$$t = ax + by + c, \quad u = a_1 x + b_1 y + c_1$$

verhält sich jedes Element der Ebene M zu dem entsprechenden Elemente der Ebene N wie 1 zu $ab_1 - a_1 b$, was auch auf elementarem Wege leicht erkannt wird. Es sind dies die beiden Grundformeln für die Affinität in engerem Sinne zwischen ebenen Figuren.

Sei **zweitens**

$$\alpha.\quad t = \frac{ax}{y}$$

die für t gegebene Function von x, y, so daſs jeder mit der Axe der x parallelen Geraden, $t = t'$, eine durch den Anfangspunct der x, y gehende Gerade, $t' = \frac{ax}{y}$, entspricht, und zwar dergestalt, daſs, wenn erstere Gerade parallel mit sich und mit constanter Geschwindigkeit fortbewegt wird, letztere sich um den Anfangspunct dreht, und ihr Durchschnitt mit einer der Axe der x parallelen Linie gleichförmig in dieser Linie fortrückt (denn wird y constant genommen, so wächst x proportional mit t').

Aus (α.) folgt nun $t_y = -\frac{ax}{y^2}, = -\frac{t^2}{ax}$ nach Elimination von t, mithin

$$Q = m\int \frac{ax}{t^2}dx = \frac{max^2}{2t^2} = \frac{my^2}{2a},$$

und

$$u = \frac{my^2}{2a} + \varphi t.$$

In Übereinstimmung mit §. 2. 3. werde nun die Function φ so bestimmt, daſs der Parallele mit der Axe der t, $u = e$, die Parallele mit der Axe x, $y = b$, entspreche. Mit diesen Werthen von u und y wird $e = \frac{mb^2}{2a} + \varphi t$, und daher $u - e = \frac{m}{2a}(y^2 - b^2)$, oder geradezu

$$\beta.\quad u = \frac{m}{2a}y^2,$$

wenn man der Axe der t die Axe der x entsprechend setzt. Ist alsdann a positiv, so gehören zu jedem positiven u zwei gleiche und entgegengesetzte y, für ein negatives u wird y imaginär; d. h. bloſs die auf der positiven Seite der Axe der t liegenden Puncte haben entsprechende in M, und zwar entsprechen jedem der erstern zwei der letztern, die wegen (α.) den Anfangspunct der x, y in der Mitte haben, Alles eben so, wie wir es in §. 2. bereits bemerkt haben.

Aus (α.) und (β.) in Verbindung folgt noch $tu = \frac{1}{2}mxy$. Einer Hyperbel in N, welche die Axen der t und u zu Aymptoten hat, oder vielmehr der Hälfte dieser Hyperbel, welche auf der positiven Seite der Axe der t liegt, entspricht demnach eine vollständige Hyperbel in M zwischen den Axen der x und y, als Asymptoten. Dabei verhält sich die Potenz der letztern Hyperbel zur Potenz der erstern, wie $1 : \frac{1}{2}m$.

Entspreche drittens, wie im vorigen Beispiele, jeder Parallele mit der Axe der u eine durch den Anfangspunct der x, y gehende Gerade, sei aber der Winkel der letztern mit der Axe der y proportional dem Abstande jener Parallele von der Axe der u, also

$$t = a.\text{arc tang}\,\frac{x}{y}.$$

Hieraus folgt:

$$t_y = -\frac{ax}{x^2+y^2} = -\frac{a}{x}\left(\sin\frac{t}{a}\right)^2,$$

und

$$Q = m\int\frac{1}{a}\left(\text{cosec}\,\frac{t}{a}\right)^2 x\,dx = \frac{m}{2a}\left(\text{cosec}\,\frac{t}{a}\right)^2 x^2 = \frac{m}{2a}(x^2+y^2),$$

$$u = \frac{m}{2a}(x^2+y^2)+\varphi t.$$

Möge nun der Axe der t ein aus dem Anfangspuncte der x, y mit b als Halbmesser beschriebener Kreis entsprechen, so dafs $u = 0$ und $x^2+y^2 = b^2$ Gleichungen entsprechender Linien sind. Dies giebt $0 = \frac{m}{2a}b^2+\varphi t$, und somit

$$u = \frac{m}{2a}(x^2+y^2-b^2).$$

Es entspricht daher bei dieser Annahme, und wie wir in §. 2. 4. schon voraus sahen, auch jeder Parallele mit der Axe der t ein Kreis, dessen Mittelpunct der Anfangspunct der x, y ist, auch wird man die übrigen dort bemerkten Eigenschaften durch die hiesigen Formeln bestätigt finden.

Soll der Axe der t eine Parallele mit der Axe der x, also der Geraden $u = 0$ ebenfalls eine Gerade $y = b$ entsprechen, so hat man erstlich zufolge der Gleichungen für t und u, wenn man darin für u und y resp. 0 und b setzt, und hierauf x aus ihnen eliminirt:

$$\varphi t = -\frac{m}{2a}b^2\left(\sec\frac{t}{a}\right)^2 = -\frac{m}{2a}b^2\frac{x^2+y^2}{y^2},$$

mithin

$$u = \frac{m}{2a}\frac{y^2-b^2}{y^2}(x^2+y^2),$$

wonach also jede Parallele mit der Axe der t eine Linie der vierten Ordnung in M zur entsprechenden hat.

§. 8. Noch allgemeiner, als im Bisherigen, können Aufgaben dieser Art gestellt werden, wenn man nicht geradezu den mit der Axe der u parallelen Geraden, sondern einem gegebenen Systeme von Linien in N überhaupt, wie es in §. 3. beschrieben worden, ein dergleichen System

in M entsprechend setzt. Sei das System in N durch die Gleichung $F(t, u) = c$ ausgedrückt, wo c für eine und dieselbe Linie des Systems constant und von einer Linie zur andern veränderlich ist. Die jedem bestimmten Werthe von c, also jeder bestimmten Linie des Systems in N, entsprechende Linie in M wird eine Gleichung haben, die zwischen x, y und c besteht, und welcher man daher die Form $f(x, y) = c$ geben kann. Man wird folglich die gegebene Relation zwischen M und N durch eine Gleichung, wie

$$1. \quad p = q,$$

ausdrücken können, wo p und q gegebene Functionen, erstere von x, y, letztere von t, u sind; und es kommt nun darauf an, eine zweite Gleichung zwischen x, y, t, u zu finden, welche, in Verbindung mit der erstern, t und u als solche Functionen von x, y giebt, die der Fundamentalgleichung I. Genüge leisten.

In dieser Absicht differentiire man (1.) nach den von einander unabhängigen Variabeln x und y, und man erhält die zwei Gleichungen:

$$p_x = q_t t_x + q_u u_x$$
$$p_y = q_t t_y + q_u u_y,$$

und hieraus, in Verbindung mit I.:

$$2. \quad p_x u_y - p_y u_x = m q_t.$$

Da nun p sowohl als u eine Function von x, y ist, so kann u auch als eine Function von x und p angesehen werden, und man hat alsdann, ähnlicher Weise wie in §. 5., für u_x und u_y resp. $u_x + u_p p_x$ und $u_p p_y$ zu setzen. Hiermit aber verwandelt sich die Gleichung (2.) in die einfachere:

$$-p_y u_x = m q_t,$$

mithin

$$3. \quad -\frac{u_x dx}{q_t} = \frac{m dx}{p_y}.$$

Die partiellen Differenzen p_y und q_t, welche, eben so wie p und q, ursprünglich Functionen, erstere von x, y, letztere von t, u, sind, drücke man nun mittelst der gegebenen Gleichungen für p und q als Functionen resp. von x, p und u, q oder u, p, wegen $p = q$, aus. Hierdurch, und weil jetzt u_x als Function von x, p anzusehen ist, wird die Differentialgleichung (3.), indem man p als constant betrachtet, integrirbar, und es kommt:

$$4. \quad -\int \frac{du}{q_t} = m \int \frac{dx}{p_y} + \Phi p,$$

also eine Gleichung von der Form: $F(u, x, p) = \Phi p$, wo F eine bekannte

und φ eine willkürliche Function ist, und worin man nur noch für p seinen Ausdruck durch x und y zu setzen hat, um u, wie verlangt wird, durch x und y ausgedrückt darzustellen.

Die willkürliche Function φ kann hier, und so auch schon im Obigen (§. 5.), überhaupt dadurch bestimmt werden, daſs irgend einer gegebenen Linie $y = fx$ in M eine gegebene Linie $u = f_1 t$ in M entsprechen soll, vorausgesetzt, daſs diese Linien nicht mit in den anfänglich gegebenen zwei Systemen sich entsprechender Linien begriffen sind. Denn eliminirt man mit diesen Gleichungen y und u aus p, q und aus der durch Integration gefundenen Gleichung (4.), so kommt:

$$p = F_1 x, \quad q = p = F_2 t, \quad \varphi p = F_3(t, x, p),$$

und wenn man mittelst der zwei ersten dieser Gleichungen x und t aus der dritten wegschafft, so ergiebt sich $\varphi p =$ einer bekannten Function von p.

§. 9. Zu der im vor. §. erhaltenen Integralformel (4.) kann man auch, ohne zu der Fundamentalgleichung I. zurückzukehren, unmittelbar durch die einfachere Formel in §. 5. gelangen. Sei wiederum $p = q$ die gegebene Gleichung zwischen zwei Systemen entsprechender Linien in M und N. Man denke sich eine dritte Ebene O mit den rechtwinkligen Coordinaten v, w hinzu, welche zu den Ebenen M und N in affiner Beziehung stehe, und zwar dergestalt, daſs je zwei sich entsprechenden Puncten (x, y) und (t, u) in M und N ein und derselbe Punct (v, w) in O, also auch je zwei sich entsprechenden Linien in M und N, wie $p = a$ und $q = a$, eine und dieselbe Linie in O entspricht. Sei $v = a$, also eine Parallele mit der Axe der w, diese Linie in O, welche den Linien $p = a$ und $q = a$, und zwar für jeden beliebigen Werth von a, entspreche. Hiernach ist $v = p$ und $v = q$, und die eine Coordinate v in O ist somit rücksichtlich der Ebene M als Function von x, y, und rücksichtlich der N als Function von t, u gegeben. Setzen wir nun noch fest, daſs jedes Element in O zu dem entsprechenden Elemente in M wie $n:1$, und folglich zu dem entsprechenden in N wie $n:m$ sich verhalten soll, so können wir, nach §. 5., auch die andere Coordinate w als Function, das einemal von x, y, das anderemal von t, u, finden, nämlich:

$$w = -n\int\frac{dx}{p_y} + \varphi_1 p, \quad w = -\frac{n}{m}\int\frac{dt}{q_u} + \varphi_2 q.$$

Hierzu folgt aber:

$$\int\frac{dt}{q_u} - m\int\frac{dx}{p_y} = \frac{m}{n}(\varphi_2 q - \varphi_1 p) = \varphi p,$$

weil $p=q$. In dieser Formel ist vor der Integration p_y durch p und x, q_u durch q und t auszudrücken, beim Integriren selbst $p=q$ constant zu nehmen, und nachher statt p und q die für p gegebene Function von x und y zu setzen, und man bekommt somit zunächst t als Function von x, y.

Die Formel (4.) des vorigen §. lehrte uns die Function kennen, welche u von x, y ist. Indessen läfst sich die eine Formel leicht auf die andere reduciren; denn weil man q beim Integriren als eine Constante anzusehen hat, so ist $q_t dt + q_u du = 0$, und daher $\int\frac{dt}{q_u} = -\int\frac{du}{q_t}$, woraus die Identität beider Formeln hervorgeht. Aus gleichem Grunde kann man auch in jeder der beiden Formeln $\int\frac{dx}{p_y}$ mit $-\int\frac{dy}{p_x}$ vertauschen.

§. 10. Um auch zu der jetzt behandelten allgemeineren Aufgabe ein Beispiel hinzuzufügen, möge

$$\alpha.\quad 2mxy = t^2 - u^2$$

die gegebene Gleichung sein, wonach also Hyperbeln in M, welche die Coordinaten-Axen zu Asymptoten haben, gleichseitige Hyperbeln, deren Haupt-Axen in die Coordinaten-Axen fallen, in N entsprechen. Es ist demnach

$$p = 2mxy,\quad q = t^2 - u^2,$$

mithin

$$p_y = 2mx,\quad q_t = 2t = 2\sqrt{(q+u^2)},\quad q_u = -2u = -2\sqrt{(t^2-q)},$$

$$m\int\frac{dx}{p_y} = \tfrac{1}{2}\log x,\quad \int\frac{du}{q_t} = \tfrac{1}{2}\log(u+\sqrt{(q+u^2)}) = \tfrac{1}{2}\log(t+u),$$

$$\int\frac{dt}{q_u} = -\tfrac{1}{2}\log(t+\sqrt{(t^2-q)}) = -\tfrac{1}{2}\log(t+u),$$

und daher, mag man die Formel des §. 8. oder des §. 9. anwenden:

$$\beta.\quad x(t+u) = \varphi p.$$

Zur Bestimmung der Function φ setze man, dafs der Geraden $y=ax$ in M die Gerade $u=bt$ in N entspreche. Hiermit wird

$$p = 2max^2,\quad q = (1-b^2)t^2,\quad \varphi p = (1+b)xt,$$

also, weil $q=p$,

$$\varphi p = \frac{p}{\sqrt{(2ma)}}\sqrt{\left(\frac{1+b}{1-b}\right)}.$$

Diesen Werth von φp in (β.) substituirt und für p, $2mxy$ gesetzt, erhält man:

$$y = (t+u)\sqrt{\left(\frac{a(1-b)}{2m(1+b)}\right)},$$

und hieraus, in Verbindung mit (α.),

$$x = (t-u)\sqrt{\left(\frac{1+b}{2ma(1-b)}\right)},$$

zwei Gleichungen des ersten Grades zwischen x, y, t, u, so dafs bei der gemachten Bestimmung von φ zwischen beiden Ebenen Affinität im engern Sinne Statt findet.

§. 11. Wir wollen nunmehr die Affinität räumlicher Figuren, und zwar sogleich auf analytische Weise, in Untersuchung ziehen. Seien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punctes im Raume M, und t, u, v die rechtwinkligen Coordinaten des entsprechenden Punctes im Raume N, also jede der drei letztern eine gewisse Function der drei erstern, und umgekehrt. Es entspricht demnach

dem Puncte (x, y, z) der Punct (t, u, v), und eben so
- - - $(x + dx, y, z)$ - - - $(t + t_x dx, u + u_x dx, v + v_x dx)$,
- - - $(x, y + dy, z)$ - - - $(t + t_y dy, u + u_y dy, v + v_y dy)$,
- - - $(x, y, z + dz)$ - - - $(t + t_z dz, u + u_z dz, v + v_z dz)$.

Nun ist der Inhalt des von den vier Puncten in M gebildeten Tetraëders $= \frac{1}{6} dx\, dy\, dz$, und der Inhalt des Tetraëders, dessen Ecken die vier entsprechenden Puncte in N sind,

$$= \tfrac{1}{6} dx\, dy\, dz [v_x(t_y u_z - t_z u_y) + v_y(t_z u_x - t_x u_z) + v_z(t_x u_y - t_y u_x)].$$

Sollen daher die Puncte beider Räume sich dergestalt entsprechen, dafs je zwei sich entsprechende räumliche Elemente in M und N in dem constanten Verhältnisse $1 : m$ stehen, so ist die Bedingungsgleichung, also die Fundamentalgleichung für die Affinität räumlicher Figuren:

$$\text{II.} \quad v_x(t_y u_z - t_z u_y) + v_y(t_z u_x - t_x u_z) + v_z(t_x u_y - t_y u_x) = m.$$

Man kann hier ähnlicher Weise, wie oben (§. 4.), die Bemerkung machen, dafs unter der Voraussetzung: ein Element in M verhalte sich zu dem entsprechenden in N wie $1 : m$, ein Element in N zu dem entsprechenden in M in dem Verhältnisse $1 : \frac{1}{m}$ stehen müsse, dafs daher, indem man x, y, z als Functionen von t, y, v betrachtet:

$$z_t(x_u y_v - x_v y_u) + z_u(x_v y_t - x_t y_v) + z_v(x_t y_u - x_u y_t) = \frac{1}{m},$$

und folglich immer

$$[v_x(t_y u_z - t_z u_y) + \ldots.][z_t(x_u y_v - x_v y_u) + \ldots.] = 1$$

sein müsse, wie auch t, u, v von x, y, z abhängig sein mögen.

Es dürfte nicht überflüssig sein, auch den analytischen Beweis dieser Formel herzusetzen, da sich dabei einige, vielleicht auch anderswo brauchbare, Relationen zwischen den hier in Rechnung kommenden partiellen Differenzen offenbaren.

Man setze den erstern Factor auf der linken Seite der zu beweisenden Gleichung, wie vorhin, $= m$, und den zweiten Factor $= m_1$. Nun ist:

$$dt = t_x dx + t_y dy + t_z dz, \quad dx = x_t dt + x_u du + x_v dv,$$
$$du = u_x dx + u_y dy + u_z dz, \quad dy = y_t dt + y_u du + y_v dv,$$
$$dv = v_x dx + v_y dy + v_z dz, \quad dz = z_t dt + z_u du + z_v dv.$$

Aus den drei Gleichungen linker Hand folgt aber, nach Elimination von dy und dz:

$$m\,dx = (u_y v_z - u_z v_y) dt + (v_y t_z - v_z t_y) du + (t_y u_z - t_z u_y) dv.$$

Hält man dieses Ergebniſs mit der ersten Gleichung rechter Hand zusammen, so giebt die Vergleichung der Coefficienten von dx und dv:

$$t_y u_z - t_z u_y = m x_v,$$

und ähnlicher Weise findet sich

$$t_z u_x - t_x u_z = m y_v,$$

und, wenn man den umgekehrten Weg einschlägt und von den drei Gleichungen rechts zu denen links übergeht:

$$x_u y_v - x_v y_u = m_1 t_z, \quad x_v y_t - x_t y_v = m_1 u_z;$$

auch sieht man leicht, wie sich zu diesen erhaltenen 4 Gleichungen noch 14 andere ihnen analoge (zusammen 18, den 18 partiellen Differenzen entsprechend) hinzusetzen lassen *).

Ferner kommt, wenn man aus den obigen zwei ersten Gleichungen links dz, und aus den zwei ersten rechts dv eliminirt:

$$u_z dt - t_z du = (t_x u_z - t_z u_x) dx + (t_y u_z - t_z u_y) dy$$
$$= -m y_v dx + m x_v dy,$$
$$y_v dx - x_v dy = (x_t y_v - x_v y_t) dt + (x_u y_v - x_v y_u) du$$
$$= -m_1 u_z dt + m_1 t_z du.$$

Da nun durch die von einander unabhängigen dx und dy weder dt allein, noch du allein bestimmt wird, so müssen in der einen der bei-

*) Noch andere merkwürdige Relationen ergeben sich, wenn man die Werthe von dx, dy, dz in denen von dt, du, dv, und umgekehrt, substituirt, und hierauf den Coefficienten jedes der jedesmal drei übrigen Differenziale null setzt. Diese Relationen sind:

$$t_x x_t + t_y y_t + t_z z_t = 1, \quad x_t t_x + x_u u_x + x_v v_x = 1,$$
$$t_x x_u + t_y y_u + t_z z_u = 0, \quad x_t t_y + x_u u_y + x_v v_y = 0,$$
$$t_x x_v + i_y y_v + t_z z_v = 0, \quad x_t t_z + x_u u_z + x_v v_z = 0,$$

u. s. w. u. s. w.

Relationen, die, wie der erste Anblick lehrt, ganz denen analog sind, welche bei Transformation der Coordinaten im Raume zwischen den Cosinussen der Axenwinkel Statt finden.

den jetzt erhaltenen Gleichungen die Coefficienten von dx, dy, dt, du sich eben so zu einander verhalten, wie in der andern. Hieraus folgt aber, wenn man z. B. die Coefficienten von dx und dt mit einander vergleicht: $mm_1 = 1$, wie zu erweisen war.

§. 12. Was nun die Integration der Gleichung II. betrifft, als wodurch t, u, v als Functionen von x, y, z dargestellt werden sollen, so läſst sich diese Integration nicht eher vollziehen, als bis zwei dieser Functionen, oder überhaupt zwei Gleichungen, jede zwischen einer Function von x, y, z und einer Function von t, u, v bereits gegeben sind. Wir wollen mit dem Einfacheren den Anfang machen, und t und u als bekannte Functionen von x, y, z betrachten, und hieraus mit Hülfe der Gleichung II. die noch unbekannte Function v zu bestimmen suchen.

Die Gleichung II. läſst sich aber zu diesem Zwecke, auf ähnliche Art, wie in §. 5. mit der Gleichung I. geschah, noch sehr vereinfachen. Denken wir uns nämlich y und z mittelst der gegebenen Gleichungen für t und u aus der noch unbekannten Gleichung für v eliminirt, so wird v eine Function von x, t, u, folglich

$$dv = v_x dx + v_t dt + v_u du$$
$$= v_x dx + v_t(t_x dx + t_y dy + t_z dz) + v_u(u_x dx + u_y dy + u_z dz)$$

und man hat daher bei dieser Vorstellung in II. statt v_x, v_y, v_z resp.

$$v_x + v_t t_x + v_u u_x, \quad v_t t_y + v_u u_y, \quad v_t t_z + v_u u_z$$

zu setzen. Hierdurch reducirt sich aber die Gleichung II. auf

$$v_x(t_y u_z - t_z u_y) = m,$$

worin das Eingehakte eine bekannte Function von x, y, z ist, und sich daher mittelst der Gleichungen für t und u auch als eine Function von x, t, u darstellen läſst. Thut man dieses, und betrachtet t und u als constant, so wird, weil v jetzt als Function von x, t, u anzusehen ist, $v_x dx = dv$, und es kommt, wenn man

$$m\int\frac{dx}{t_y u_z - t_z u_y} = R$$

setzt:

$$v = R + \varphi(t, u);$$

und somit ist v als Function von x, t, u, also auch von x, y, z gefunden

Die willkürliche Function φ kann hierbei immer so bestimmt werden, daſs irgend einer mit der Ebene der t, u parallelen Ebene $u = a$, oder überhaupt irgend einer gegebenen Fläche $v = f(t, u)$ in N eine beliebige Fläche $z = F(x, y)$ in M entspricht. Denn bezeichnen P und Q

die gegebenen Functionen, welche t und u von x, y, z sind, so hat man nur aus den vier Gleichungen:

$$t = P, \quad u = Q, \quad z = F(x,y), \quad f(t,u) = R + \varphi(t,u)$$

die drei Variabeln x, y, z zu eliminiren, und erhält dadurch $\varphi(t,u) =$ einer bekannten Function von t und u.

§. 13. Zu mehrerer Einsicht in die Natur der jetzt behandelten Aufgabe mögen folgende graphische Erörterungen dienen. Dadurch, dafs t und u als gegebene Functionen von x, y, z vorausgesetzt werden, nimmt man zwei Systeme von Flächen im Raume M als gegeben an, welche zwei Systemen von Ebenen im Raume N, die resp. der Ebene der u, v und der Ebene der t, v parallel sind, entsprechen sollen. Denkt man sich die Ebenen eines jeden dieser beiden letztern Systeme in einander gleichen, unendlich kleinen Entfernungen von einander, so wird durch sie, und durch ein drittes System von Ebenen, welche der Ebene der t, u parallel sind, und ebenfalls in unendlich kleinen, aber gleichen Entfernungen auf einander folgen, der Raum N in einander gleiche rechtwinklige Elemente zerlegt, und die Aufgabe besteht nun darin, für das dritte System von Ebenen ein drittes System von Flächen in M zu finden, welche die unendlich dünnen vierseitigen und im Allgemeinen krummen Prismen, in welche der Raum M durch die beiden ersten Systeme von Flächen getheilt wird, quer durchschneiden, und sie dadurch in einander gleiche und zu den Elementen in N in einem gegebenen Verhältnisse $1:m$ stehende Elemente von parallelepipedischer Form zerlegen. Eine der Flächen dieses dritten Systems bleibt offenbar der Willkür überlassen; hat man sie aber einmal bestimmt, so sind es damit auch alle übrigen Flächen dieses Systems.

Dafs die willkürliche Function, welche deshalb im Werthe von v hinzutritt, eine Function von t, u ist, läfst sich eben so, wie im Obigen (§. 6.), auch durch eine geometrische Betrachtung deutlich machen. Hat man nämlich für t, u, v bereits drei Functionen P, Q, R von x, y, z gefunden, welche der Bedingung der Affinität genugthun, so wird die affine Beziehung der beiden Räume nicht aufgehoben, und auch das Verhältnifs $1:m$ nicht geändert, wenn man in N an die Stelle der Ebene der t, u und der damit parallelen Ebenen $v = c$, welchen die Flächen $R = c$ in M entsprechen, ein System beliebig gekrümmter, mit einander paralleler Flächen setzt, so dafs, wenn $v = \varphi(t, u)$ die Gleichung der

Fläche ist, in welche die Ebene der t, u selbst übergegangen, die Gleichung $v = c + \varphi(t, u)$ der Fläche angehört, welche an die Stelle der Ebene $v = c$ getreten ist. Die der Fläche $R = c$ entsprechende Fläche in N ist daher nunmehr: $v = c + \varphi(t, u)$, und folglich, weil c jeden constanten Werth haben kann, $v = R + \varphi(t, u)$ die an die Stelle von $v = R$ tretende Gleichung.

§. 14. Statt der Gleichungen $t = P$, $u = Q$ können noch allgemeiner zwei Gleichungen

$$1.\quad p = q, \qquad 2.\quad p' = q'$$

angenommen werden, wo p und p' gegebene Functionen von x, y, z, und q und q' gegebene Functionen von t, u, v vorstellen. Alsdann nemlich kennt man überhaupt für zwei Systeme von Flächen in M die entsprechenden Flächensysteme in N, und die affine Beziehung zwischen beiden Räumen wird vollständig bestimmt sein, wenn man noch für irgend ein drittes System von Flächen in N, wofür aber, der Einfachheit willen, wiederum das System der Parallel-Ebenen mit der Ebene der t, u genommen werde, die entsprechenden Flächen in M angeben kann, also, wenn man v als Function von x, y, z kennt. Diese Function läfst sich aber aus den zwei gegebenen Gleichungen (1.) und (2.) auf folgendem Wege erhalten.

Differentiirt man (1.) und (2.) successive nach x, y, z, so kommt:

$$3.\quad p_x = q_t t_x + q_u u_x + q_v v_x, \qquad 6.\quad p'_x = q'_t t_x + q'_u u_x + q'_v v_x,$$
$$4.\quad p_y = q_t t_y + q_u u_y + q_v v_y, \qquad 7.\quad p'_y = q'_t t_y + q'_u u_y + q'_v v_y,$$
$$5.\quad p_z = q_t t_z + q_u u_z + q_v v_z, \qquad 8.\quad p'_z = q'_t t_z + q'_u u_z + q'_v v_z.$$

Mit diesen sechs Gleichungen sind aus II. die sechs jetzt nicht mehr in Rechnung kommenden Differentialquotienten t_x, t_y, t_z, u_x, u_y, u_z wegzuschaffen. Um diese Elimination zu bewerkstelligen, bilde man aus (4.), (5.), (7.), (8.) die Gleichung:

$$9.\quad (p_y - q_v v_y)(p'_z - q'_v v_z) - (p_z - q_v v_z)(p'_y - q'_v v_y)$$
$$= (q_t q'_u - q_u q'_t)(t_y u_z - t_z u_y).$$

Auf dieselbe Art entwickele man aus (5.), (3.) (8.), (6.) eine Gleichung (10.), und aus (3.), (4.), (6.), (7.) eine Gleichung (11.). Addirt man nun (9.), (10.), (11.), nachdem man sie vorher resp. mit v_x, v_y, v_z multiplicirt hat, so kommt, mit Berücksichtigung von II., und nach gehöriger Reduction:

$$12.\quad v_x(p_y p'_z - p_z p'_y) + v_y(p_z p'_x - p_x p'_z) + v_z(p_x p_y - p_y p'_x)$$
$$= m(q_t q'_u - q_u q'_t),$$

als die gesuchte Gleichung zwischen partiellen Differenzen. Auch bei ihr läfst sich ein, dem schon mehrmals gebrauchten analoges, Verfahren, sie zu vereinfachen, anwenden. Weil nemlich v, p und p' Functionen von x, y, z sind, so kann v auch als eine von x, p, p' abhängige Function angesehen werden. Alsdann aber ist statt der bisherigen

$$\begin{array}{ll} v_x \text{ zu setzen:} & v_x + v_p\,p_x + v_{p'}\,p'_x, \\ v_y \quad - \quad - \quad - : & v_p\,p_y + v_{p'}\,p'_y, \\ v_z \quad - \quad - \quad - : & v_p\,p_z + v_{p'}\,p'_z, \end{array}$$

und (12.) zieht sich bei diesen Substitutionen zusammen in

$$13. \quad v_x(p_y p'_z - p_z p'_y) = m(q_t q'_u - q_u q'_t).$$

Wenn man nun mittelst der 4 Gleichungen, welche p und p' als Functionen von x, y, z, und q und q' als Functionen von t, u, v darstellen, $p_y p'_z - p_z p'_y$ durch x, p, p', und $q_t q'_u - q_u q'_t$ durch v, q, q' ausdrückt, und beim Integriren p, p' und die ihnen gleichen q, q' als constant, also v blofs wegen x veränderlich ansieht, so ergiebt sich als endliches Resultat:

$$14. \quad \int\frac{dv}{q_t q'_u - q_u q'_t} = m\int\frac{dx}{p_y p'_z - p_z p'_y} + \Phi(p, p').$$

Statt x und v zu Veränderlichen bei der Integration zu nehmen, mufs man offenbar auch je zwei andere Coordinaten, die eine aus x, y, z, die andere aus t, u, v, zu Veränderlichen wählen können. Die deshalb nöthige Änderung der letzten Formel ergiebt sich, ohne dafs man deshalb zu ihrem Ursprunge zurückzugehen braucht, auf ähnliche Art, wie oben (§. 9. zu Ende). Denn da q und q' beim Integriren als constant betrachtet werden, so ist

$$q_t dt + q_u du + q_v dv = 0,$$
$$q'_t dt + q'_u du + q'_v dv = 0,$$

folglich

$$dt : du : dv = q_u q'_v - q_v q'_u : q_v q'_t - q_t q'_v : q_t q'_u - q_u q'_t,$$

und

$$\int\frac{dt}{q_u q'_v - q_v q'_u} = \int\frac{du}{q_v q'_t - q_t q'_v} = \int\frac{dv}{q_t q'_u - q_u q'_t},$$

worin mittelst der Gleichungen für q und q' die partiellen Differenzen als Functionen von q, q', t im ersten Integrale, von q, q', u im zweiten, und von q, q', v im dritten auszudrücken. Diese drei Integrale sind nun einander gleich, oder vielmehr nur um Constanten verschieden, welche hier, wo q und q' constant vorausgesetzt worden, auch Functionen von q und q'

sein können. Auf eben die Weise läfst sich auch das Integral nach x in ein anderes nach y oder z umbilden.

Anlangend endlich die Bestimmung der willkürlichen Function $\Phi(p, p')$, so seien, wie in §. 12., $z = F(x, y)$ und $v = f(t, u)$ gegebene Gleichungen zweier einander entsprechen sollender Flächen. Mittelst $z = F(x, y)$ und der zwei Gleichungen, welche p und p' durch x, y, z geben, drücke man x durch p und p' aus, und eben so stelle man v mittelst $v = f(t, u)$ und der zwei Gleichungen für q und q', durch q und q' dar. Hiermit aber wird die Gleichung (14.): $\Phi(p, p') =$ einer bekannten Function von p, p', q', q', also auch von p, p' allein, weil $q = p$ und $q' = p'$ ist.

§. 15. **Beispiel.** Seien die gegebenen Gleichungen der zwei sich entsprechenden Flächensysteme:

$$1. \quad p = \frac{yz}{x} = at + bu + cv = q,$$

$$2. \quad p' = \frac{zx}{y} = a't + b'u + c'v = q'.$$

Hieraus folgt:

$$p_y = \frac{z}{x}, \quad p'_z = \frac{x}{y}, \quad p_z = \frac{y}{x}, \quad p'_y = -\frac{zx}{y^2},$$

$$q_t = a, \quad q'_u = b', \quad q_u = b, \quad q'_t = a';$$

mithin

$$p_y p'_z - p_z p'_y = \frac{2z}{y} = \frac{2p'}{x}, \quad q_t q'_u - q_u q'_t = ab' - a'b$$

$$\int \frac{dx}{p_y p'_z - p_z p'_y} = \frac{1}{4}\frac{x^2}{p'} = \frac{1}{4}\frac{xy}{z},$$

$$\int \frac{dv}{q_t q_u - q'_u q'_t} = \frac{v}{ab' - a'b},$$

und die endliche Gleichung wird:

$$3. \quad \frac{mxy}{4z} = \frac{v}{ab' - a'b} + \Phi(p, p').$$

Nach dem vorhin Bemerkten kann statt des Integrales nach v auch das nach t oder das nach u genommen werden; diese Integrale sind:

$$\frac{t}{bc' - b'c} \text{ und } \frac{u}{ca' - c'a}.$$

Dafs diese drei Integrale nach v, t, u nur um Functionen von q und q' von einander differiren, lehrt eine leichte Rechnung. In der That findet sich, wenn man zur Abkürzung $bc' - b'c = \alpha$, $ca' - c'a = \beta$, $ab' - a'b = \gamma$ setzt:

$$\frac{v}{\gamma} - \frac{t}{\alpha} = \frac{bq' - bq'}{\gamma\alpha}, \quad \frac{t}{\alpha} - \frac{u}{\beta} = \frac{cq' - c'q}{\alpha\beta}.$$

Soll daher die Gleichung (3.) eine analoge Form:

$$\frac{xy}{z} = a''t + b''u + c''v$$

mit den Gleichungen (1.) und (2.) erhalten, und soll mithin, wie schon aus (1.) und (2.) hervorgeht, $\varphi(p, p')$, $= \varphi(q, q')$, eine lineäre Function von q, q' sein, so können wir die Gleichung (3.) auch schreiben:

$$\frac{xy}{z} = \frac{4v}{m\gamma} + g\left(\frac{v}{\gamma} - \frac{t}{\alpha}\right) + h\left(\frac{t}{\alpha} - \frac{u}{\beta}\right).$$

Die Vergleichung dieser letztern Form mit der vorher gesetzten giebt aber:

$$a'' = \frac{h-g}{\alpha}, \quad b'' = -\frac{h}{\beta}, \quad c'' = \frac{4+mg}{m\gamma},$$

woraus, nach Elimination der eingeführten Coefficienten g und h,

$$\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' = \frac{4}{m},$$

d. i.

$$4. \quad (bc' - b'c)a'' + (ca' - c'a)b'' + (ab' - a'b)c'' = \frac{4}{m}$$

folgt. Durch die drei Gleichungen

$$\frac{yz}{x} = at + bu + cv,$$

$$\frac{zx}{y} = a't + b'u + c'v,$$

$$\frac{xy}{z} = a''t + b''u + c''v,$$

wird demnach immer eine affine Beziehung zwischen den Räumen der x, y, z und der t, u, v festgestellt, welches auch die Werthe der Constanten a, b, ... c'' sein mögen. Dabei ist das Verhältniſs $1:m$ zwischen je zwei sich entsprechenden Theilen der beiden Räume durch die Gleichung (4.) gegeben.

Setzen wir z. B. $b = c = c' = a' = a'' = b'' = 0$, und $a = b' = c'' = 1$, so werden die Gleichungen:

$$\frac{yz}{x} = t, \quad \frac{zx}{y} = u, \quad \frac{xy}{z} = v,$$

also

$$x = \sqrt{(uv)}, \quad y = \sqrt{(vt)}, \quad z = \sqrt{(tu)},$$

und $m = 4$, d. h. jeder Theil des Raumes der t, u, v ist dann das Vierfache des entsprechenden Theiles im Raume der x, y, z.

7.

Beweis der Gleichung $0^0 = 1$, nach J. F. Pfaff.

(Von Herrn *A. F. Möbius*, Professor in Leipzig.)

Von dieser Gleichung theilte mir mein unvergeſslicher Lehrer und Freund, der verst. Hofrath Pfaff in Halle, im Jahre 1814 einen Beweis mit, der an Bündigkeit nichts zu wünschen übrig lassen möchte, und den ich hier zur Beseitigung der im XI. Bande dieses Journals, Seite 272, gegen die allgemeine Zulässigkeit der Gleichung erhobenen Zweifel bekannt zu machen mir erlaube.

Die Gleichung $0^0 = 1$ will nichts Anderes sagen, als daſs der Werth von x^x bei fortwährender Abnahme von x sich der Einheit über jede angebbare Grenze nähert. Man setze $x = \frac{1}{u}$, so wird $x^x = \frac{1}{u^{\frac{1}{u}}}$, und es kommt alsdann darauf an, zu zeigen, daſs $u^{\frac{1}{u}}$ der Einheit so nahe gebracht werden kann, als man will, wenn man u ohne Ende wachsen läſst. Hierzu sind folgende zwei Sätze vorauszuschicken.

I. Wenn z positiv und $m > 1$ ist, so ist immer

$$(1+z)^m > 1 + (m-1)z.$$

Beweis. Sei zuerst m ein unächter Bruch $= R + r$, wo R die vor m nächst kleinere positive ganze Zahl und r ein unächter Bruch ist. Alsdann folgt aus dem binomischen Lehrsatze $(1+z)^R > 1 + Rz$, weil alle folgenden Glieder der Entwickelung positiv sind. Um so viel mehr ist daher $(1+z)^{R+r} > 1 + Rz > 1 + (R+r-1)z$, oder, wenn wir für $R+r$ wieder m setzen: $(1+z)^m > 1 + (m-1)z$.

Hieraus folgt von selbst, daſs der Satz auch dann gilt, wenn m eine ganze Zahl ist.

II. Ist m eine ganze Zahl > 4, so ist

$$2^m > m^2.$$

Beweis. Weil $m > 4$, so hat man $m(m-2) > 1$, d. i. $m^2 > 2m + 1$, folglich auch $2m^2 > (m+1)^2$. Angenommen ferner, daſs $2^m > m^2$, so ist auch $2^{m+1} > 2m^2$, also wegen des vorigen um so mehr $2^{m+1} > (m+1)^2$. Gilt daher der zu erweisende Satz für m, so gilt er auch für $m+1$. Er ist aber für $m = 5$ richtig, folglich u. s. w.

Dieses vorausgeschickt, wollen wir zunächst zwei Grenzen bestimmen, zwischen denen $u^{\frac{1}{u}}$ für $u>1$ gewiſs eingeschlossen ist. Es bedarf keines besondern Beweises, daſs für $u>1$, $u^{\frac{1}{u}}>1$. Man setze daher $u^{\frac{1}{u}}=1+z$, so ist $u=(1+z)^u>1+(u-1)z$ nach I., folglich

$$u-1>(u-1)z,\quad 1>z,\quad u^{\frac{1}{u}}<2.$$

Mithin ist $u^{\frac{1}{u}}$ zwischen den Grenzen 1 und 2 begriffen.

Um nunmehr den Grenzwerth von $u^{\frac{1}{u}}$, wenn u über alle Grenzen wächst, zu erforschen, oder, was dasselbe ist, um den Grenzwerth von $U=(2^m u)^{\frac{1}{2^m u}}$ zu bestimmen, wenn u einen endlichen constanten positiven Werth hat, m aber ohne Ende zunimmt, machen wir folgende Schlüsse. Es ist

$$U=\sqrt[\frac{2^m u}{m}]{2}\cdot\sqrt[2^m]{u^{\frac{1}{u}}}.$$

Da nun nach II., wenn m bereits 4 überschritten hat, $\frac{2^m u}{m}>mu$ ist, so folgt:

$$\sqrt[\frac{2^m u}{m}]{2}<\sqrt[mu]{2}.$$

Da ferner, wie vorhin bewiesen worden, $u^{\frac{1}{u}}<2$, so ist auch

$$\sqrt[2^m]{u^{\frac{1}{u}}}<\sqrt[2^m]{2}<\sqrt[m]{2};$$

folglich

$$U<\sqrt[mu]{2}\cdot\sqrt[m]{2}=2^{\left(\frac{1}{u}+1\right)\frac{1}{m}}=y^{\frac{1}{m}},$$

wenn wir $2^{\frac{1}{u}+1}=y$ setzen. Ist aber, wie angenommen wurde, u endlich und positiv, so ist auch y endlich und >1, folglich $y^{\frac{1}{m}}$ eine Gröſse, die gröſser als 1, und die, je mehr m zunimmt, sich desto mehr der Einheit, und zwar über alle Grenzen, nähert. Da nun $U<y^{\frac{1}{m}}$ und zugleich >1, so muſs um so mehr U bei wachsendem m der Einheit über jede angebbare Grenze nahe kommen.

So weit nach Pfaff. Ich bemerke nun noch, daſs es mit dem jetzt Erwiesenen ganz leicht ist, auch der Forderung Genüge zu thun, welche in dem oben gedachten Aufsatze dieses Journals gemacht worden, und welche darin bestand: zu zeigen, daſs, wenn X eine Function von x ist,

welche für $x = a$ null wird, und Y eine Function von y, welche für $y = b$ verschwindet, der Werth von X^Y für $x = a$ und $y = b$ der Einheit gleich wird.

Da es hier offenbar gestattet ist, x und y als Functionen einer und derselben dritten Variabeln z zu betrachten, so läſst sich die Forderung etwas einfacher also ausdrücken:

Es soll bewiesen werden, daſs, wenn X und Y irgend zwei Functionen von z sind, deren jede für $z = c$, oder, noch einfacher, für $z = 0$ ebenfalls in Null übergeht, der Werth von X^Y der Einheit gleich wird.

Beweis. Weil für $z = 0$ auch X und Y verschwinden sollen, so kann man

$$X = Pz^m, \quad Y = Qz^n$$

setzen, wo m und n von z unabhängige positive Zahlen, P und Q dagegen zwei Functionen von z sind, die für $z = 0$ nicht null werden, sondern gewisse constante Werthe, sie mögen p und q heiſsen, erlangen. Hiermit wird nun

$$X^Y = (P^Q)^{z^n}.(z^m)^{Qz^n}.$$

Der erste Factor auf der rechten Seite des Zeichens geht aber für $z = 0$ über in

$$(p^q)^{0^b} = (p^q)^0 = 1.$$

Was den zweiten Factor anlangt, so setze man $z^n = v$, wo daher v eine mit z zugleich verschwindende Variable ist, und der Factor wird

$$v^{\frac{m}{n}Qv} = (v^v)^{\frac{m}{n}Q}.$$

Da nun für $z = 0$ auch $v = 0$ und damit nach Pfaff $v^v = 1$ wird, so verwandelt sich dieser zweite Factor für $z = 0$ in $1^{\frac{m}{n}Q} = 1$, folglich u. s. w.

8.

Auszug aus einem Schreiben des Herrn Prof. Dr. C. G. J. Jacobi zu Königsberg in Pr., an den Herrn Prf. Dr. J. Steiner zu Berlin.

(Mitgetheilt von dem Letztern.)

— Ein Satz, den ich Dir früher mittheilte, heifst in seiner Vollständigkeit:

1. „Sind zwei Flächen zweiten Grades. ein Ellipsoïd und ein einfaches Hyperboloïd, confocal, d. h., haben ihre Hauptschnitte gemeinschaftliche Brennpuncte, und legt man aus irgend einem Puncte K des Hyperboloïds einen Berührungskegel K an das Ellipsoïd, so sind die durch denselben Punct gehenden zwei Strahlen des Hyperboloïds die Brennlinien dieses Kegels K."

Dieser Satz scheint mir nicht ganz unwichtig zu sein. Er läfst sich noch allgemeiner auffassen, und dann mit einem reciproken Satze zusammenstellen. Auch gestattet er viele Folgerungen, für interessante specielle Fälle. Z. B. ein Corollar ist:

2. „Dafs die aus irgend einem Puncte K an eine Schaar confocaler Flächen zweiten Grades gelegten Berührungskegel dieselben Brennlinien und dieselben Axen haben."

Ein besonderer Fall, den ich erwähnen will, heisst:

3. „Wenn man aus einem Puncte K der Ebene derjenigen Hyperbel h (welche nach Deinem Satze der Ort der Scheitel aller geraden Kegel ist, die sich einem Ellipsoid umschreiben lassen*)) an das Ellipsoïd E einen Berührungskegel legt, so sind die aus dem Puncte K an die Hyperbel h gelegten Tangenten die Brennlinien des Kegels." „Liegt der Punct K auf der Hyperbel h, so vereinigen sich die Tangenten in *Eine*, oder die Brennlinien fallen zusammen, und der Kegel wird *gerade*, welches

*) Siehe Bd. I. S. 47 dieses Journals.

Dein Satz ist." Der entgegenstehende, oder reciproke Satz heisst: „Wenn irgend eine Fläche zweiten Grades, F, und irgend ein Punct M gegeben sind, so giebt es, im Allgemeinen, eine Schaar gerader Kegelflächen (zweiten Gerades), deren Scheitel im Puncte M liegen, und welche die Fläche F in ebenen Curven (Kegelschnitten) schneiden; die Ebenen aller dieser Curven schneiden einander in irgend einem Puncte N, und umhüllen irgend eine Kegelfläche zweiten Grades, (N)." „Legt man durch den Punct N eine beliebige Ebene, welche die Fläche F in einem Kegelschnitte k und die Kegelfläche (N) in zwei Strahlen a, b schneidet, so hat die Kegelfläche (Mk), die durch k geht und deren Scheitel in M liegt, die Ebenen (Ma), (Mb), welche der Punct M mit den Strahlen a, b bestimmt, zu Kreis-Ebenen, d. h., jede andere Ebene, welche mit einer derselben parallel ist, schneidet die Kegelfläche (Mk) in einem Kreise."

Der Satz, den Du ehemals bei Deinen Untersuchungen über einander berührende Kugeln gefunden hast, und der später von französichen Mathematikern bekannt gemacht worden ist, nämlich der Satz:

4. „Dafs, wenn von zwei Kegelschnitten (einer Ellipse und einer Hyperbel) jeder die Brennpuncte des andern zu Scheiteln hat und ihre Ebenen zu einander senkrecht stehen, dafs dann jeder der Ort der Scheitel aller geraden Kegel ist, welche den andern zur Basis haben, und dafs *jede* zwei Puncte des einen räumliche Brennpuncte des andern sind; d. h.: nimmt man in der Hyperbel irgend zwei Puncte an, so ist die Summe oder die Differenz ihrer Entfernungen von jedem Puncte der Ellipse constant, je nachdem sie in verschiedenen oder in demselben Zweige der Hyperbel liegen; und umgekehrt: sind je zwei Puncte der Ellipse so beschaffen, dafs die Differenz ihrer Abstände von jedem Puncte der Hyperbel constant ist, u. s. w." folgt leicht aus dem Yvory'schen Satze über Flächen zweiten Grades, deren Hauptschnitte confocal sind. Auch folgen aus dem Yvory'schen Satze noch andere Sätze über Erzeugung der Flächen und Linien zweiten Grades, welche einander analog sind, und welche die Eigenschaften der Brennpuncte, in einer Hinsicht, als besondere Fälle in sich schliefsen, nämlich nachstehende Sätze:

5. „Werden im Raume irgend drei feste Puncte a, b, c, und irgend drei andere, jenen beziehlich entsprechende, feste Puncte A, B, C angenommen, und werden in Rücksicht auf diese Fundamentalpuncte andern entsprechende Puncte x, X, so bestimmt, dafs ihre Abstände von jenen respective gleich sind, d. h., dafs $xa = XA$, $xb = XB$, $xc = XC$, so hat man ein Correlationssystem, worin der Punct X irgend eine Fläche zweiten Grades beschreibt, wenn der Punct x sich in einer Ebene bewegt; und auch umgekehrt."

6. „Werden in zwei verschiedenen Ebenen (oder auch in einer Ebene); zwei Paar feste oder Hauptpuncte a und b, A und B angenommen, und werden sofort die übrigen Puncte der Ebenen dergestalt auf einander bezogen, dafs je zwei entsprechende Puncte x und X, von den respectiven Hauptpuncten gleiche Abstände haben, so dafs $ax = AX$ und $bx = BX$, so hat man ein Beziehungssystem, wobei jeder Geraden in der einen Ebene ein Kegelschnitt in der andern Ebene entspricht, d. h., bewegt sich z. B. der Punct x in irgend einer Geraden g, so beschreibt der entsprechende Punct X einen Kegelschnitt G."

Diese Sätze (5. u. 6.) scheinen mir zu vielen Untersuchungen Anlafs zu geben, wozu ich jedoch vor der Hand nicht kommen werde. Eine nähere Discussion des letzten Satzes (6.) giebt z. B. sogleich folgende Resultate:

7. *a*) „Bewegt sich der Punct x in der Fundamental-Axe ab selbst, so beschreibt X einen Kegelschnitt, der die Hauptpuncte A, B zu Brennpuncten hat, und dessen erste Axe der Geraden ab gleich ist; welches der bekannte Satz über die Brennpuncte der Kegelschnitte ist." *b*) „Die eine oder andere Axe des Kegelschnitts G, welcher einer beliebigen Geraden g entspricht (6.), liegt in der Fundamental-Axe AB." *c*) „Man denke sich in der ersten Ebene denjenigen Kegelschnitt k, welcher der Haupt-Axe AB entspricht, und mithin die Hauptpuncte a, b zu Brennpuncten hat (*a*.). α. Ist die Gerade AB gröfser als ab, so ist k eine Ellipse, und dann entspricht der Geraden g eine Hyperbel G, deren *erste* oder *zweite* Axe in der Fundamental-Axe AB liegt, je nachdem die Gerade g den Kegelschnitt k *schneidet*, oder *nicht*; berührt sie ihn, dann besteht der Kegelschnitt G aus zwei Geraden, die sich in irgend einem Puncte der Haupt-Axe AB

schneiden und mit dieser gleiche Winkel bilden; ist $2(ab)^2 > (AB)^2$, so giebt es zwei bestimmte Richtungen für die Gerade g, wo ihr *gleichseitige* Hyperbeln G entsprechen, und zwar sind die Asymptoten aller dieser gleichseitigen Hyperbeln einander parallel, oder diese Hyperbeln haben zwei unendlich entfernte gemeinschaftliche Puncte. β. Ist die Axe AB kleiner als ab, so ist k eine Hyperbel, und alsdann entspricht der Geraden g eine *Ellipse* G oder eine *Hyperbel* G, je nachdem die durch den Mittelpunct der Hyperbel k mit g parallel gezogene Gerade g_1 im *inneren* oder *äufseren* Asymptoten-Winkel dieser Hyperbel liegt; ist g insbesondere mit einer Asymptote der Hyperbel k parallel, so ist G eine Parabel; eben so giebt es zwei bestimmte Richtungen für die Gerade g, wo ihr immer eine gleichseitige Hyperbel G entspricht." d) „Steht g auf der Hauptaxe ab senkrecht, so entspricht ihr allemal eine Gerade G (eigentlich zwei vereinigte Gerade), welche zu der Axe AB rechtwinklig ist;" u. s. w. e) „Ist g (statt einer Geraden) eine Curve vom n. Grade, so entspricht ihr eine Curve G vom $2n$. Grade; u. s. w."

Ähnliche Resultate folgen aus dem ersten Satze (5.). Im Strahlbüschel im Raume, oder auf der Kugelfläche, findet ein Satz Statt, welcher dem vorstehenden (6.) analog ist, und zwar findet er da, nach dem Principe der Reciprocität, in doppelter Gestalt Statt. Übrigens lassen sich auf diese Weise auch noch andere Beziehungssysteme aufstellen, wenn man statt der obigen einfachen Grundbedingungen (5. und 6.) andere annimmt.

Der Yvory'sche Satz zeigt ferner, dafs die Curve von doppelter Krümmung, in welcher zwei Flächen zweiten Grades einander schneiden, auch räumliche Brennpuncte haben kann, und dafs es also z. B. für jede Krümmungscurve des Ellipsoïds zwei bestimmte feste Puncte giebt, die leicht zu construiren sind, von der Beschaffenheit, dafs die Summe ihrer Distanzen von jedem Puncte der Curve constant ist, worauf sich eine leichte organische Erzeugung der Krümmungscurve gründen läfst; u. s. w.

9.

Démonstration géométrique d'un théorème relatif à l'attraction d'une couche ellipsoïdique sur un point extérieur.

(Par Mr. *J. Steiner*, Docteur en phil. et Prof. de Math. à Berlin.)

Le numéro du 12. Oct. 1833 du *Journal „l'Institut"* contient l'extrait d'un mémoire sur l'attraction d'un ellipsoïde homogene que M. Poisson a lu à l'Académie des sciences de Paris. On y trouve l'énoncé d'un théorème remarquable par sa simplicité et qui consiste en ce „qu'une couche infiniment mince et comprise entre deux ellipsoïdes concentriques semblables et semblablement placés excerce sur un point extérieur une attraction dirigée suivant l'axe du cône circonscrit à la couche et ayant pour sommet le point attiré." C'est ce théorème que nous allons démontrer par des considérations géométriques fort simples.

Lemme.

„L'ellipse ABCD (Tab. II. Fig. 1.) *étant touchée par les côtés PA, PB de l'angle APB, si l'on divise cet angle en deux parties égales par la droite PQ, qui coupe en Q la corde de contact AB polaire du point P, je dis que PQ formera des angles égaux avec les droites PC, PD qui joignent le point P aux deux extremités d'une corde quelconque passant par le point Q."*

Démonstration. Si l'on mène *PR* perpendiculairement à *PQ*: *PR, PA, PQ, PB* seront quatre droites harmoniques. Parconséquent les quatre points *R, A, Q, B* de même que les suivans *P, G, Q, F* sont harmoniques, et *PR* est la polaire du point *Q*; il suit de là que *D, Q, C, E* sont quatre points harmoniques et parconséquent *PD, PQ, PC, PE* quatre droites harmoniques, et comme les droites conjuguées *PE* et *PQ* sont perpendiculaires entre elles, on en conclut qu'elles doivent partager en deux parties égales l'angle formé par les droites conjuguées *PD, PC* de sorte que $DPQ = CPQ$ c. q. f. d. *).

*) On trouve les démonstrations des propriétés sur lesquelles nous nous appuyons ici dans les ouvrages suivants: La Perspective de Lambert; les Mémoires de

Théorème.

„L'attraction exercée par une couche homogène infiniment mince et comprise entre deux ellipsoïdes concentriques semblables et semblablement placés sur un point extérieur P est dirigée suivant l'axe du cône qui a son centre au point attiré et qui enveloppe la couche attirante."

Démonstration. Concevons sur la surface extérieure de la couche un élément infiniment petit, et soit C un point de cet élément. Le plan déterminé par ce point et par l'axe du cône circonscrit à la surface extérieure coupera cette surface en une ellipse $ACBD$, qui sera touchée par les deux arêtes PA, PB du cône comprises dans ce plan. Il est évident en même temps que la droite AB est l'intersection du plan en question et de celui qui contient la courbe de contact du cône et de la surface extérieure, et que Q est le point de rencontre de ce dernier plan et de l'axe du cône. Comme l'axe PQ divise en deux parties égales l'angle APB formé par les deux arêtes comprises dans un même plan avec lui, on conclura en vertu du lemme précédent que les angles CPQ, DPQ sont égaux. Si l'on concoit maintenant une droite mobile autour du point Q et parcourant le contour de l'élément de surface précédemment nommé, cette droite déterminera dans la couche ellipsoïdique deux éléments de volume situés de part et d'autre du point Q et dont nous allons considérer l'attraction d'abord sur le point intérieur Q et ensuite sur le point extérieur P. Quant à l'attraction exercée par ces éléments sur le point Q, on sait qu'elles sont égales et opposées, et c'est sur la destruction mutuelle des attractions exercées par deux éléments ainsi opposés qu'est fondé l'equilibre d'un point quelconque dans l'intérieur de la couche ellipsoïdique, comme Mac-Laurin l'a fait voir par la simple géométrie, et comme Lagrange l'a confirmé depuis par l'analyse. En supposant ce résultat, on en conclut que les deux éléments de volume, que nous désignons pour un instant par (C) et (D) vérifient la proportion

$$(C):(D) = (QC)^2:(QD)^2.$$

Il suit d'un autre coté de l'égalité des angles CPQ et DPQ précédemment établie, qu'on a

---

M. Brianchon; le traité des propriétés projectives par M. Poncelet; ou mes deux ouvrages intitulés: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" et „die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und Eines festen Kreises."

$$QC : QD = PC : PD$$

et parconséquent, en comparant:

$$(C) : (D) = (PC)^2 : (PD)^2,$$

proportion qui prouve que les deux éléments attirent également le point P, et partant que la résultante de ces deux actions est dirigée suivant l'axe PQ. Ce résultat étant applicable a tous les élémens de la couche qui se correspondent deux à deux, le théorème énoncé se trouve rigoureusement établi.

La démonstration précédente fournit en outre le corollaire suivant.

„*Un plan quelconque passant par le point Q partage la couche ellipsoïdique en deux parties qui exercent des attractions égales sur le point P.*"

On peut également tirer des considérations précédentes plusieurs vérités géométriques, dont je me contenterai d'énoncer une seule.

„*Si par l'ellipse, intersection de l'ellipsoïde et d'un plan quelconque passant par le point Q, l'on concoit un cône ayant son sommet au point P, l'axe de ce cône coïncidera avec la droite PQ.*"

Berlin, au mois de Janvier 1834.

10.
Sur l'intégration générale de l'équation de Riccati par des intégrales définies.

(Par Mr. *E. E. Kummer* Dr. phil. à Liegnitz en Silèsie.)

On donne ordinairement a l'équation de Riccati la forme

$$1.\quad \frac{dz}{dx}+az^2+bx^n = 0,$$

mais, pour l'intégration par les séries, il faut préférer la forme d'un équation linéaire du second ordre, qu'on obtient en faisant $z=\frac{dy}{ay\,dx}$, savoir

$$2.\quad \frac{d^2y}{dx^2}+abx^ny = 0.$$

L'intégrale de cette équation, qui se trouve dans les traités du calcul intégral, est exprimée par deux séries infinies de la manière suivante:

$$3.\quad y = A\Big(1-\frac{abx^{n+2}}{(n+2)(n+1)}+\frac{a^2b^2x^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)}-\cdots\Big),$$
$$+B.x\Big(1-\frac{abx^{n+2}}{(n+2)(n+3)}+\frac{a^2b^2x^{2n+4}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)}-\cdots\Big).$$

Il s'agit maintenant d'exprimer ces deux séries par des intégrales définies. Pour ce but j'observe qu'il suffit de considérer la seule série

$$4.\quad f(m,x)=1-\frac{x}{1.(m+1)}+\frac{x^2}{1.2(m+1)(m+2)}-\frac{x^3}{1.2.3(m+1)(m+2)(m+3)}+\cdots$$

car, ayant désigné cette série comme fonction des quantités m et x, par $f(m,x)$, on pourra donner à l'équation (3.) cette forme:

$$5.\quad y = Af\Big(\frac{-1}{n+2},\ \frac{abx^{n+2}}{(n+2)^2}\Big)+Bxf\Big(\frac{+1}{n+2},\ \frac{abx^{n+2}}{(n+2)^2}\Big).$$

Je propose à présent le théorème suivant:

Etant donnée la fonction $\varphi(x)$ développée en série

$$\varphi(x) = A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots$$

on en déduit la somme de cette autre série

$$6.\quad \int_0^1 u^{\lambda-1}(1-u)^{\nu-1}\varphi(xu)\,du = C\Big(A+\frac{\lambda A_1x}{\lambda+\nu}+\frac{\lambda(\lambda+1)A_2x^2}{(\lambda+\nu)(\lambda+\nu+1)}+\cdots\Big),$$

en désignant par C l'intégrale $\int_0^1 u^{\lambda-1}(1-u)^{\nu-1}du$.

La démonstration de ce théorème se fait avec facilité par le développement de $\varphi(xu)$ sous le signe d'intégration, ce qui donne une série, dont le terme général est

$$\int_0^1 u^{\lambda+k-1}(1-u)^{\nu-1} du \,.\, A_k x^k.$$

En faisant usage de la réduction connue de cette intégrale, savoir

$$\int_0^1 u^{\lambda+k-1}(1-u)^{\nu-1} du = \int_0^1 u^{\lambda-1}(1-u)^{\nu-1} du \,.\, \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots\ldots(\lambda+k-1)}{(\lambda+\nu)(\lambda+\nu+1)\ldots\ldots(\lambda+\nu+k-1)},$$

on trouve que c'est précisement le terme général de la série proposée dans le théorème.

Pour l'application à la sommation de la série $f(m,x)$ je prends $\varphi(x) = \cos.2\sqrt{x}$; $\lambda = \frac{1}{2}$; $\nu = m+\frac{1}{2}$; d'où

$$A_k = \frac{(-1)^k 2^{2k}}{1.2.3\ldots\ldots 2k} = \frac{(-1)^k}{1.2.3\ldots\ldots k.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\ldots\ldots\frac{2k-1}{2}};$$

l'équation (6.) donne

$$\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{m-\frac{1}{2}}\cos.2\sqrt{(xu)}.du$$
$$= \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{m-\frac{1}{2}} du.\left[1 - \frac{x}{1.(m+1)} + \frac{x^2}{1.2(m+1)(m+2)} - \ldots\ldots\right];$$

en prenant $u = v^2$ et remplaçant cette série par $f(m,x)$ on obtient

$$7. \quad \int_0^1 (1-v^2)^{m-\frac{1}{2}}\cos.2v\sqrt{x}.dv = \int_0^1 (1-v^2) dv.f(m,x).$$

Voilà déjà l'expression cherchée de la série $f(m,x)$. Mais on voit quelle n'est applicable que pour les valeurs de m entre les limites $-\frac{1}{2}$ jusqu'à $+\infty$; pour toutes les autres valeurs entre les limites $-\frac{1}{2}$ jusqu'à $-\infty$, les intégrales définies scroient infiniment grandes. Pour trouver une expression plus générale applicable à toutes les valeurs négatives de la quantité m, il faut séparer les prémiers termes de cette série au nombre de p. En les désignant par S, ainsi que

$$S = 1 - \frac{x}{1.(m+1)} + \frac{x^2}{1.2.(m+1)(m+2)} - \ldots\ldots \frac{(-1)^{p-1}x^{p-1}}{1.2.3\ldots\ldots(p-1)(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+p-1)};$$

on a

$$9. \quad f(m,x) = S + \frac{(-1)^p x^p}{1.2\ldots\ldots p.(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+p)}\left[1 - \frac{x}{(p+1)(m+p+1)}\right.$$
$$\left. + \frac{x^2}{(p+1)(p+2)(m+p+1)(m+p+2)} - \ldots\ldots\right].$$

Prenant à présent dans l'équation (6.) $\varphi(x) = f(m+p, x)$, $\lambda = 1$; $\nu = p$, on obtient

$$p\int_0^1 (1-u)^{p-1} f(m+p, xu)\, du$$
$$= 1 - \frac{x}{(p+1)(m+p+1)} + \frac{x^2}{(p+1)(p+2)(m+p+1)(m+p+2)} - \dots;$$

la valeur de cette série, substituée dans l'équation (9.) donne

10. $$f(m,x) = S + \frac{(-1)^p x^p}{1.2\dots(p-1)(m+1)\dots(m+p)} \int_0^1 (1-u)^{p-1} f(m+p, xu)\, du,$$

ou en mettant pour $f(m+p, xu)$ la valeur tirée de l'équation (7.) on obtient l'expression plus générale de la série $f(m,x)$:

11. $$f(m,x) = S + M x^p \int_0^1 \int_0^1 (1-u)^{p-1} (1-v^2)^{m+p-\frac{1}{2}} \cos.2u\sqrt{(xv)}.du.dv,$$

M désignant la quantité constante

$$M = \frac{(-1)^p}{1.2\dots(p-1).(m+1)\dots(m+p).\int_0^1 (1-v^2)^{m+p-\frac{1}{2}} dv}.$$

Cette double intégrale aura une valeur finie tantôt que $m+p+\frac{1}{2}$ est une quantité positive; le nombre entier positif p doit donc en chaque cas être pris de manière que $m+p+\frac{1}{2}$ soit positif.

Ainsi, pour chaque valeur positive ou négative de m, la série $f(m,x)$ est exprimée par des intégrales définies, et de là l'intégrale complète de l'équation de Riccati est trouvée sous forme finie. On déduit aussi de cette méthode les cas d'intégrabilité ordinaire, car si la quantité m est un nombre de la forme $\frac{2k-1}{2}$ (k étant un entier quelconque positif ou négatif) les intégrales définies des formules (7.) et (11.) peuvent être transformées en intégrales indéfinies, et on en conclut facilement, que les deux séries, qui entrent dans l'intégrale de l'équation de Riccati, peuvent être exprimées par des intégrales indéfinies, si l'exposant n est un nombre de la forme $\frac{-4k}{2k-1}$, ce qui est la condition connue pour l'intégrabilité de cette équation remarquable. Toutes ces valeurs de l'exposant n sont comprises entre les limites -4 et 0, mais c'est pour les autres valeurs non comprises entre ces limites, que l'intégrale de l'équation de Riccati prend la forme la plus simple, car on trouve par les équations (5.) et (7.) que l'intégrale complète de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + abx^n y = 0$$

est

$$y = A.\int_0^1 (1-v^2)^{-\frac{n+4}{2n+4}} \cos\left(\frac{2u\sqrt{(ab)}\,x^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}\right) dv$$

$$+ Bx\int_0^1 (1-v^2)^{\frac{-n}{2n+4}} \cos\left(\frac{2u\sqrt{(ab)}\,x^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}\right) dv$$

pour toutes les valeurs de n non comprises entre les limites -4 et 0.

J'ai trouvé que cette méthode d'intégration est applicable à une classe très étendue d'équations linéaires de tous les ordres. Il existe aussi un grand nombre de théorèmes analogues à celui qui est contenu dans l'équation (6.) au moyen desquels on trouve les sommes des séries infinies exprimées par des intégrales définies, ce que je ferai voir dans une autre occasion.

Über die Zeichen der Mathematik.

(Von Herrn Dr. *Schellbach* zu Berlin.)

(Schlufs des Aufsatzes No. 2. im vorigen Hefte.)

Wir wenden jetzt diese Entwickelungen wieder auf einige Beispiele an.

1. Es ist

$$(a+b,+k)^n = (a+b)(a+b+k,+k)^{n-1}$$
$$= a(a+b+k,+k)^{n-1}+b(a+b+k,+k)^{n-1}$$

und wenn man mit $(a-k,-k)^m(b-k,-k)^p$ multiplicirt

$$(a-k,-k)^m(b-k,-k)^p(a+b,+k)^n =$$
$$(a,-k)^{m+1}(b-k,-k)^p(a+b+k,+k)^{n-1}+(a-k,-k)^m(b,-k)^{p+1}(a+b+k,+k)^{n-1}$$

Diese Gleichung kann aufgefafst werden, als

$$f(a,b,m,p,n) = f(a+k,b,m+1,p,n-1)+f(a,b+k,m,p+1,n-1)$$

und giebt dann durch Vergleichung mit (14.) und (15.)

$$f(a,b,m,p,n) = (v+1\Big|\left(\frac{v,-1}{1,+1}\right)^\sigma f(a+vk-k\sigma,b+k\sigma,m+v-\sigma,p+\sigma,n-v)$$

Für $v=n$ und $m=p=0$, geht diese Formel über in

$$f(a,b,0,0,n) = (n+1\Big|\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^\sigma f(a+nk-k\sigma,b+k\sigma,n-\sigma,\sigma,0)$$

oder

$$(a+b,+k)^n = (n+1\Big|\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^\sigma(a+nk-k\sigma-k,-k)^{n-\sigma}(b+k\sigma-k,-k)^\sigma$$

und wenn man die Folge der Factoren umkehrt

$$20.\quad (a+b,+k)^n = (n+1\Big|\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^\sigma(a,+k)^{n-\sigma}(b,+k)^\sigma$$
$$= (a,+k)^n+\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)(a,+k)^{n-1}(b,+k)+\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^2(a,+k)^{n-2}(b,+k)^2$$
$$+\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^3(a,+k)^{n-3}(b,+k)^3+\ldots.+(b,+k)^n.$$

Verschwindet das Glied $(a-rk-k,-k)^{-r}(b+kr,-k)^{r+1}$ für irgend einem Werth von r, so kann man n auch negativ nehmen und erhält dann nach (17.)

$$21.\quad (a+b,+k)^{-n} = (r+1\Big|\left(\frac{-n,-1}{1,+1}\right)^\sigma(a,+k)^{-n-\sigma}(b,+k)^\sigma$$

Diese beiden Formeln stellen die Ausdehnung des binomischen Satzes auf Factoriellen dar.

Für $k=0$, $a=1$, $b=x$ erhält man die einfache binomische Reihe

$$22.\quad (1+x)^n = (n+1\Big|\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^\sigma x^\sigma = 1+\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)x+\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^2 x^2+\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^3 x^3+\ldots+x^n$$

und wenn man $x<1$ annimmt

$$23.\quad (1+x)^{-n} = \infty\Big|\left(\frac{-n,-1}{1,+1}\right)^\sigma x^\sigma = 1+\left(\frac{-n,-1}{1,+1}\right)x+\left(\frac{-n,-1}{1,+1}\right)^2 x^2+\left(\frac{-n,-1}{1,+1}\right)^3 x^3+\ldots$$

2. Man setzt bekanntlich

$$24.\quad \Delta^{n+1}u_{m-1} = \Delta^n u_m - \Delta^n u_{m-1}$$

wo n auch negativ sein kann und sich dann $\Delta^{-n}u$ durch $\Sigma^n u$ ersetzen läſst.

Faſst man diese Gleichung auf als

$$f(m-1,n+1) = f(m,n) - f(m-1,n)$$

so läſst sie sich in folgende 3 Formen bringen

$$25.\quad f(m,n) = f(m-1,n)+f(m-1,n+1)$$

$$26.\quad f(m,n) = f(m+1,n)-f(m,n+1)$$

$$27.\quad f(m,n) = f(m+1,n-1)-f(m,n-1)$$

Die Vergleichung dieser Formengleichungen mit (14.) und (15.) ergiebt auf der Stelle

$$28.\quad \Delta^n u_m = (k+1\Big|\left(\frac{k,-1}{1,+1}\right)^\sigma \Delta^{n+\sigma}u_{m-k}$$

$$= \Delta^n u_{m-k}+\left(\frac{k,-1}{1,+1}\right)\Delta^{n+1}u_{m-k}+\left(\frac{k,-1}{1,+1}\right)^2\Delta^{n+2}u_{m-k}+\ldots+\Delta^{n+k}u_{m-k}$$

$$29.\quad \Delta^n u_m = (k+1\,|(-)^\sigma\left(\frac{k,-1}{1,+1}\right)^\sigma \Delta^{n+\sigma}u_{m+k-\sigma}$$

$$= \Delta^n u_{m+k}-\left(\frac{k,-1}{1,+1}\right)\Delta^{n+1}u_{m+k-1}+\left(\frac{k,-1}{1,+1}\right)^2\Delta^{n+2}u_{m+k-2}-\ldots+(-)^k\Delta^{n+k}u_m$$

$$30.\quad \Delta^n u_m = (k+1\,|(-)^\sigma\left(\frac{k,-1}{1,+1}\right)\Delta^{n-k}u_{m+k-\sigma}$$

$$= \Delta^{n-k}u_{m+k}-\left(\frac{k,-1}{1,+1}\right)\Delta^{n-k}u_{m+k-1}+\left(\frac{k,-1}{1,+1}\right)^2\Delta^{n-k}u_{m+k-2}-\ldots+(-)^k\Delta^{n-k}u_m$$

Aus (17.) erhält man, wenn $\Delta^n u_m$ für sehr groſse m oder n verschwindet

$$31.\quad \Delta^n u_m = \infty\Big|\left(\frac{-k,-1}{1,+1}\right)^\sigma \Delta^{n+\sigma}u_{m+k}$$

$$32.\quad \Delta^n u_m = \infty\,|(-)^\sigma\left(\frac{-k,-1}{1,+1}\right)^\sigma \Delta^{n+\sigma}u_{m-k-\sigma}$$

$$33.\quad \Delta^n u_m = \infty\,|(-)^\sigma\left(\frac{-k,-1}{1,+1}\right)^\sigma \Delta^{n+k}u_{m-k-\sigma}$$

so daſs also die drei Formeln (28.) bis (30) für $\pm k$ gelten.

Wir geben hier noch die Entwicklung der Differenz eines Products. Es ist

$$34.\quad \Delta(\Delta^p P.\Delta^q Q_n) = \Delta^p P.\Delta^{q+1} Q_n + \Delta^{p+1} P.\Delta^q Q_{n+1}$$

und wenn man hiervon die $(k-1)$ste Differenz nimmt

$$35.\quad \Delta^k(\Delta^p P.\Delta^q Q_n) = \Delta^{k-1}(\Delta^p P.\Delta^{q+1} Q_n) + \Delta^{k-1}(\Delta^{p+1} P.\Delta^q Q_{n+1})$$

Diese Gleichung fassen wir auf als

$$f(k,p,q,n) = f(k-1,p,q+1,n) + f(k-1,p+1,q,n+1)$$

Die Vergleichung dieser Functionen mit (14.) und (15.) ergiebt

$$36.\quad \Delta^k(\Delta^p P.\Delta^q Q_n) = (k+1|\left(\frac{k,-1}{1,+1}\right)^\sigma \Delta^{p+\sigma} P.\Delta^{q+k-\sigma} Q_{n+\sigma}$$

$$= \Delta^p P.\Delta^{q+k} Q_n + \left(\frac{k,-1}{1,+1}\right)\Delta^{p+1} P.\Delta^{q+k-1} Q_{n+1} + \left(\frac{k,-1}{1,+1}\right)^2 \Delta^{p+2} P.\Delta^{q+k-2} Q_{n+2} + \dots$$

und weil k auch negativ sein kann, so erhält man aus (17.):

$$37.\quad \Delta^{-k}(\Delta^p P.\Delta^q Q_n) = \infty|\left(\frac{-k,-1}{1,+1}\right)^\sigma \Delta^{p+\sigma} P.\Delta^{q-k-\sigma} Q_{n+\sigma}$$

$$= \Delta^p P.\Delta^{q-k} Q_n + \left(\frac{-k,-1}{1,+1}\right)\Delta^{p+1} P.\Delta^{q-k-1} Q_{n+1} + \left(\frac{-1,-k}{1,+1}\right)^2 \Delta^{p+2} P.\Delta^{q-k-2} Q_{n+2} + \dots$$

Für $k=1$ liefert (37.) eine bekannte Reihe von Taylor, die Condercet in einer etwas abgeänderten Gestalt giebt. Wir schließen für diesen Fall noch eine andere Entwicklung an. Es ist

$$\Delta(P.T) = \Delta P.T + P_1.\Delta T$$

Setzt man hier $T = \frac{\Delta^{-1}(P.Q)}{P}$, so entsteht

$$\Delta(\Delta^{-1}(P.Q)) = \Delta P.\frac{\Delta^{-1}(PQ)}{P} + P_1\Delta\left(\frac{\Delta^{-1}(P.Q)}{P}\right)$$

und daraus

$$\frac{PQ}{\Delta P} = \frac{\Delta^{-1}(PQ)}{P} + \frac{P_1}{\Delta P}\Delta\left(\frac{\Delta^{-1}(PQ)}{P}\right)$$

Differenzirt man diese Gleichung und multiplicirt sie dann mit $\frac{P_1}{\Delta P}$, so ergiebt sich, wenn diese Operation n mal wiederholt ist,

$$\left(\frac{P_1}{\Delta P}\Delta\right)^n \frac{PQ}{\Delta P} = \left(\frac{P_1}{\Delta P}\Delta\right)^n \frac{\Delta^{-1}(PQ)}{P} + \left(\frac{P_1}{\Delta P}\Delta\right)^{n+1} \frac{\Delta^{-1}(PQ)}{P}$$

Hier ist n ein Wiederholungs-Exponent, was aber nicht besonders ausgedrückt zu werden braucht, da die eingeklammerte Größe immer von selbst dem n seine Bedeutung anweiset. Diese Gleichung fassen wir auf als

$$\varphi(n) = f(n+1) + f(n)$$

und erhalten dann nach der Gleichung (2.) des §. 4.

$$k|(-)^{\sigma+1}\varphi(n+\sigma) = (-)^k f(n+k) - f(n)$$

oder wenn man $n=0$ setzt und für φ und f das was sie bedeuten,

$$38.\quad k|(-)^{\sigma+1}\left(\frac{P_1}{\Delta P}\right)^\sigma \frac{PQ}{\Delta P} = (-)^k\left(\frac{P_1}{\Delta P}\Delta\right)^k \frac{\Delta^{-1}(PQ)}{P} - \frac{\Delta^{-1}(PQ)}{P}$$

Verschwindet das erste Glied der rechten Seite, so schreiben wir diese Reihe in entwickelter Form

$$39.\quad \Delta^{-1}(PQ)$$
$$= P\left\{\frac{PQ}{\Delta P} - \frac{P_1}{\Delta P}\Delta\left(\frac{PQ}{\Delta P}\right) + \frac{P_1}{\Delta P}\Delta\left(\frac{P_1}{\Delta P}\Delta\left(\frac{PQ}{\Delta P}\right)\right) - \frac{P_1}{\Delta P\Delta}\left(\frac{P_1}{\Delta P}\Delta\left(\frac{P_1}{\Delta P}\Delta\left(\frac{PQ}{\Delta P}\right)\right)\right) + \ldots\right\}$$

Dies ist die Gleichung (39.) in Schweins Theorie der Differenzen und Differenziale. Ganz auf dieselbe Weise lassen sich alle Reihen dieses Werkes bis zu $N(44)$ entwickeln.

Die sogenannte Analogie der Differenzen und Potenzen beruht nur auf der Ähnlichkeit der Formeln (25.) bis (27.) mit denen von (8.) bis (10.) im §. 4.

§. 6.

In der Functionengleichung

$$1.\quad f(x) = \varphi(x)f(x+y) \pm \psi(x)f(x+z)$$

setzen wir $x+ry+sz$ statt x und bekommen dann

$$f(x+ry+sz) = \varphi(x+ry+sz)f(x+(r+1)y+sz) \pm \psi(x+ry+sz)f(x+ry+(s+1)z)$$

oder wenn wir nur die Coefficienten von y und z beibehalten

$$2.\quad f(r,s) = \varphi(r,s)f(r+1,s) \pm \psi(r,s)f(r,s+1)$$

Nach dieser Gleichung kann dann (1.) geschrieben werden

$$f00 = \varphi 00.f10 \pm \psi 00.f01$$

wo wir der Einfachheit wegen die Klammern und Kommata ausgelassen haben.

Diese Gleichung läßt sich noch etwas einfacher darstellen, wenn wir die Coefficienten einer Reihe vom $n+1$ Gliedern durch $n_0, n_1, n_2, \ldots \ldots n_n$ bezeichnen, denn dann erhalten wir

$$f00 = 1_0.f10 \pm 1_1.f01$$

Vermöge der Gleichung (2.) lassen sich die Glieder $1_0.f10$ und $1_1.f01$ dieser letzten Gleichung umformen in

$$\begin{aligned} 1_0.f10 &= 1_0.\varphi 10.f20 \pm 1_0.\psi 10.f11 \\ \pm 1_1.f10 &= \qquad\qquad\qquad \pm 1_1.f11 + 1_1.\psi 01.f02 \end{aligned}$$

Setzt man hier die Werthe von 1_0 und 1_1 aus (3.) und addirt, so erhält man eine zweite Reihe

$$4.\quad f00 = \varphi 00.\varphi 10.f20 \pm \left.\begin{matrix}\varphi 00.\psi 10 \\ \varphi 01.\psi 00\end{matrix}\right| f11 + \psi 00.\psi 01.f02$$

oder kürzer

$$f00 = 2_0.f20 \pm 2_1.f11 + 2_2.f02$$

Die 3 Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung können wieder nach (2.) umgeformt werden und geben dann

$$\begin{array}{rl} 2_0.f20 = & 2_0.\Phi20.f30 \pm 2_0.\psi20.f21 \\ \pm 2_1.f11 = & \qquad\qquad \pm 2_1.\Phi11.f21 + 2_1.\psi11.f12 \\ 2_2.f02 = & \qquad\qquad\qquad\qquad + 2_2.\Phi02.f12.\pm 2_2.\psi02.f03 \end{array}$$

Addirt man diese Gleichungen und setzt die Werthe von 2_0, 2_1, 2_2 aus (4.), so entsteht die dritte Reihe

$$5.\ f00 = \varphi00.\varphi10.\varphi20.f30 \pm \left.\begin{array}{r}\varphi00.\varphi10.\psi20\\ \varphi00.\varphi11.\psi10\\ \varphi01.\varphi11.\psi00\end{array}\right| f21 + \left.\begin{array}{r}\varphi00.\psi10.\psi11\\ \varphi01.\psi00.\psi11\\ \varphi02.\psi00.\psi01\end{array}\right| f12 \pm \psi00.\psi01.\psi02.f03$$

oder kürzer

$$f00 = 3_0.f30 \pm 3_1.f21 + 3_2.f12 \pm 3_3.f03$$

Es leuchtet nun schon ein, dafs wir aus der Gleichung (5.) durch Umformung der einzelnen Glieder nach (2.) erhalten

$$f00 = 3_3.\Phi30.f40 \pm \left.\begin{array}{r}3_0.\psi31\\ 3_1.\Phi21\end{array}\right| f31 + \left.\begin{array}{r}3_1.\psi21\\ 3_2.\Phi12\end{array}\right| f22 \pm \left.\begin{array}{r}3_2.\psi12\\ 3_3.\Phi03\end{array}\right| f13 + 3_3.\psi03.f04$$

Setzen wir nochmals die Werthe von 3_0, 3_1, 3_2, 3_3 aus (5.), so ergiebt sich eine vierte Reihe

$$6.\ f00 = \varphi00.\varphi10.\varphi20.\varphi30.f40 \pm \left.\begin{array}{r}\varphi00.\varphi10.\varphi20.\psi30\\ \varphi00.\varphi10.\varphi21.\psi20\\ \varphi00.\varphi11.\varphi21.\psi10\\ \varphi01.\varphi11.\varphi21.\psi00\end{array}\right| f31 + \left.\begin{array}{r}\varphi00.\varphi10.\psi20.\psi21\\ \varphi00.\varphi11.\psi10.\psi21\\ \varphi01.\varphi11.\psi00.\psi21\\ \varphi00.\varphi12.\psi10.\psi11\\ \varphi01.\varphi12.\psi00.\psi11\\ \varphi02.\varphi12.\psi00.\psi01\end{array}\right| f22$$

$$\pm \left.\begin{array}{r}\varphi00.\psi10.\psi11.\psi12\\ \varphi01.\psi00.\psi11.\psi12\\ \varphi02.\psi00.\psi01.\psi12\\ \varphi03.\psi00.\psi01.\psi02\end{array}\right| f13 + \psi00.\psi01.\psi02.\psi03.f04$$

Ist nun so die $n$te Reihe entwickelt, so ergiebt sich aus ihr, vermöge der Gleichung (2.), wenn wir wieder Klammern und Kommata einführen, der Eortgang zur $(n+1)$sten Reihe durch folgende Gleichung

$$f(0,0) = n_0\,\varphi(n,0)f(n+1,0) \pm \left.\begin{array}{r}n_0\,\psi(n,0)\\ n_1\,\varphi(n-1,1)\end{array}\right| f(n,1) + \left.\begin{array}{r}n_1\,\psi(n-1,1)\\ n_2\,\varphi(n-2,2)\end{array}\right| f(n-1,2) \pm \ldots$$

$$\ldots (\pm)^m \left.\begin{array}{r}n_{m-1}\,\psi(n-m+1,m-1)\\ n_m\,\varphi(n-m,m)\end{array}\right| f(n+1-m,m) + \ldots.$$

oder

$$7.\ f(0,0) = (n+2\|(\pm)^\sigma[n_{\sigma-1}\psi(n+1-\sigma,\sigma-1) + n_\sigma\Phi(n-\sigma,\sigma)]f(n+1-\sigma,\sigma)$$

Weil n_{-1} und n_{n+1} Null sind, so besteht das erste und letzte Glied dieser Reihe nur aus einem Theile. Es handelt sich hier um die Bestimmung der Coefficienten von y und z in den Functionen φ und ψ; betrachten wir daher jetzt in der Gleichung (6.) die Coefficienten von y, welche in der Function φ enthalten sind, und schreiben sie der Übersicht wegen besonders heraus, so haben wir

$$\begin{array}{llll}
0123 & 012 & 01 & 0 \\
 & 012 & 01 & 0 \\
 & 012 & 01 & 0 \\
 & 012 & 01 & 0 \\
 & & 01 & \\
 & & 01 &
\end{array}$$

Die Gleichung (7.) ergiebt aber, dafs sich in jeder folgenden Entwicklung auf der rechten Seite jedes Gliedes eine neue nächstfolgende Coefficientenreihe für y anschliefst, dafs z. B. die Coefficienten in der fünften Reihe beginnen

$$01234,\quad 0123,\quad 012,\quad 01,\quad 0$$

Ganz ähnlich verhält es sich mit den Coefficienten von z in der Function ψ, nur dafs sie in umgekehrter Ordnung auf einander folgen, denn sie sind in der vierten Reihe

$$\begin{array}{llll}
0 & 01 & 012 & 0123 \\
0 & 01 & 012 & \\
0 & 01 & 012 & \\
0 & 01 & 012 & \\
 & 01 & & \\
 & 01 & &
\end{array}$$

Betrachten wir jetzt in der Gleichung (6.) die Coefficienten von z, welche in der Function φ vorkommen, nemlich

$$\begin{array}{llll}
0000 & 000 & 00 & 0 \\
 & 001 & 01 & 1 \\
 & 011 & 02 & 2 \\
 & 111 & 11 & 3 \\
 & & 12 & \\
 & & 22 &
\end{array}$$

so bilden diese die Combinationen mit Wiederholungen, welche wir bekanntlich nach (13.) des §. 3. bezeichnen durch

$$[4,1],\quad [3,2],\quad [2,3],\quad [1,4]$$

Sind nun diese Coefficienten für die $n$te Reihe gefunden:

$$[n,1],\quad [n-1,2],\quad [n-2,3],\quad \ldots\quad [n-r,r+1],\quad \ldots\quad [1,n]$$

und wir nehmen aus dem vollständigen $(r+1)$sten Coefficienten der $(n+1)$sten Reihe

$$n_{r-1}\psi(n+1-r,\, r-1)+n_r\varphi(n-r,\, r)$$

blofs die Coefficienten von z, die in der Function φ vorkommen, so haben wi

$$[n+1-r, r]+[n-r, r+1]r$$

dies ist aber nach der Gleichung (13.) des §. 3. nichts anderes als

$$[n+1-r, r+1]$$

welcher Ausdruck also die Coefficienten von z in dem vollständigen $(r+1)$sten Coefficienten der $(n+1)$sten Reihe bezeichnet.

Ganz ähnlich verhält es sich mit dem Coefficienten von y in der Function ψ, nur dafs auch sie in umgekehrter Ordnung auf einander folgen, und die Combinationen von unten nach oben laufen. In der vierten Reihe sind diese Coefficienten z. B.

$$\begin{array}{cccc} 3 & 22 & 111 & 0000 \\ 2 & 12 & 011 & \\ 1 & 11 & 001 & \\ 0 & 02 & 000 & \\ & 01 & & \\ & 00 & & \end{array}$$

Setzen wir nun wieder alle Buchstaben in die Functionszeichen, so wird z. B. das zweite Glied der vierten Reihe geschrieben

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x+0y+0z)\varphi(x+1y+0z)\varphi(x+2y+0z)\psi(x+3y+0z) \\ +\varphi(x+0y+0z)\varphi(x+1y+0z)\varphi(x+2y+1z)\psi(x+2y+0z) \\ +\varphi(x+0y+0z)\varphi(x+1y+1z)\varphi(x+2y+1z)\psi(x+1y+0z) \\ +\varphi(x+0y+1z)\varphi(x+1y+1z)\varphi(x+2y+1z)\psi(x+0y+0z) \end{array}\right\} f(x+3y+z)$$

Jetzt kann der $r$te Coefficient der $n$ten Reihe leicht gebildet werden. Wir combiniren nemlich erst die Elemente 0, 1, 2, ... $r-1$ zu $n+1-r$ mit Wiederholungen, und dann eben so in umgekehrter Ordnung die Elemente 0, 1, 2, ... $n+1-r$ zu je $r-1$. Die ersten Combinationen stellen die Coefficienten von z in der Function φ dar; wir fügen dann zu den aufeinander folgenden Reihen derselben noch entsprechend die Zahlen 0, 1, 2, 3, ... als Coefficienten von y. Die letzteren Combinationen stellen die Coefficienten von y in der Function ψ dar, und zu den auf einander folgenden Reihen derselben fügen wir entsprechend die Zahlen 0, 1, 2, 3 .... als Coefficienten von z. Das Hauptglied selbst ist $(\pm)^{r-1}f(x+ny+(z-y)(r-1))$. Wir wollen diesen Coefficienten ausdrücken durch

$$\varphi(x+y(0\downarrow+1)^{n-r+1}+z[n-r+1\downarrow r])\psi(x+y[r-1\uparrow n-r+2]+z(0\uparrow+1)^{r-1})$$

indem wir uns so viel als möglich an schon gebrauchte Zeichen anschliefsen. Die Pfeile geben die Richtung der Combinationen an, und dienen zugleich dazu, diese Zeichen von ähnlichen zu unterscheiden.

Ist also die Gleichung gegeben

$$8.\quad f(x) = \Phi(x) f(x+y) \pm \psi(x) f(x+z)$$

so ist auch

$$9.\quad f(x) = (n+1|(\pm)^{\sigma} \varphi(x+y(0 \downarrow +1)^{n-\sigma} + z[n-\sigma \downarrow 1+\sigma])\psi(x+y[\sigma \uparrow n+1-\sigma] + z(0 \uparrow +1)^{\sigma}) f(x+ny+(z-y)\sigma)$$

Hiernach ist z. B. das dritte Glied der fünften Reihe, wenn wir, der Kürze wegen, blofs die Coefficienten von y und z ausschreiben,

$$(\pm)^3 \varphi(x+y(0 \downarrow +1)^3 + z[3 \downarrow 3])\psi(x+y[2 \uparrow 4] + z(0 \uparrow +1)^3) f(x+3y+2z) =$$

$\varphi(x+0y+0z)$	$\varphi(x+1y+0z)$	$\varphi(x+2y+0z)$	$\psi(x+3y+0z)$	$\psi(x+3y+1z)$	$f(x+3y+2z)$
0 0	1 0	2 1	2 0	3 1	
0 0	1 0	2 2	2 0	2 1	
0 0	1 1	2 1	1 0	3 1	
0 0	1 1	2 2	1 0	2 1	
0 0	1 2	2 2	1 0	1 1	
0 1	1 1	2 1	0 0	3 1	
0 1	1 1	2 2	0 0	2 1	
0 1	1 2	2 2	0 0	1 1	
0 2	1 2	2 2	0 0	0 1	

Bei diesen Entwickelungen mufs noch ein besonderer Fall unterschieden werden, nemlich wenn $y = z$ ist, oder wenn man hat

$$10.\quad f(x) = \Phi(x) f(x+y) \pm \psi(x) f(x+y)$$

Hier ist zunächst zu bemerken, dafs $f(x+y)$ im ersten Gliede der rechten Seite nicht mit $f(x+y)$ im zweiten Gliede als gleich betrachtet zu werden braucht, weil noch andere Veränderliche unter dem Functionszeichen enthalten sein können, die eine Ungleichheit hervorbringen. In dem gegenwärtigen Falle verwandelt sich die Gleichung (9.) in

$$11.\quad f(x) = (n+1|(\pm)^{\sigma} \Phi(x+y(n-\sigma \downarrow n))\psi(x+y(\sigma \uparrow n)) f(x+ny)$$

denn es müssen zu den Combinationen mit Wiederholungen die Zahlen 0, 1, 2, 3, ... addirt werden, wie es z. B. der oben entwickelte dritte Coefficient der fünften Reihe angiebt, wodurch die Combinationen ohne Wiederholungen entstehen, was wir, dem Früheren gemäfs, auf die angezeigte Weise ausdrücken. Hiernach ist z. B. der dritte Coefficient der fünften Reihe

$$\varphi(x+y(3 \downarrow 5))\psi(x+y(2 \downarrow 5)) =$$

$\varphi(x+0y)$	$\varphi(x+1y)$	$\varphi(x+2y)$	$\psi(x+3y)$	$\psi(x+4y)$
0	1	3	2	4
0	1	4	2	3
0	2	3	1	4
0	2	4	1	3
0	3	4	1	2
1	2	3	0	4
1	2	4	0	3
1	3	4	0	2
2	3	4	0	1

§. 7.

Vermittelst der Gleichung (9.) des vorigen Paragraphen entwickelt man sehr leicht folgende Formeln:

$$1.\quad (a+b)^n = (n+1\|[n-\sigma,\,1+\sigma\,!\,a-\delta](b,+1)^\sigma$$

z. B.

$$(a+b)^3 = 4\|\,[3-\sigma,1+\sigma\,!\,a-\delta]\,(b,+1)^\sigma$$

$$= [3,1\,!\,a-\delta](b,+1)^0 + [2,2\,!\,a-\delta]\,(b,+1)^1 + [1,3\,!\,a-\delta]\,(b,+1)^2 + [0,4\,!\,a-\delta](b,+1)^3$$

$$= aaa + \left.\begin{array}{r} a-0.a-0 \\ a-0.a-1 \\ a-1.a-1 \end{array}\right| b + \left.\begin{array}{r} a-0 \\ a-1 \\ a-2 \end{array}\right| b(b+1) + b(b+1)(b+2)$$

$$2.\quad (a+b)^n = (n+1\|\,[n-\sigma \downarrow 1+\sigma\,!\,a+1+\delta]\,[\sigma \uparrow n+1-\sigma\,!\,\delta-a]\left(\frac{b-\sigma,+1}{1,+1}\right)^n$$

z. B.

$$(a+b)^3 = 4\|\,[3-\sigma \downarrow 1+\sigma!a+1+\delta]\,[\sigma \uparrow 4-\sigma\,!\,\delta-a]\left(\frac{b-\sigma,+1}{1,+1}\right)^3$$

$$= a+1.a+1.a+1\left(\frac{b,+1}{1,+1}\right)^3 + \left.\begin{array}{r} a+1.a+1.2-a \\ a+1.a+2.1-a \\ a+2.a+2.0-a \end{array}\right| \left(\frac{b-1,+1}{1,+1}\right)^3 + \left.\begin{array}{r} a+1.1-a.1-a \\ a+2.0-a.1-a \\ a+3.0-a.0-a \end{array}\right| \left(\frac{b-2,+1}{1,+1}\right)^3$$

$$+\,0-a.0-a.0-a\left(\frac{b-3+1}{1,+1}\right)^3$$

Für $a=0$ und $b=a$ ergiebt sich aus (2.)

$$3.\quad a^n = n\|\,[n-1-\sigma \downarrow 1+\sigma\,!\,1+\delta]\,[\sigma \uparrow n-\sigma\,!\,1+\delta]\left(\frac{a-\sigma,+1}{1,+1}\right)^n$$

z. B.

$$a^5 = 5\|\,[4-\sigma \downarrow 1+\sigma!1+\delta]\,[\sigma \uparrow 5-\sigma!1+\delta]\left(\frac{a-\sigma,+1}{1,+1}\right)^5$$

$$= 1111\left(\frac{a,+1}{1,+1}\right)^5 + \left.\begin{array}{r} 111.4 \\ 112.3 \\ 122.2 \\ 222.1 \end{array}\right| \left(\frac{a-1,+1}{1,+1}\right)^5 + \left.\begin{array}{r} 11.33 \\ 12.23 \\ 13.22 \\ 22.13 \\ 23.12 \\ 33.11 \end{array}\right| \left(\frac{a-2,+1}{1,+1}\right)^5 + \left.\begin{array}{r} 1.222 \\ 2.122 \\ 3.112 \\ 4.111 \end{array}\right| \left(\frac{a-3,+1}{1,+1}\right)^5 + 1111\left(\frac{a-4,+1}{1,+1}\right)^5$$

oder

$$a^5 = \left(\frac{a,+1}{1,+1}\right)^5 + 26\left(\frac{a-1,+1}{1,+1}\right)^5 + 66\left(\frac{a-2,+1}{1,+1}\right)^5 + 26\left(\frac{a-3,+1}{1,+1}\right)^5 + \left(\frac{a-4,+1}{1,+1}\right)^5$$

In dieser Entwickelung sind die Coefficienten symmetrisch wie die gemeinen Binomialcoefficienten.

Aus diesen Formeln fliefsen dann noch leicht folgende zuerst von Schweins in seiner Analysis entwickelte:

$$4.\quad k\|(a+\sigma)^n = (n+1\|\,[n-\sigma,\,1+\sigma\,!\,a+\delta]\,\frac{(k,-1)^{\sigma+1}}{\sigma+1}$$

Für $a=0$ erhält man

5. $0^n+1^n+2^n+3^n+\ldots+(k-1)^n = k|\sigma^n = (n+1|[n-\sigma, 1+\sigma]\frac{(k,-1)^{\sigma+1}}{\sigma+1}$

z. B.

$$0^4+1^4+2^4+3^4+\ldots+(k-1)^4 = k|\sigma^4 = 5|[4-\sigma, 1+\sigma]\frac{(k,-1)^{\sigma+1}}{\sigma+1}$$

$$= [4,1]\frac{(k,-1)}{1}+[3,2]\frac{(k,-1)^2}{2}+[2,3]\frac{(k,-1)^3}{3}+[1,4]\frac{(k,-1)^4}{4}+[0.5]\frac{(k,-1)^5}{5}$$

$$= 111.\frac{(k,-1)^2}{2}+\begin{array}{r}11\\12\\22\end{array}\Bigg|\frac{(k,-1)^3}{3}+\begin{array}{r}1\\2\\3\end{array}\Bigg|\frac{(k,-1)^4}{4}+\frac{(k,-1)^5}{5}$$

$$= \tfrac{1}{2}k(k-1)+\tfrac{7}{3}k(k-1)(k-2)+\tfrac{6}{4}k(k-1)(k-2)(k-3)+\tfrac{1}{5}k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)$$

6. $k|\sigma^n = n|[n-1-\sigma \downarrow 1+\sigma ! 1+\delta][\sigma \uparrow n-\sigma ! 1+\delta]\left(\frac{k-\sigma-1,+1}{1,+1}\right)^{n+1}$

z. B.

$$k|\sigma^5 = \left(\frac{k-1,+1}{1,+1}\right)^6+26\left(\frac{k-2,+1}{1,+1}\right)^6+66\left(\frac{k-3,+1}{1,+1}\right)^6+26\left(\frac{k-4,+1}{1,+1}\right)^6+\left(\frac{k-5,+1}{1,+1}\right)^6$$

§. 8.

Wir wenden jetzt die Formel (9.) des §. 6. an, die höheren Differentiale des Ausdrucks

$$x^p(1+x^q)^n$$

zu bestimmen, der eben so allgemein ist als $(a+bx)^p(A+B(a+bx)^q)^n$, mit welcher Formel sich **Schweins** in seiner Theorie der Differenzen etc. von p. 244. bis p. 260. beschäftigt.

I. Es ist

1. $\frac{\partial}{\partial x}\cdot x^p(1+x^q)^n = p\,x^{p-1}(1+x^q)^n+n\,q\,x^{p+q-1}(1+x^q)^{n-1}$

also

2. $\frac{\partial^m}{\partial x^m}\cdot x^p(1+x^q)^n = p\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}\cdot x^{p-1}(1+x^q)^n+nq\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}\cdot x^{p+q-1}(1+x^q)^{n-1}$

Diese Gleichung kann aufgefafst werden als:

$$f(m,p,n) = \varphi(p)f(m-1,p-1,n)+\psi(n)f(m-1,p+q-1,n-1)$$

und giebt dann durch Vergleichung mit der erwähnten Formel

$$f(m,p,n) = (k+1|\varphi(p-(0\downarrow+1)^{k-\sigma}$$
$$+(q-1)[k-\sigma\downarrow 1+\sigma])\psi(n-(0\uparrow+1)^{\sigma})f(m-k,p+q\sigma-k,n-\sigma)$$

Setzt man hier $k=m$ und die Werthe von f, φ und ψ, so erhält man

3. $\frac{\partial^m}{dx^m}\cdot x^p(1+x^q)^n$

$$= (m+1|(p-(0\downarrow+1)^{m-\sigma}+(q-1)[m-\sigma\downarrow 1+\sigma])(n,-1)^{\sigma}q^{\sigma}x^{p-m+q\sigma}(1+x^q)^{n-\sigma}$$

Für $m=4$ entsteht z. B.

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}.x^p(1+x^q)^n = 5|(p-(4-\sigma|4)+q[4-\sigma|1+\sigma])(n,-1)^\sigma q^\sigma x^{p-4+q\sigma}(1+x^q)^{n-\sigma}$$

$$= (p-0+0q)(p-1+0q)(p-2+0q)(p-3+0q)(n,-1)^0 q^0 x^{p-4+0q}(1+x^q)^n$$

$$+\left.\begin{matrix}(p-0+0q)(p-1+0q)(p-2+0q)\\(p-0+0q)(p-1+0q)(p-3+1q)\\(p-0+0q)(p-2+1q)(p-3+1q)\\(q-1+1q)(p-2+1q)(p-3+1q)\end{matrix}\right|(n,-1)^1 q^1 x^{p-4+1q}(1+x^q)^{n-1}$$

$$+\left.\begin{matrix}(p-0+0q)(p-1+0)\\(p-0+0q)(p-2+1)\\(p-0+0q)(p-3+2)\\(p-1+1q)(p-2+1)\\(p-1+1q)(p-3+2)\\(p-2+2q)(p-3+2)\end{matrix}\right|(n,-1)^2 q^2 x^{p-4+2q}(1+x^q)^{n-2}$$

$$+\left.\begin{matrix}(p-0+0q)\\(p-1+1q)\\(p-2+2q)\\(p-3+3q)\end{matrix}\right|(n,-1)^3 q^3 x^{p-4+3q}(1+x^q)^{n-3}+(n,-1)^4 q^4 x^{p-4+4q}(1+x^q)^{n-4}$$

Wir suchen nun die Coefficienten dieser Reihe so umzuformen, daſs sie wenigstens für besondere Werthe von p und q eine einfachere Gestalt annehmen. Drücken wir deshalb die Coefficienten einer Reihe von $m+1$ Gliedern wieder durch m_0, m_1, m_2, ... aus, so läſst sich die Gleichung (3.) schreiben

$$4.\quad \frac{\partial^m}{\partial x^m}.x^p(1+x^q)^n = (m+1|m_\sigma(n,+1)^\sigma q^\sigma x^{p-m+q\sigma}(1+x^q)^{n-\sigma}$$

Differenzirt man diese Gleichung, so kommt

$$5.\quad \frac{\partial^{m+1}}{dx^{m+1}}.x^p(1+x^q)^n = (m+2|[(p-m+q\sigma)m_\sigma+m_{\sigma-1}](n,-1)^\sigma q^\sigma x^{p-m-1+q\sigma}(1+x^q)^{n-\sigma}$$

wenn man bedenkt, daſs sowohl m_{-1} als m_{m+1} Null sind. Setzt man nun in (4.) $m+1$ statt m, und vergleicht die zu gleichen Potenzen von x gehörigen Coefficienten der entstehenden Reihe, und der Reihe (5.), so ergiebt sich

$$6.\quad (m+1)_s = (p-m+qs)m_s + m_{s-1}$$

Diese Gleichung kann aufgefaſst werden als

$$f(m+1,s) = \Phi(m,s)+f(m,s-1)$$

und giebt dann nach (2.) des §. 4.

$$k|(p-m+\sigma+q(s-\sigma))(m-\sigma)_{s-\sigma} = (m+1)_s-(m+1-k)_{s-k}$$

oder, wenn man $m-1$ statt m, $m-s-1$ statt s und $k=m$ setzt, und die Reihe rückwärts nimmt,

$$7.\quad m|(p-sq+(q-1)\sigma)\sigma_{s-\sigma} = m_{m-s-1}$$

Diese Gleichung zeigt eine zurücklaufende Bildungsweise der Coefficienten der Reihe (3.) an, da nemlich der letzte derselben, oder σ_σ, gleich Eins ist.

Für $s = 0$ erhält man z. B. den vorletzten Coefficienten

$$m_{m-1} = m|(p + (q-1)^{\sigma}) = mp + (q-1)\frac{(m, -1)^2}{2}$$

und ähnlich ließen sich alle vorhergehenden berechnen; aber das Gesetz der entstehenden Reihe würde auf diese Weise nicht zugleich auch klar werden. Wir schlagen daher einen anderen Weg ein. Hat man nemlich eine Gleichung von der Form

$$8. \quad v|\varphi(\sigma, a) f(\sigma, b) = x f(v, b+m) + y f(v, b+n)$$

multiplicirt sie mit $\varphi(v, a+1)$ und nimmt die Summe nach v, so entsteht

$$v|\{\varphi(\sigma, a+1) . v|\{\varphi(\sigma, a) f(\sigma, b)\}\} = x . v|\{\varphi(\sigma, a+1) f(\sigma, b+m)\} + y . v|\{\varphi(\sigma, a+1) f(\sigma, b+n)\}$$

Diese Gleichung kann wieder mit $\varphi(v, a+2)$ multiplicirt und dann nach v summirt werden; man erhält auf diese Weise

$$v|\{\varphi(\sigma, a+2) . v|\{\varphi(\sigma, a+1) . v|\{\varphi(\sigma, a) f(\sigma, b)\}\}\}$$
$$= x . v|\varphi(\sigma, a+2) . v|\{\varphi(\sigma, a+1) f(\sigma, b+m)\}\} + y . v|\{\varphi(\sigma, a+2) . v|\{\varphi(\sigma, a+1) f(\sigma, a+n) f(\sigma, b+1)\}\}$$

Bezeichnet man nun die linke Seite dieser Gleichung durch $v|\{\varphi(\sigma, \acute{a}) f(\sigma, b)\}^3$, so muſs die ganze Gleichung geschrieben werden:

$$v|\{\varphi(\sigma, \acute{a}) f(\sigma, b)\}^2 = x . v|\{\varphi(\sigma, \acute{a}+1) f(\sigma, b+m)\}^2 + y . v|\{\varphi(\sigma, \acute{a}+1) f(\sigma, b+n)\}^2$$

Nach und nach kann man nun, wie leicht ersichtlich ist, ganz allgemein erhalten.

$$9. \quad v|\{\varphi(\sigma, \acute{a}) f(\sigma, b)\}^k = x . v|\{\varphi(\sigma, \acute{a}+1) f(\sigma, b+m)\}^{k-1} + y . v|\{\varphi(\sigma, \acute{a}+1) f(\sigma, b+n)\}^{k-1}$$

und faſst man diese Gleichung auf als

$$F(k, a, b) = x . F(k-1, a+1, b+m) + y . F(k-1, a+1, b+n)$$

so läſst sie sich nach §. 6., (9.) in eine Reihe von $k+1$ Gliedern entwickeln, wodurch die Summenzeichen auf der rechten Seite wegfallen.

Hat man nur

$$10. \quad v|\varphi(\sigma, n) f(v, n+1) = f(v, n+1)$$

so ist ist für $n = 0$

$$v|\varphi(\sigma, 0) f(\sigma, 0) = f(v, 1)$$

für $n = 1$

$$v|\varphi(\sigma, 1) f(\sigma, 1) = v|\{\varphi(\sigma, 1) . v|\{\varphi(\sigma, 0) f(\sigma, 0)\}\} = v|\{\varphi(\sigma, \acute{0}) f(\sigma, 0)\}^2 = f(v, 2)$$

und allgemein

$$11. \quad v|\{\varphi(\sigma, \acute{0}) f(\sigma, 0)\}^n = f(v, n)$$

Also ist aus (7.), weil $\sigma_\sigma = 1$ ist,

$$12. \quad m|\{p - \acute{0} q + (q-1)\sigma)\}^k = m_{m-k}$$

Man findet nun bald, dafs

$$13.\quad m\|(a+\sigma b)\left(\frac{\sigma,-1}{1,+1}\right)^n = (a+nb)\left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^{n+1} + (n+1)\,b\left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^{n+2}$$

Nach (9.) läfst sich diese Gleichung verwandeln in:

$$m\left\|\left\{(\acute{a}+\sigma b)\left(\frac{\sigma,-1}{1,+1}\right)^n\right\}^k\right.$$

$$=(a+nb).\,m\left\|\left\{(\acute{a}+1+\sigma)\left(\frac{\sigma,-1}{1,+1}\right)^{n+1}\right\}^{k-1}\right. + (n+1)b.\,m\left\|\left\{(\acute{a}+1+\sigma)\left(\frac{\sigma,-1}{1,+1}\right)^{n+2}\right\}^{k-1}\right.$$

oder in

$$F(k,a,n) = (a+nb)\,F(k-1,a+1,n+1)+(n+1)\,b\,F(k-1,a+1,n+2)$$

und diese Formel giebt, nach §. 6. (9.), wenn man die Werthe von F setzt,

$$14.\quad m\left\|\left\{(\acute{a}+\sigma b)\left(\frac{\sigma,-1}{1,+1}\right)^n\right\}^k\right. = (k+1\|(a+(k-\sigma\downarrow k)+b(n+(k-\sigma\downarrow k)+[k-\sigma\downarrow 1+\sigma]))$$
$$\times(n+1+(\sigma\uparrow k)+(0+1)^\sigma)\,b^\sigma\left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^{n+\lambda+\sigma}$$

Für $n=0$, $\acute{a}=p-\acute{\delta}.q$ und $b=q-1$ findet sich also

$$m\|\{(p-\acute{\delta}.q+(q-1)\sigma)\}^k$$
$$=(k+1\|(p\cdot(0\downarrow+1)^{k-\sigma}+(q-2)[k-\sigma\downarrow 1+\sigma])((\sigma\uparrow k)+(1\uparrow+1)^\sigma)(q-1)^\sigma\left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^{k+\sigma} = m_{m-k}$$

folglich durch Vergleichung mit (3.)

$$15.\quad (p-(0\downarrow+1)^k+(q-1)[k\downarrow 1+m-k])$$
$$=(k+1\|(p-(0\downarrow+1)^{k-\sigma}+(q-2)[k-\sigma\downarrow 1+\sigma]((\sigma\uparrow k)+(1\uparrow+1)^\sigma)(q-1)^\sigma\left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^{k+\sigma}$$

Wir haben so den Coefficienten der Entwickelung (3.) durch eine Reihe ausgedrückt, welche für besondere Werthe von p und q eine einfache Gestalt annimmt, und merkwürdige Relationen zwischen Combinationen und Factoriellen wahrnehmen läfst. Für $q=2$ ist hiernach

$$16.\quad (p+[k\downarrow 1+m-k]-(0\downarrow+1)^k)=(k+1\|((\sigma\uparrow k)+(1\uparrow+1)^\sigma)(p,-1)^{k-\sigma}\left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^{k+\sigma}$$

Für $p=0$ verschwinden auf der rechten Seite dieser Gleichung alle Glieder bis auf das letzte, wo $\sigma=k$ geworden ist, und man erhält

$$([k\downarrow m-k+1]-(0\downarrow+1)^k) = ((k\uparrow k)+(1\uparrow+1)^k)\left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^{2k}$$

Es ist aber

$$((k\downarrow k)+(1\downarrow+1)^k) = (0+1)(1+2)(2+3)(3+4)\ldots.(k-1+k) = (1,+2)^k$$

also

$$17.\quad ([k\downarrow m-k+1]-(0\downarrow+1)^k) = (1,+2)^k\left(\frac{m,-1}{1,+1}\right)^{2k} = \frac{(m,-1)^{2k}}{(2,+1)^k}$$

z. B.

$$([3 \downarrow 4] - (0 \downarrow +1)^3) = \begin{array}{lll} 1-0.1-1.1-2 = & 1.0.-1 = & 1 = 15 \\ 1-0.1-1.2-2 & 1.0.0 & 2 \\ 1-0.1-1.3-2 & 1.0.1 & 2 \\ 1-0.2-1.2-2 & 1.1.0 & 4 \\ 1-0.2-1.3-2 & 1.1.1 & 6 \\ 1-0.3-1.3-2 & 1.2.1 & \\ 2-0.2-1.2-2 & 2.1.0 & \\ 2-0.2-1.3-2 & 2.1.1 & \\ 2-0.3-1.3-2 & 2.2.1 & \\ 3-0.3-1.3-2 & 3.2.1 & \end{array}$$

$$= \frac{(6,-1)^6}{(2,+2)^3} = \frac{6.5.4.3.2.1}{2.4.6}$$

Die Entwickelung (3.) selbst nimmt nun vermöge (17.) für $p = 0$ und $q = 2$ die Gestalt an

$$18.\quad \frac{\partial^m}{\partial x^m}.(1+x^2)^n = (m+1 \Big| \frac{(m,-1)^{2\sigma}}{(2,+2)^\sigma}(n,-1)^{m-\sigma}2^{m-\sigma}x^{m-2\sigma}(1+x^2)^{n-m+\sigma}$$

$$= (n,-1)^m 2^m x^m (1+x^2)^{n-m} + \frac{(m,-1)^2}{(2,+1)}(n,-1)^{m-1}2^{m-1}x^{m-2}(1+x^2)^{n-m+1}$$

$$+ \frac{(m,-1)^4}{(2,+2)^2}(n,-1)^{m-2}2^{m-2}x^{m+1}(1+x^2)^{n-m+2} + \ldots.$$

II. Dem Differenziale (1.) kann die Gestalt

$$19.\quad \frac{\partial}{\partial x}.x^p(1+x^q)^n = p\,x^{p-1}(1+x^q)^{n-1} + (p+nq)\,x^{p+q-1}(1+x^q)^{n-1}$$

gegeben werden. Hieraus folgt

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}.x^p(1+x^q)^n = p\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}.x^{p-1}(1+x^q)^{n-1} + (p+nq)\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}.x^{p+q-1}(1+x^q)^{n-1}$$

und nach §. 6. (9.)

$$20.\quad \frac{\partial^m}{\partial x^m}.x^p(1+x^q)^n = (m+1 \| (p-(0 \downarrow +1)^{m-\sigma}$$

$$+(q-1)[m-\sigma \downarrow 1+\sigma])(p-r(\sigma \uparrow m)-q[\sigma \uparrow m+1-\sigma]+nq)x^{p-m+q\sigma}(1+x^q)^{n-m}$$

oder nach der angegebenen kürzeren Schreibart

$$21.\quad \frac{\partial^m}{\partial x^m}.(1+x^q)^n = (m+1 | m_\sigma x^{p-m+q\sigma}(1+x^q)^{n-m}$$

Differenzirt man diese Gleichung, so kommt

$$22.\quad \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}}.x^p(1+x^q)^n =$$

$$(m+2 | \{(p-m+q\sigma)m_\sigma + (p-m+q\sigma+q(n-m-1)m_{\sigma-1}\}\,x^{p-m-1+q\sigma}(1+x^q)^{n-m-1}$$

Setzt man nun in (21.) $m+1$ statt m und vergleicht die zu gleichen Potenzen von x gehörigen Coefficienten der entstehenden Reihe und der Reihe (22.), so ergiebt sich

$$23.\quad (m+1)_s = (p-m+qs)m_s + (p-m+qs+q(n-m-1)).m_{s-1}$$

Schreiben wir hier $m-s$ statt s und dividiren die ganze Gleichung durch $(p+qn-q-qs,-1)^{m+1}$, so entsteht

$$\frac{(m+1)_{m-s}}{(p+qn-q-qs,-1)^{m+1}} = \frac{p-m+qm-qs}{(p+qn-q-qs,-1)^{m+1}}.m_{m-s} + \frac{m_{m-s-1}}{(p+qn-q-qs,-s)^{m}}$$

oder

$$f(m) = \Phi(m) + f(m-1)$$

also nach §. 4., (2.), wenn man $m-1$ statt m setzt,

$$24.\quad m\Big|\frac{p+(q-1)\sigma-qs}{(p+qn-q-qs,-1)^{\sigma+1}}.\sigma_{\sigma-1} = \frac{m_{m-s-1}}{(p+qn-q-qs,-1)^{m}}$$

Weil sich nun aus (21.) sogleich ergiebt, dafs $m_m = (2n+p,-1)^m$, so läfst sich m_{m-k} aus (24.) finden. Bei dieser grofsen Allgemeinheit kann man aber kein einfaches Gesetz für m_{m-k} entdecken. Die Gleichung (24.) gewinnt indessen schon sehr an Einfachheit, wenn $q=2$ gesetzt wird, denn dann geht sie über in

$$25.\quad m\Big|\frac{p+\sigma-2s}{(p+2n-2-2s,-1)^{\sigma+1}}.\sigma_{\sigma-s} = \frac{m_{m-s-1}}{(p+2n-2-2s,-1)^{m}}$$

Aus §. 4., (16.) erhält man aber für $\alpha=\beta=1$

$$26.\quad k\Big|\frac{(a+\sigma,-1)^{n-1}}{(b-\sigma,-1)^{n+1}} = \frac{(a+k,-1)^n}{n(a+b-n+1)(b-k,-1)^n} - (k=0)$$

Diese Gleichung dient zur Summation von (25.), denn setzen wir dort zu erst $s=0$, so kommt, weil $\sigma_\sigma = (2n+p,-1)^\sigma$

$$m_{m-1} = m\Big|\frac{(2n+p-2,-1)^m(p+\sigma)}{(2n+p-2,-1)^{\sigma+1}}\sigma_\sigma = m\Big|\frac{(2n+p,-1)^{m+2}(p+\sigma,-1)^1}{(2n+p-\sigma,-1)^3}$$

$$= \frac{(2n+p,-1)^{m+2}}{2(2n+2p-1)}\left\{\frac{(p+m,-1)^2}{(2n+p-m,-1)^2} - (m=0)\right\}$$

Wenn wir für den Coefficienten m_{m-1} einen einfachen Ausdruck erhalten wollen, so müssen die Elemente so angenommen werden, dafs $(m=0)$ verschwindet. Dies geschieht in zwei Fällen, erstens wenn $p=0$ und dann wenn $p=1$ wird. Bei der ersten Annahme erhalten wir nach und nach

$$27.\quad m_{m-k} = (1,+1)^m\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^k\left(\frac{2n-2k,-1}{1,+1}\right)^{m-2k}$$

und bei der zweiten

$$28.\quad m_{m-k} = \frac{(2n,-1)^{m+1}(m+1,-1)^{2k}}{(2,+2)^k(2n-1,-2)^{k-1}} = \frac{(1,+1)^{m+1}}{m+1-2k}\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^k\left(\frac{2n+1-2k,-1}{1,+1}\right)^{m-2k}$$

Die Richtigkeit dieser Formeln wird sehr leicht vermöge der Gleichung (26.) durch den Schlufs von k auf $k+1$ bewiesen. Durch diese Werthe verwandelt sich nun (20.) in

$$29.\quad \frac{\partial^m}{\partial x^m}.(1+x^2)^n = (1,+1)^m(1+x^2)^{n-m}\left\{\left(\frac{2n,-1}{1,+1}\right)^m x^m \right.$$
$$\left. +\left(\frac{n,-1}{1,-1}\right)\left(\frac{2n-2,-1}{1,+1}\right)^{m-2} x^{m-2} + \left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^2\left(\frac{2n-4,-1}{1,+1}\right)^{m-4} x^{m-4} + \ldots\right\}$$

und in

$$30.\quad \frac{\partial^m}{\partial x^m}.x(1+x^2)^n = (1,+1)^{m+1}(1+x^2)^{n-m}\left\{\left(\frac{2n+1,-1}{1,+1}\right)^m \frac{x^{m+1}}{m+1} \right.$$
$$\left. +\left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^1\left(\frac{2n-1,-1}{1,+1}\right)^{m-2} \frac{x^{m-1}}{m-1} + \left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^2\left(\frac{2n-3,-1}{1,+1}\right)^{m-4} \frac{x^{m-2}}{m-2} + \ldots\right\}$$

Diese letztere Reihe ergiebt sich aber sogleich auch aus der ersten, weil

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}(1+x^2)^n = \frac{1}{2(n+1)}\,\partial^{m+1}(1+x^2)^{n+1}$$

Die Reihe (29.) findet **Lagrange** auf eine eigenthümliche Weise und in einer etwas veränderten Gestalt in den Abhandlungen der Berliner Academie vom Jahre 1774 p. 185. etc.

Die Vergleichung von (27.) und (28.) mit (30.) läfst wieder Relationen zwischen Combinationen und Factoriellen erkennen; so erhält man z. B. aus (28.)

$$31.\quad ([k \downarrow m-k+1]+(1\downarrow -1)^k)(2n-3[m-k\uparrow k+1]+(0\uparrow -1)^{m-k})$$
$$= \frac{(1,+1)^{m+1}}{m+1-2k}\left(\frac{n,+1}{1,+1}\right)^k\left(\frac{2n+1-2k,-1}{1,+1}\right)^{m-2k}$$

Setzt man hier $n = -1$, so ergiebt sich

$$32.\quad ([k\downarrow m-k+1]+(1\downarrow -1)^k)(3[m-k\uparrow k+1]+(1\uparrow +1)^{m-k})$$
$$= (-)^{m-k}(m+1,-1)^{2k}(m,-1)^{m-2k}$$

z. B.

$$([2\downarrow 3]+(1\downarrow -1)^2)(3[2\uparrow 3]+(1\uparrow +1)^2)$$

$$= \begin{array}{lll} 0+1.0+0\times 6+1.6+2 = & 1.0.7.8 = & 32 = 120 = (-)^0(5,-1)^4(4,-1)^0 = (5,-1)^4 \\ 0+1.1+0\times 3+1.6+2 & 1.1.4.8 & 40 \\ 0+1.2+0\times 3+1.3+2 & 1.2.4.5 & 16 \\ 1+1.1+0\times 0+1.6+2 & 2.1.1.8 & 20 \\ 1+1.2+0\times 0+1.3+2 & 2.2.1.5 & 12 \\ 2+1.2+0\times 0+1.0+2 & 3.2.1.2 & \end{array}$$

Die Brauchbarkeit der Gleichung (9.) des §. 6. fällt vielleicht dadurch am besten in die Augen, wenn ich bemerke, dafs sich z. B. in **Schweins** **Analysis** mit Hülfe derselben Einiges aus den 4 ersten Abhandlungen und fast Alles aus den 4 folgenden viel schneller und allgemeiner beweisen läfst als dort geschieht. Alle Sätze der neunten und letzten Abhandlung über die Summation der Reihen lassen sich nach dieser Gleichung fast ohne

alle Rechnung unmittelbar hinschreiben, sobald die Grundgleichungen vorbereitet sind. Den Mathematikern, welche **Schweins Theorie der Differenzen und Differenziale** kennen, wird es nicht entgehen, dafs die neunte Abhandlung der Analysis in jenem Werke von Wichtigkeit ist, und dafs also noch vielmehr die erwähnte Formel auch dort ihren Nutzen bewähren wird.

Wir stellen hier nur noch zur Übersicht die in diesem und im sechsten Paragraphen gefundenen combinatorischen Formeln in ihrer einfachsten Gestalt zusammen.

$$33.\quad [n \nmid m] + (0 \nmid +1)^n = (n \nmid n+m-1)$$

$$34.\quad [n \nmid m] - (0 \nmid +1)^n = \frac{(m-n, +1)^{2n}}{(2, +2)^n}$$

Die Addition beider giebt

$$35.\quad 2[n \nmid m] - (n \nmid n+m-1) = \frac{(m-n, +1)^{2n}}{(2, +2)^n}$$

und die Subtraction

$$(n \nmid n+m-1) - 2(0 \nmid +1)^n = \frac{(m-n, +1)^{2n}}{(2, +2)^n}$$

oder für $m-n+1$ statt m

$$36.\quad (n \nmid m) - (0 \nmid +2)^n = \frac{(m, -1)^{2n}}{(2, +2)^n}$$

§. 9.

Im §. 6. haben wir aus der Gleichung

$$f(x) = \varphi x . f(x+y) \pm \psi x . f(x+z)$$

fx in eine Reihe entwickelt, es bleibt nun noch übrig, die Form von fx durch φx und ψx zu bestimmen.

Hierher gehört z. B. die unabhängige Entwickelung des Zählers und Nenners eines Kettenbruchs. Ist nemlich

$$\frac{a_n}{b_n} = \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \ddots + \cfrac{1}{k_n}}}}$$

so hat man bekanntlich

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{k_n a_{n-1} + a_{n-2}}{k_n b_{n-1} + b_{n-2}}$$

Die Gleichungen $a_n = k_n a_{n-1} + a_{n-2}$ und $b_n = k_n b_{n-1} + b_{n-2}$ sind besondere Fälle der eben angegebenen Functionengleichung. Aus ihrer Entwickelung erhält man nach den früher festgesetzten Zeichen.

$$1.\quad a_n = \frac{2n+1-(-1)^n}{4} \Big| \{k_{(n-1-2\sigma \downarrow n-1-\sigma!2+\delta)+[n-1-2\sigma \downarrow 1+\sigma]}\}$$

$$2.\quad b_n = \frac{2n+3+(-1)^n}{4} \Big| \{k_{(n-2\sigma \downarrow n-\sigma!1+\delta)+[n-2\sigma \downarrow 1+\sigma]}\}$$

Der Zähler a_n besteht nemlich aus $\frac{2n+1-(-1)^n}{4}$ Gliedern und der Nenner b_n aus $\frac{2n+3+(-1)^n}{4}$. Um den Zähler zu erhalten, bildet man aus den Elementen 2, 3, 4, ... $n-\sigma$ die Combinationen ohne Wiederholungen zu je $n-1-2\sigma$, und aus den Elementen 0, 1, 2, ... σ die Combinationen mit Wiederholungen ebenfalls zu $n-1-2\sigma$, addirt dann die Zahlen der einander entsprechenden Combinationsstellen, und erhält so die Zeiger, welche dem k angehängt werden müssen. Ähnlich ist die Bildung des Nenners.

Um z. B. a_6 zu bilden, hat man aus (1.)

$$a_6 = 3 \Big| \{k_{(5-2\sigma \downarrow 5-\sigma!2+\delta)+[5-2\sigma \downarrow 1+\sigma]}\}$$

$$= k_{(5 \downarrow 5!2+\delta)+[5 \downarrow 1]} + k_{(3 \downarrow 4!2+\delta)+[3 \downarrow 2]} + k_{(1 \downarrow 3!2+\delta)+[1 \downarrow 3]}$$

$$= k_{23456+00000} + k_{\substack{234+000\\235+001\\245+011\\345+111}} + k_{\substack{2+0\\3+1\\4+2}} = k_{23456} + k_{\substack{234\\236\\256\\256}} + k_{\substack{2\\4\\6}}$$

oder

$$a_6 = k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 + k_2 k_3 k_4 + k_2 k_3 k_6 + k_2 k_5 k_6 + k_4 k_5 k_6 + k_2 + k_4 + k_6$$

Für den Nenner ergiebt sich aus (2.)

$$b_6 = 4 \Big| \{k_{(6-2\sigma \downarrow 6-\sigma!1+\delta)+(6-2\sigma \downarrow 1+\sigma)}\}$$

$$= k_{(6 \uparrow 6!1+\delta)+[6 \downarrow 1]} + k_{(4 \downarrow 5!1+\delta)+[4 \downarrow 2]} + k_{(2 \downarrow 4!1+\delta)+[2 \downarrow 3]}$$

$$+ k_{(0 \downarrow 3!1+\delta)+[0 \downarrow 4]} = k_{123456+000000} + k_{\substack{1234+0000\\1235+0001\\1245+0011\\1345+0111\\2345+1111}} + k_{\substack{12+00\\13+01\\14+02\\23+11\\24+12\\34+22}} + k_0$$

$$= k_{123456} + k_{\substack{1234\\1236\\1256\\146\\3456}} + k_{\substack{12\\14\\16\\34\\36\\56}} + 1 = k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 + k_1 k_2 k_3 k_4 + \dots + k_5 k_6 + 1$$

denn k_0 ist gleich 1 wie man aus den früheren Bestimmungen deutlich ersieht. Faſst man nun das ganze Verfahren zusammen, um die Zeiger des k für a_n zu bilden, so braucht man nur die Combinationen ohne Wiederholungen aus den Elementen 2, 3, 4, ... n zu je $n-1$, $n-3$, $n-5$, ... darzustellen, mit dem einzigen Unterschiede, daſs man jedes neu hinzuzufügende Element nicht um eine Einheit sondern um zwei Einheiten wachsen läſst. Für b_n entwickelt man ganz ähnlich nur die Combinationen ohne Wiederholungen aus den Elementen 1, 2, 3, ... n zu je n, $n-2$, $n-4$, und läſst jedes neue Element ebenfalls um zwei Einheiten wachsen.

Die Zeiger von k für a_7 und b_7 sind hiernach

234567	1234567
2345	12345
2347	12347
2367	12367
2567	12567
4567	14567
23	34567
25	123
27	125
45	127
47	145
67	147
0	167
	345
	347
	367
	567
	1
	3
	5
	7

12.

De compositione numerorum e quatuor quadratis.

(Auct. Dr. *C. G. J. Jacobi*, prof. ord. math. Regiom.)

In diario hoc Vol. III. pag. 191. sine demonstratione proposui olim theorema sequens:

„*Sit n datus numerus quilibet impar positivus, sint porro w, x,*
„*y, z numeri impares positivi, numerus solutionum aequationis*

$$4n = ww + xx + yy + zz,$$

„*aequatur summae factorum ipsius n.*"

Hoc theorema vel ipso intuitu liquet, comparando inter se formulas, quas in *Fund. Novis Theor. F. E.* demonstravi, pag. 106. (35.) et pag. 184. (7.). In gratiam autem virorum arithmeticorum, non advocatis evolutionibus analyticis, loco citato propositis, rem hic demonstrabo, unice profectus e theorematis, quae de compositione numerorum in duo quadrata circumferuntur. Quam demonstrationem sine magno negotio elicis ex analysi, qua usi sumus l. c. pag 109. Quod eo minus celo, quod aliis fortasse ansam praebere possit, methodum, qua in sequentibus utor, ulterius excolendi.

Utor in sequentibus theoremate auxiliari noto, seu quod e notis facile deducitur, sequente:

„*Si numeri primi omnes, qui datum numerum imparem n metiun-*
„*tur, forma $4m+1$ gaudent, numerus solutionum aequationis*

$$2n = yy + zz,$$

„*aequatur numero factorum ipsius n.*"

Idem erit numerus solutionum aequationis

$$2nQQ = yy + zz,$$

si numeri primi, qui numerum imparem Q metiuntur, omnes forma $4m+3$ gaudent. Neque enim huius aequationis aliae dantur solutiones, nisi quae e solutionibus aequationis praecedentis proveniunt, utroque numero y, z per Q multiplicato.

Dato numero impari quolibet p, quaeramus numerum factorum eius, qui formam $4m+1$ habent, et numerum factorum eius, qui formam $4m+3$ habent. Quem in finem, sicuti etiam in sequentibus, elementis

graecis sine plagula adiecta denotabimus numeros formae $4m+1$; plagula adiecta, numeros formae $4m+3$. Elementis latinis minusculis denotabimus perinde utriusque formae numeros impares; maiusculis numeros quoslibet impares aut pares. Omnes porro numeros accipimus positivos. Quae in sequentibus bene teneas.

Sit numerus p in factores inter se primos resolutus

$$p = \alpha^A \beta^B \gamma^C \dots \times \alpha'^{A'} \beta'^{B'} \gamma'^{C'} \dots;$$

notum est, obtineri factores omnes ipsius p per evolutionem producti

$$\begin{array}{l} 1+\alpha+\alpha^2 \dots +\alpha^A \\ 1+\beta+\beta^2 \dots +\beta^B \\ 1+\gamma+\gamma^2 \dots +\gamma^C \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 1+\alpha'+\alpha'^2 \dots +\alpha'^{A'} \\ 1+\beta'+\beta'^2 \dots +\beta'^{B'} \\ 1+\gamma'+\gamma'^2 \dots +\gamma'^{C'} \end{array}$$

Statuamus in hoc producto

$$\alpha = \beta = \gamma \dots = 1,$$
$$\alpha' = \beta' = \gamma' \dots = -1;$$

in evolutione producti singuli termini seu fiunt $+1$, si formam $4m+1$ habent, fiunt -1, si formam $4m+3$. Unde evadit valor producti idem atque excessus numeri factorum ipsius p formae $4m+1$ supra numerum factorum ipsius p formae $4m+3$. Invenitur autem valor producti.

$$(1+A)(1+B)(1+C)\dots\left(\frac{1+(-1)^{A'}}{2}\right)\left(\frac{1+(-1)^{B'}}{2}\right)\left(\frac{1+(-1)^{C'}}{2}\right)\dots,$$

qui est evanescens omnibus casibus, quibus non simul sunt omnes numeri A', B', C' .... pares; hoc autem casu fit ille

$$(1+A)(1+B)(1+C)\dots,$$

sive idem atque numerus factorum ipsius

$$\alpha^A \beta^B \gamma^C \dots$$

Hinc excessus assignatus est 0, nisi p formam habet

$$p = nQQ$$

ubi n est numerus impar, qui per alios numeros non dividitur, nisi qui formam $4m+1$ habent, Q numerus impar, qui per alios numeros primos non dividitur, nisi qui formam $4m+3$ habent; hoc autem casu excessus ille aequabit numerum factorum ipsius n. Hinc cum etiam discerptionem numeri $2p$ in duo quadrata imparia nullam dari constet, nisi p formam

assignatam habet, pro forma autem illa e theoremate auxiliari numerus solutionum aequationis

$$2p = yy+zz$$

idem sit atque numerus factorum ipsius n, theorema illud hoc modo enunciare licet:

„Dato quolibet numero p impari, numerus solutionum aequationis

$$2p = yy+zz$$

„idem est atque excessus numeri factorum ipsius p formae $4m+1$ supra „numerum factorum ipsius p formae $4m+3$."

Hoc theorema sponte patet, si *Fundamentorum* formulas pag. 103. (5.) et 184. (7.) inter se comparas. Ratiocinia antecedentia l. c. pag. 107. breviter indicavimus.

In sequentibus, ut numerum solutionum aequationis propositae denotemus, ipsam aequationem uncis includemus, iisque praefigemus characterem N. Ita significabimus ex. gr. numerum solutionum aequationis

$$2p = yy+zz$$

per signum

$$N[2p = yy+zz].$$

Hinc numerus factorum ipsius p, qui formam $4m+1$ habent, e significandi ratione supra a nobis proposita erit

$$N[p = a\alpha];$$

numerus factorum ipsius p, qui formam $4m+3$ habent, erit

$$N[p = a\alpha'].$$

Unde theorema propositum exhibere licet per formulam sequentem,

$$1.\quad N[2p = xx+yy] = N[p = a\alpha] - N[p = a\alpha'].$$

Iam ad discerptionem numeri $4p$ in quatuor quadrata imparia transeamus.

2.

Discerpamus datum numerum $2p$ omnibus modis, quibus fieri potest, in duos numeros impares p' et p'', ita ut sit

$$2.\quad 2p = p'+p''.$$

Deinde singulos $2p'$ et $2p''$ omnibus modis, quibus fieri potest, resolvamus, in duo quadrata, quae erunt imparia, ita ut sit

$$3.\quad 2p' = ww+xx, \quad 2p'' = yy+zz,$$

ideoque

$$4.\quad 4p = ww+xx+yy+zz.$$

Pro iisdem numeris p' et p'', in quos $2p$ discerpitur, est numerus solutionum aequationis huius (4.) aequalis producto e numero solutionum utriusque aequa-

tionis (3.); ideoque totus numerus solutionum aequationis (4.) aequivalet summae

$$\Sigma(N[2p' = ww+xx]N[2p'' = yy+zz]),$$

extensae ad valores numerorum p', p'' impares omnes, qui aequationi (2.) satisfaciunt. Iam e (1.) habetur:

$$N[2p' = ww+xx] = N[p' = a\alpha] - N[p' = a\alpha']$$
$$N[2p'' = yy+zz] = N[p'' = b\beta] - N[p'' = b\beta'].$$

Quibus in se ductis, nanciscimur productum, e quatuor terminis constans,

$$N[p' = a\alpha].N[p'' = b\beta] + N[p' = a\alpha'].N[p'' = b\beta']$$
$$-N[p' = a\alpha].N[p'' = b\beta'] - N[p'' = b\beta].N[p' = a\alpha'].$$

Habemus autem, si summam extendimus ad valores ipsorum p', p'' omnes, qui aequationi (3.) satisfaciunt:

$$\Sigma(N[p' = a\alpha]N[p'' = b\beta]) = N[2p = a\alpha + b\beta]$$
$$\Sigma(N[p' = a\alpha']N[p'' = b\beta']) = N[2p = a\alpha' + b\beta']$$
$$\Sigma(N[p' = a\alpha]N[p'' = b\beta']) = N[2p = a\alpha + b\beta']$$
$$\Sigma(N[p'' = b\beta]N[p' = a\alpha']) = N[2p = b\beta + a\alpha'].$$

Hinc prodit

$$5.\quad N[4p = ww+xx+yy+zz] =$$
$$N[2p = a\alpha + b\beta] + N[2p = a\alpha' + b\beta'] - N[2p = a\alpha + b\beta'] - N[2p = b\beta + a\alpha'].$$

In sequentibus brevitatis causa loco

$$N[2p = u]$$

simpliciter scribemus

$$N[u] = N[2p = u].$$

Porro ponemus numerum quaesitum solutionum aequationis propositae (4.),

$$N[4p = ww+xx+yy+zz] = N.$$

Quibus statutis, aequatio (5.) ita exhiberi potest:

$$6.\quad N = N[a\alpha + b\beta] + N[a\alpha' + b\beta'] - N[a\alpha + b\beta'] - N[b\beta + a\alpha'].$$

Observo, in hac expressione terminos duos negativos inter se aequales esse, cum alter ex altero prodeat, elementis a, b nec non α, β commutatis. Unde simplicius habes:

$$7.\quad \mathrm{N} = N[a\alpha + b\beta] + N[a\alpha' + b\beta'] - 2N[a\alpha + b\beta'].$$

Consideremus seorsim casus, quibus

$$\alpha = \beta;\quad \alpha' = \beta';$$

pro reliquis statuere licet $\beta > \alpha$, $\beta' > \alpha'$, si numerus eorum duplicatur. Hinc, si ponimus

$$\beta = \alpha + 4A,\quad \beta' = \alpha' + 4A,$$

aequationem (7.) ita repraesentare possumus:

$$8.\quad N = N[\alpha(a+b)] + N[\alpha'(a+b)] - 2N[a\alpha + b\beta'] + 2N[(a+b)\alpha + 4bA] + 2N[(a+b)\alpha' + 4bA].$$

Iam cum casus, quibus numerus formae $4m+1$ et quibus $4m+3$ est, omnes casus amplectuntur, quibus numerus est impar, in expressione antecedente binos terminos in unum contrahere licet, ita ut habeatur:

$$8.\quad N = N[(a+b)c] + 2N[(a+b)c + 4bA] - 2N[a\alpha + b\beta'].$$

Ponamus in termino secundo

$$c = d + 4AB,$$

ubi $d < 4A$, atque B aut 0 aut numerus quilibet positivus; erit

$$9.\quad N = N[(a+b)c] + 2N[(a+b)d + 4A(b + B(a+b))] - 2N[a\alpha + b\beta'].$$

Numeri autem

$$a+b,\quad b+B(a+b)$$

simul designare possunt, alter numerum quemlibet parem, alter numerum quemlibet imparem, idque unico tantum modo, sive datis illis, etiam a, b, B determinati erunt; unde statuere licet

$$a+b = 2C,\quad b+B(a+b) = e.$$

Quibus in secundo termino substitutis, habemus

$$10.\quad N = N[(a+b)c] + 2N[2Cd + 4Ae] - 2N[a\alpha + b\beta'],$$

ubi $d < 4A$.

Quod attinet tertium terminum, habemus

$$2N[a\alpha + b\beta'] = N[a\alpha + b\beta'] + N[a\beta' + b\alpha].$$

In expressione ad dextram rursus statuere licet $b > a$, siquidem simul valor duplicantur; casus $a = b$ locum habere non potest, cum expressiones uncis inclusae eo casu fierent per 4 divisibiles, numerus autem $2p$, cui aequantur, sit impariter par. Hinc si statuimus in expressione ad dextram:

$$b = a + 2C,$$

aequationem antecedentem hoc modo exhibere possumus,

$$11.\quad N[a\alpha + b\beta'] = N[a(\alpha+\beta') + 2\beta' C] + N[a(\alpha+\beta') + 2\alpha C]$$

sive posito

$$12.\quad \alpha + \beta' = 4A,$$

sequente modo:

$$13.\quad N[a\alpha + b\beta'] = N[2\alpha C + 4Aa] + N[2\beta' C + 4Aa],$$

ubi e (12.) fieri debent α et β' uterque $< 4A$. Terminos duos ad dextram eadem ratione, atque supra, in unum contrahere possumus

$$14.\quad N[a\beta + b\beta'] = N[2Cd + 4Aa],$$

ubi $d < 4A$. Qua aequatione substituta in (10.), termini secundus et tertius se invitem destruunt; unde simpliciter obtinetur:

$$15.\quad N = N[(a+b)c] = N[2p = (a+b)c].$$

In hac formula fieri potest c factor quilibet ipsius p, neque alios valores induere potest; unde posito $p = cf$, aequationis

$$16.\quad 2p = (a+b)c$$

solutiones omnes obtinentur, si pro quolibet ipsius p factore c omnibus modis, quibus fieri potest, resolvitur aequatio

$$2f = a+b.$$

Cuius dantur solutiones numero f. Unde pro quolibet valore ipsius c dantur aequationis (16.) solutiones numero $\frac{p}{c}$, unde numerus totus solutionum aequationis (16.) aequivalet summae factorum ipsius p. Hinc etiam e (15.) fit numerus quaesitus

$$N = N[4p = ww + xx + yy + zz]$$

aequalis summae factorum ipsius p. *Quod erat demonstrandum.*

Specimen tantum novae ac planae singularis methodi editurus, non agam hic de larga copia theorematum similium propositi, quae ex evolutionibus in *Fundamentis* traditis profluunt.

Scr. 14. Febr. 1834.

13.

Aequatio modularis pro transformatione functionum ellipticarum septimi ordinis.

(Auctore Dr. *C. Guetzlaff*, Prof. sup. in Gymnasio Mariaeinsulano.)

Satis notum est integrale huius formae

$$\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}.\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)}}$$

in aliud similis formae

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}.\sqrt{(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

transformari posse ope substitutionis huiusmodi,

$$y = \frac{U}{V} = \frac{x(a+a'.x^2+a''.x^4+\cdots\cdots+a^{(m)}.x^{2m})}{1+b'.x^2+b''.x^4+\cdots\cdots+b^{(m)}.x^{2m}} = \frac{x.F(x^2)}{\varphi(x^2)},$$

quae transformatio $(2m+1)^{ti}$ ordinis dicitur. In „*Fundamentis novis theoriae functionum ellipticarum*" Cl. Jacobi transformationem et tertii et quinti ordinis proposuit; hic transformationem septimi ordinis offerimus.

In libro laudato evictum est, aequationes:

$$V+U = (1+x)A.A$$
$$V+\lambda U = (1+\varkappa x)C.C,$$

ubi $A = 1+\alpha.x+\beta.x^2+\cdots\cdots+\vartheta.x^m$ et $C = 1+\alpha'.x+\beta'.x^2+\gamma' x^3\cdots\cdots+\vartheta' x^m$, alteram ex altera sponte sequi, siquidem U et V ita determinentur, ut loco x posito $\frac{1}{\varkappa.x}$, abeat $y = \frac{U}{V}$ in $\frac{1}{\lambda.y} = \frac{V}{\lambda.U}$, unde deducitur:

$$1.\quad x.F(x^2) = \sqrt{\left(\frac{\varkappa^{2m+1}}{\lambda}\right)}.x^{2m+1}.\varphi\left(\frac{1}{\varkappa^2.x^2}\right).$$

Ponamus:

$$y = \frac{x.F(x^2)}{\varphi(x^2)} = \frac{x.(a+a'.x^2+a''.x^4+a'''.x^6)}{1+b'.x^2+b''.x^4+b'''.x^6};$$

erit per aequationem $(A.)$:

$$x.(a+a'.x^2+a''.x^4+a'''.x^6) = \sqrt{\left(\frac{\varkappa^7}{\lambda}\right)}.x^7.\left(1+\frac{b'}{\varkappa^2.x^2}+\frac{b''}{\varkappa^4.x^4}+\frac{b'''}{\varkappa^6.x^6}\right);$$

unde nanciscimur, posito $\sqrt[4]{\varkappa} = u$, $\sqrt[4]{\lambda} = v$ et aequiparatis coëfficientibus aequalium potestatum ipsius x:

$$2.\quad\begin{cases} a\;\;\; = \sqrt{\left(\frac{1}{x^5.\lambda}\right)}.b''' = \frac{1}{u^{10}.v^2}\cdot b''' \\ a'\;\; = \sqrt{\left(\frac{1}{x.\lambda}\right)}.b'' = \frac{1}{u^2.v^2}\cdot b'' \\ a'' = \sqrt{\left(\frac{x^3}{\lambda}\right)}.b' \;\;\;= \frac{u^6}{v^2}\cdot b' \\ a''' = \sqrt{\left(\frac{x^7}{\lambda}\right)}. \;\;\;\;\;= \frac{u^{14}}{v^2}. \end{cases}$$

Ut vero $\frac{V+U}{1+x}$ quadratum complectum reddatur, sive ut aequatio:

$$1+a.x+b'.x^2+a'.x^3+b''.x^4+a''.x^5+b'''.x^6+a'''.x^7$$
$$= (1+x)(1+\alpha.x+\beta.x^2+\gamma.x^3)^2$$

locum habere possit, habemus aequationes conditionales has:

$$\begin{array}{ll} a \;\;= 1+2\alpha & \\ a' \;= \alpha^2+2\alpha.\beta+2\beta+2\gamma & b' \;= \alpha^2+2\alpha+2\beta \\ a'' = \beta^2+2\alpha.\gamma+2\beta.\gamma & b'' = \beta^2+2\alpha.\beta+2\alpha.\gamma+2\gamma \\ a''' = \gamma^2 & b''' = 2\beta.\gamma+\gamma^2; \end{array}$$

qui valores in aequationibus ($B.$) positi, praebent:

$$3.\quad 1+2\alpha = \frac{1}{u^2.v^{10}}\cdot(2\beta.\gamma+\gamma^2),$$

$$4.\quad \alpha^2+2\alpha.\beta+2\beta+2\gamma = \frac{1}{u^2.v^2}.(\beta^2+2\alpha.\beta+2\alpha.\gamma+2\gamma),$$

$$5.\quad \beta^2+2\alpha.\gamma+2\beta.\gamma = \frac{u^6}{v^2}\cdot(\alpha^2+2\alpha+2\beta),$$

$$6.\quad \gamma^2 = \frac{u^{14}}{v^2}.$$

Ex aequatione quarta et prima deducuntur:

$$\gamma = \frac{u^7}{v},$$

$$\beta = u^3.v^3.\alpha+\tfrac{1}{2}\frac{u^3}{v}\cdot(v^4-u^4);$$

quibus valoribus pro γ et β substitutis, secunda et tertia aequatio (4. et 3.) ita transformantur:

$$\alpha^2+\frac{\alpha.u.\{u^2.v^2.(v^4-u^4).(2-uv)-(v^4+u^4).(1-u^2v^2)\}}{v^2.(1+uv).(1-uv^3)}$$
$$= \frac{u^2.\{8u^2.v(1-u^2.v^2)-4v^2(v^4-u^4)+u.(v^4-u^4)^2\}}{4v^4(1+uv)(1-uv^3)}$$

$$\alpha^2-\frac{\alpha.\{v^4(v^4+u^4)-2.(1-u.v+u^2.v^2)\}}{1-v^8} = \frac{v.(v^4-u^4)^2-4u^3.(1-u.v).(v^4-u^4)}{4v.(1-v^8)};$$

unde subtracta altera aequatione ab altera, nanciscimur:

$$\alpha = \frac{\begin{matrix}(v^4-u^4)^3-2u.v^5(1+u^2.v^2).(v^4-u^4)^2-4u^4.v^4.(1+u^2.v^2)^2.(v^4-u^4)\\ -8u^3.v.(1-u^2.v^2)^2.(1+u^2.v^2)+16u^4.v^4.(v^4-u^4)\end{matrix}}{4v.\left\{\begin{matrix}2v^3.(1+u^8v^8)+4u^3.v^5.(1+u^4.v^4)-5u.v^4.(1+u^2.v^2)^2+u.(1+u^2.v^2).(u^4+3u^2.v^6+v^{12})\\ -v^2(u^8+v^8)\end{matrix}\right\}}.$$

Si vero in iisdem aequationibus (4. et 5.) valorem ipsius α ponimus, qui ex aequatione (3.) trahitur, simili calculo eruimus:

$$\beta = \frac{u^2.\left\{\begin{matrix}v^3.(u^4-v^4)^3-2u.(1+u^2.v^2).(u^4-v^4)^2-4v^3.(1+u^2.v^2)^2.(u^4-v^4)\\ -8u.v^3.(1-u^2.v^2)^2.(1+u^2.v^2)+16u^4.v^7(u^4-v^4)\end{matrix}\right\}}{4v.\left\{\begin{matrix}2v^3.(1+u^8.v^8)+4u^3.v^5(1+u^4.v^4)-5u.v^4.(1+u^2v^2)^2+u.(1+u^2v^2).(u^4+3u^2.v^6+v^{12})\\ -v^2.(u^8+v^8)\end{matrix}\right\}}.$$

Per hos valores pro α et β aequatio (5.) transit in sequentem:

$$\begin{aligned}(1-v^8).\{&v^{24}-8u^7.v^{23}+20u^6.v^{22}-8(7-8u^8).u^5.v^{21}+2(41-104u^8).u^4.v^{20}-8(7-44u^8+16u^{16}).u^3.v^{19}\\ &+4(5-68u^8+112u^{16}).u^2.v^{18}-8(1+20u^8+64u^{16}).u.v^{17}+(463-224u^8)\,u^8.v^{16}-16(10-77u^8).u^7.v^{15}\\ &-8(34+121u^8).u^6.v^{14}+16(22-61u^8+4u^{16}).u^5.v^{13}-4(52-559u^8+52u^{16}).u^4.v^{12}\\ &+16(4-61u^8+22u^{16}).u^3.v^{11}-8(121+34u^8).u^{10}.v^{10}+16(77-10u^8).u^9.v^9-(224-463u^8).u^8.v^8\\ &-8(64+20u^8+u^{16}).u^7.v^7+4(112-68u^8+10u^{16}).u^6.v^6-8(16-44u^8+7u^{16}).u^5.v^5\\ &-2(104-41u^8).u^{12}.v^4+8(8-7u^8).u^{11}.v^3+20u^{18}.v^2-8u^{17}.v+u^{24}\} = 0.\end{aligned}$$

Hanc aequationem post varia tentamina contigit in factores resolvere sequentes:

$$\begin{aligned}(1-v^8)(v^8-4u^6.v^6+6u^4.v^4-4u^2.v^2+u^8)^2.(&v^8-8u^7.v^7+28u^6.v^6-56u^5.v^5\\ &+70u^4.v^4-56u^3.v^3+28u^2.v^2-8u.v+u^8) = 0,\end{aligned}$$

quod productum aequationem modularem septimi ordinis contineat necesse est.

Verum primus factor, relationis causa, quae inter quantitates u et v poscitur, aequatio modularis esse nequit, in factore secundo inest aequatio modularis pro transformatione tertii ordinis, quod ex forma elucet, quam Cl. Jacobi in *Fund. nov.* §. 30. *pag.* 68. huic aequationi dedit. Ergo tertium factorem:

7. $v^8-8u^7.v^7+28u^6.v^6-56u^5.v^5+70u^4.v^4-56u^3.v^3+28u^2.v^2-8u.v+u^8 = 0$

esse aequationem modularem pro transformotione septimi ordinis concludere possumus, quae est gradus octavi, sicuti e theoria generali aequationum modularium fieri debet, nec non immutata manet, tum, ubi v loco u, loco v autem u ponitur tum ubi $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$ pro u et v scribimus.

Aequationem propositam elegantiorem formam induere posse neminem fugit. Licet enim sequenti modo eam scribere:

$$8.\quad (1-u^8).(1-v^8) = (1-u.v)^8$$

sive, posito:

$$1-u^8 = u'^8 = \varkappa'.\varkappa'$$
$$1-v^8 = v'^8 = \lambda'.\lambda'$$

sive:

$$u.v+u'.v' = \sqrt[4]{(\varkappa\lambda)}+\sqrt[4]{(\varkappa'.\lambda')} = 1,$$

qua ex forma correlatio elucet, quae inter modulos et complementa intercedit.

Faciliori negotio eadem aequatio per formulas analyticas probatur. In formulis enim (6.) et (8.) §i 23. *Fund. nov.* posito $n=7$ obtinemus:

$$\lambda = \varkappa^7.\left\{\sin\operatorname{coam}\frac{2w}{7}\cdot\sin\operatorname{coam}\frac{4w}{7}\cdot\sin\operatorname{coam}\frac{6w}{7}\right\}^4$$

$$\lambda' = \frac{k'^7}{\left\{\Delta\operatorname{am}\frac{2w}{7}\cdot\Delta\operatorname{am}\frac{4w}{7}\cdot\Delta\operatorname{am}\frac{6w}{7}\right\}^4}$$

cum vero sit:

$$\sin\operatorname{coam}u = \frac{\cos\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u}$$

eruitur:

$$\sqrt[4]{(\varkappa.\lambda)}+\sqrt[4]{(\varkappa'.\lambda')} = \frac{\varkappa.\varkappa.\cos\operatorname{am}\frac{2w}{7}\cdot\cos\operatorname{am}\frac{4w}{7}\cdot\cos\operatorname{am}\frac{6w}{7}+\varkappa'.\varkappa'}{\Delta\operatorname{am}\frac{2w}{7}\cdot\Delta\operatorname{am}\frac{4w}{7}\cdot\Delta\operatorname{am}\frac{6w}{7}}.$$

Iam, posito:

$$\operatorname{am}(a)=\alpha,\quad \operatorname{am}(b)=\beta,\quad \operatorname{am}(a+b)=\gamma,$$

habetur formula nota:

$$\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta.\Delta\gamma=\cos\gamma.$$

Unde, posito $K-a$, $K-b$ loco a, b, deducitur sequens:

$$\cos\alpha.\cos\beta.\Delta\gamma-\varkappa'.\varkappa'.\sin\alpha.\sin\beta = \Delta\alpha.\Delta\beta.\cos\gamma.$$

Hanc aequationem ducamus in $\Delta\gamma$, antecedentem in $\varkappa'.\varkappa'$; subtractione facta, cum sit

$$\Delta^2\gamma-\varkappa'.\varkappa' = \varkappa^2.\cos^2\gamma,$$

nanciscimur formulam memorabilem:

$$\varkappa^2.\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma = \Delta\alpha.\Delta\beta.\Delta\gamma-\varkappa'.\varkappa'.$$

Quam dedit Cl. Legendre (*Funct. Ell. Tom. III. pag.* 196.), de formulis generalioribus deductam. Hinc si ponimus:

$$\alpha=\operatorname{am}(a)=\operatorname{am}\left(\frac{2w}{7}\right),\quad \beta=\operatorname{am}(b)=\operatorname{am}\left(\frac{4w}{7}\right),\quad \gamma=\operatorname{am}(a+b)=\operatorname{am}\left(\frac{6w}{7}\right);$$

prodit:

$$\sqrt[4]{(\varkappa.\lambda)}+\sqrt[4]{(\varkappa'.\lambda')} = \frac{\varkappa\varkappa\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\varkappa'\varkappa'}{\Delta\alpha\Delta\beta\Delta\gamma} = 1.$$

Q. E. D.

Restat nunc, ut, ope aequationis modularis coefficientes α, β in formam concinniorem redigamus, et multiplicatorem M determinemus. Est vero (*Fund. nov.* §. 32.), pro casu $n=7$:

$$M.M = \tfrac{1}{7}\cdot\frac{\lambda.(1-\lambda.\lambda).\partial\varkappa}{\varkappa.(1-\varkappa.\varkappa).\partial\lambda} = \tfrac{1}{7}\cdot\frac{v.(1-v^8).\partial u}{u.(1-u^8).\partial v}.$$

Valorem coefficientis differentialis $\frac{\partial u}{\partial v}$ invenimus ex aequatione (8.):

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{u.(1-u.v)^7-v^7.(1-u^8)}{u^7.(1-v^8)-v.(1-u.v)^7},$$

quae fractio, multiplicatis et numeratore et denominatore per $(1-u.v)$, deinde posito valore ipsius $(1-u.v)^8$ ex aequatione (8.), transit in:

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{1-u^8}{1-v^8}\cdot\frac{u-v^7}{u^7-v},$$

unde deducitur:

$$9. \quad MM = \tfrac{1}{7}\cdot\frac{v(u-v^7)}{u(u^7-v)}.$$

Ponas in hac expressione pro numero 7, quod licet *),

$$7 = \frac{1-u^7.v^7-(1-u.v)^7}{u.v.(1-u.v).(1-u.v+u^2.v^2)^2},$$

aut multiplicato et numeratore et denominatore per $(1-u.v)$,

$$7 = \frac{(u-v^7).(u^7-v)}{u.v.(1-uv)^2.(1-u.v+u^2.v^2)^2},$$

accipis:

$$MM = \frac{v^2.(1-u.v)^2.(1-u.v+u^2.v^2)^2}{(v-u^7)^2};$$

ergo:

$$10. \quad M = \frac{v.(1-u.v).(1-u.v+u^2.v^2)}{v-u^7}.$$

Quod ad γ, jam ex aequatione (6.) notum est:

$$11. \quad \gamma = \frac{u^7}{v}.$$

Ut α determinemus, esse scimus (*Fund. nov.* §. 14.)

$$M = \frac{1}{a},$$

sive, cum sit $a = 1+2\alpha$:

$$M = \frac{1}{1+2\alpha},$$

ergo:

$$12. \quad \alpha = \frac{1}{M}-1 = \frac{u}{2v}\cdot\frac{u^2(v^4-u^4)+2u.v.(1-u.v)}{(1-u.v)(1-u.v+u^2.v^2)}.$$

Cujus valoris ope ex aequatione (3.) deducitur

$$13. \quad \beta = \frac{u^3}{2v}\cdot\frac{v^4-u^4+2u^5.v.(1-u.v)}{(1-u.v)(1-u.v+u^2.v^2)}.$$

Aequationibus (9.), (10.), (11.), (12.), (13.) omnia sunt data, quae in transformatione septimi ordinis desiderari possint.

---

*) Est enim identice: $(1-u.v)^7 = 1-u^7.v^7-7u.v(1-u.v)(1-u.v+u^2.v^2)^2$, quam aequationem nuper Cl. Lejeune Dirichlet in theoremate Fermatiano tractando prospere adhibuit. (v. hoc Diar. Tom. IX. pag. 390.)

14.

Aequationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum et undecimi et decimi tertii et decimi septimi ordinis.

(Auctore Dr. *L. A. Sohncke* Regiom.)

Commentatione commotus antecedente, quam Dr. Guetzlaff, quo amico intimo utor, mecum communicabat, in aequationum modularium naturam accuratius inquisivi; quo factum est, ut aequationes modulares pro transformationibus ordinum 11, 13, 17 invenirem, quas hic addere juvat. Deducendi vero ratio, a praecedente omnino aliena, analystis mox offeram.

Hae aequationes sunt:
pro transformatione undecimi ordinis:

$$(v-u)^{11}.(v+u)-22u.v(1+u^2).(1-v^2).\{(v^2+u^2)^2+4u^2.v^2.(1-u^2.v^2).(1-u^2).(1+v^2)\}$$
$$-32u.v(1+u^{10})(1-v^{10})+44u^2.v^2(v^4-u^4)(1-u^4)(1-v^4)=0$$

pro decimo tertio ordine:

$$(v-u)^{13}(v+u)-4uv(1+u^4)(1-v^4).\{3(v^2+u^2)^4+40u^2.v^2(v^2+u^2)^2+48u^4v^4$$
$$+16(1-u^4.v^4)(1-u^4)(1-v^4)\}=0$$

pro decimo septimo ordine:

$$(v-u)^{18}-16uv(1-u^8)(1-v^8).\{17uv(v-u)^6-(v^4-u^4)^2+16(1+u^4.v^4)^2\}=0.$$

Scr. mens. Jan. 1834. ad Univ. Regimontianam.

15.

Beantwortung der im 11ten Bande dieses Journals S. 200. vorgelegten Frage. No. 4.

(Von Herrn Dr. *F. Minding* zu Berlin.)

„Welche Form erhält ein vollkommen biegsamer und gleichmäfsig schwerer „Faden, welchen die Oberfläche einer absolut glatten Kugel trägt, durch „die Schwere, wenn die beiden Endpuncte des Fadens auf der Kugel be„festigt sind?"

Nach bekannten Grundsätzen der analytischen Mechanik erhält man zur Bestimmung der Lage eines biegsamen Fadens, auf einer gegebenen Fläche, deren Differentialgleichung in rechtwinkligen Coordinaten durch

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = 0$$

vorgestellt wird, die drei Gleichungen

$$d\left(t\frac{dx}{ds}\right) + qu\,ds + X\,ds = 0,$$

$$d\left(t\frac{dy}{ds}\right) + qv\,ds + Y\,ds = 0,$$

$$d\left(t\frac{dz}{ds}\right) + qw\,ds + Z\,ds = 0,$$

wenn X, Y, Z die Kräfte bedeuten, welche auf einen Punct des Fadens wirken, und t, q zwei unbestimmte Coefficienten sind, von denen der erste die Spannung des Fadens, der zweite den Druck, den die Fläche erleidet, anzeigt.

In dem vorgelegten Falle ist die Gleichung der Fläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

und, wenn x und y horizontal, z vertical genommen werden,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g.$$

Man erhält daher

$$d\left(t\frac{dx}{ds}\right) + qx\,ds = 0. \quad d\left(t\frac{dy}{ds}\right) + qy\,ds = 0. \quad d\left(t\frac{dz}{ds}\right) + qz\,ds + g\,ds = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen respective mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, und addirt sie, so kommt, weil $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ist,

$$dt + g\,dz = 0 \quad \text{oder} \quad t + gz = \text{const.}$$

Eliminirt man q aus den beiden ersten Gleichungen, so erhält man

$$yd\left(t\frac{dx}{ds}\right) = xd\left(t\frac{dy}{ds}\right),$$

oder, wenn man $t = -g(h+s)$ setzt,

$$yd\left(h+s\cdot\frac{dx}{ds}\right) = xd\left(h+s\cdot\frac{dy}{ds}\right).$$

Dieselbe Gleichung kann man auch erhalten, wenn man die Curve sucht, welche, auf einer Kugel befindlich, bei gegebener Länge den am tiefsten liegenden Schwerpunct hat, für welche daher das Integral $\int(h+s)ds$ (worinnen h eine Constante ist), in der ganzen Ausdehnung der Curve genommen, ein Maximum wird. Man erhält, wenn man x und y als abhängig von s betrachtet, durch Variation dieser Functionen die Gleichung:

$$d\left(h+z\cdot\frac{dx}{ds}\right)\delta x + d\left(h+s\cdot\frac{dy}{ds}\right)\delta y = 0.$$

Schafft man aus dieser, vermittelst der Gleichung

$$x\delta x + y\delta y = 0,$$

die Variationen hinweg, so folgt:

$$yd\left(h+s\cdot\frac{dx}{ds}\right) = xd\left(h+s\cdot\frac{dy}{ds}\right);$$

wie vorhin.

Die weitere Entwickelung ergiebt:

$$\left\{yd\left(\frac{dx}{ds}\right) - xd\left(\frac{dy}{ds}\right)\right\}(h+s) + \frac{y\,dx - x\,dy}{ds}\,ds = 0,$$

woraus als erstes Integral

$$(y\,dx - x\,dy)(h+s) + k\,ds = 0$$

hervorgeht, wenn k die Constante bezeichnet.

Zur weiteren Integration setze man $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$; alsdann wird $y\,dx - x\,dy = -r^2 d\varphi$; mithin geht die vorliegende Gleichung über in:

$$(h+s)r^2 d\varphi = k\,ds.$$

Ferner ist

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{ds^2}{1-s^2};$$

daher

$$(h+s)^2 r^4 d\varphi^2 = k^2\left\{r^2 d\varphi^2 + \frac{ds^2}{1-s^2}\right\},$$

$$r^2\{r^2(h+z)^2 - k^2\}\,d\varphi^2 = \frac{k^2 ds^2}{1-s^2};$$

folglich

$$d\varphi = \frac{k\,ds}{1-s^2.\sqrt{\{(1-s^2)(h+s)^2 - k^2\}}}$$

als Differentialgleichung der Curve eines auf einer Kugel ruhenden, gleichmäfsig schweren, biegsamen Fadens.

16.

De integralibus Abelianis primi ordinis commentatio prima.

(Auct. *F. Richelot*, prof. math. Regiom.)

Introductio.

Clarissimus Eulerus comparationem quantitatum transcendentium contentarum in forma:

$$\int\frac{Pdz}{\sqrt{(A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+Dz^4)}}$$

per eandem ipsius methodum peculiarem, qua ad comparationem huiusmodi transcendentium:

$$\int\frac{P\partial z}{\sqrt{(A+2Bz+Cz^2)}}$$

usus est, investigatam in sexto sectionis secundae institutionum calculi integralis capite exposuit. Dum vero haec integralia ad functiones circulares ac logarithmos reducuntur, aeque ac per illorum comparationem algebraicam illustris functionum ellipticarum theoriae theorema fundamentale exhibitum est, immortalis auctor, illas ipsius methodos ad alias transcendentes functiones, quae ab integralibus magis complexis dependeant, extendi non posse, pronuntiat. Ipse enim in problematis octagesimi scholion dicit:

„Formulae integrales magis complicatae, ubi post signum radicale
„altiores potestates ipsius z occurrunt, vel ipsum signum radicale
„altiorem dignatatem involvit, hoc modo non videntur inter se com-
„parari posse."

Idem in problematis octagesimi secundi schol. I. dicit:

„neque haec methodus ad alias formas magis complexas extendi posse
„videtur;"

et paulo postea:

„Facile autem patet, huiusmodi formam

$$\int\frac{\partial z}{\sqrt{(A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+Ez^4+2Fz^5+Gz^6)}}$$

„hac methodo tractari certe non posse; si enim coëfficientes ita essent
„comparati, ut radicis extractio succederet, talis formula:

$$\int \frac{\partial z}{a + bz + cz^2 + \partial z^3}$$

„prodiret, cuius integratio, cum tam logarithmos quam arcus circula-
„res involvat, fieri omnino nequit, ut plures huiusmodi functiones al-
„gebraice inter se comparentur."

Etiam Cl. Lagrange, quomodo theorema Eulerianum amplificaret, diu frustra tentavisse fertur. Per theorema igitur illustrissimum Abelianum primo summi Euleri investigationes de comparatione algebraica integralium, per aliam novam singularemque methodum sagacissimeque extensas esse intelligimus. Quod theorema vastum, integralia omnium functionum, inter quas et variabilem aequatio algebraica datur, amplectens, ad veram omnium integralium naturam investigandam prima fundamenta iecisse videtur. Ibi etiam, ut casus specialis, et theorema fundamentale functionum ellipticarum, et eius amplificationes, quas praeclari viri quaesiverunt, continentur. Casum specialem illum ad integralia formae:

$$1. \quad \int \frac{P\partial z}{\sqrt{(A + 2Bz + Cz^2 + Dz^3 \text{ etc. } + Mz^p)}}$$

spectantem in trigesima voluminis tertii commentatione proposuit, generale theorema in decima quarta voluminis quarti commentatione demonstravit autor celeberrimus.

Cl. Legendre defunctus, in tertii tomi ipsius „Traité des fonctions" elliptiques tertio supplemento, primus disquisitiones de integralibus formae, luculentas in publicum edidit, atque totam hanc theoriam, ut earum a clarissimo Abel acceptum heredium posteris geometris gravissime commendavit. Ipse loco citato theorema Abelianum denuo expositum ad nonnulla integralia specialis formae, ut:

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 \pm x^5)}}$$

adhibet, atque strenuissimo calculo persequitur. Nuper vero denique Cl. Jacobi, totam theoriam ad haec integralia spectantem maxime promovit. Ille enim in trigesima secunda voluminis IX. commentatione theorema Abelianum apud integralia formae (1.) ad vulgares leges fundamentales integrationis aequationum differentialium accommodavit, cum aequationes differentiales in medio posuerit, quarum totidem integralia completa algebraica, aeque ac relationes transcendentium, per theorema ipsum exhibeantur. Tum vero in analogiam functionum trigonometricarum arcus et amplitudinis, functiones, quarum inversa integralia Abeliana sunt,

in analysin introduxit. Quae functiones cum plures variabiles involvant, problema, quomodo ipsae argumentorum binominum algebraice per functiones, quae ad singula nomina pertinent, exhibeantur, per theorema Abelianum solutum esse demonstravit. Inde etiam sententia paradoxa Cl. Euleri de integralibus:

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+Ez^4+2Fz^5+Gz^6)}}$$

supra citata, facile expeditur. — In theoremate enim illo casu, quo functio sub signo radicali sextum ordinem haud superat, duabus relationibus transcendentalibus inter integralia ipsa, duae semper aequationes algebraicae inter argumenta integralium satisfaciunt. Illae inde prodeunt, quod numerator integralis primi ordinis qualescunque assumit coëfficientes, hae tales semper sunt, ut duo argumentorum radices aequationis quadraticae fiant, cuius coëfficientes cetera argumenta algebraice involvant. Quoties igitur transcendentes illae uti apud Eulerum locum habet, simul e parte logarithmica et parte trigonometrica conflantur, accidit, ut per duas illas aequationes algebraicas et pars logarithmica et pars trigonometrica in utraque aequatione transcendentali seorsim evanescant, ita ut una relatio inter logarithmos, altera inter arcus detur. E sagacissima vero observatione Euleriana ipsa haec memorabilis altiorum transcendentium praescriptarum natura divinari potuisset, cum coniectum esset, si qua daretur inter has comparatio, duabus, non una eam aequatione confici. —

Ceteris integralibus algebraicis magis complexae formae maximam ad partem missum factis, huiusmodi integralibus:

$$2.\quad \int \frac{(Fx)\,\partial x}{\sqrt{(A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+A_5x^5+A_6x^6)}}$$

ubi per Fx rationalis quaelibet argumenti x functio denotatur, reducendis, comparandis, transformandis, peculiari eorum naturae perscrutendae, abhinc annis quatuor et quod excurrit, nos totos fere dicavimus. Hoc integrale aeque ac hoc:

$$\frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{(A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+A_5x^5)}}$$

ad quod illud plerumque reducere licet, ad primum integralium Abelianorum ordinem pertinet, quippe quod transcendentes ad functiones ellipticas proximas procreat. Ipsi Cl. Abel singularem operam, altioresque dedicasse investigationes, ex ipsius epistola in vigesima octava voluminis quinti commentatione communicata, concludere licet.

Iam igitur primum nobis proposuimus haec integralia, quae hanc formam induunt:

$$3.\quad \int \frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{[(A+Bx+Cx^2)(A_1+B_1x+C_1x^2)(A_2+B_2x+C_2x^2)]}},$$

dum argumentum x inter quoslibet limites reales continetur, ad simpliciorem redigere formam. Posuimus igitur tres factores trinomios

$$A+Bx+Cx^2,\qquad A_1+B_1x+C_1x^2,\qquad A_2+B_2x+C_2x^2,$$

in lineares factores reales dissolvi posse, atque per substitutionem:

$$x=\frac{a+bz^2}{c+\partial z^2}$$

integrale (3.) in formam:

$$4.\quad \int \frac{\psi(z^2)\,\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)(1-\lambda^2z^2)(1-\mu^2z^2)]}}$$

ubi $\psi(z^2)$ rationalem ipsius z^2 functionem, atque $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 quos modulos vocamus, quantitates, quae >0 et <1 sunt, denotant, duodecim transformationibus reduximus. Adnotare iuvat, Cl. Eulerum in octagesimi secundi problematis schol. 1. eandem substitutionem, ad integrale ellipticum in formam:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(A+By^2+Cy^4)}}$$

commutandum, commendavisse. Duodecim vero transformationes ita comparatas esse demonstravimus, quarum per duas integralia (3.), dum argumentum x quolibet valore reali gaudeat, ad integralia (3.) reveniant, ita ut novum argumentum z^2 inter 0 et 1 contineatur; integrale igitur (3.) inter quoslibet limites reales sumtum, per aggregatum integralium huiusmodi:

$$\int_0^z \frac{\psi(z^2)\,\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)(1-\lambda^2z^2)(1-\mu^2z^2)]}}$$

ubi z unitatem haud superat, exprimitur. Quam transformationem integralis (3.), ad generaliora integralia Abeliana sine ulla difficultate translatam, una cum aliis disquisitionibus ac theorematibus quae adiiciendi occasionem habebimus, in hac prima commentatione invenis. Sub finem, quomodo integralia (4.), in tria genera principalia dividantur, ad quae functionibus algebraicis adiectis omnia cetera reveniant, exposuimus. Theorema Abelianum adhuc pro his integralibus demonstravimus, ut quali natura diversa genera discernantur, ostendatur.

Per inventam enim aequationem quadraticam, cuius radices duae argumenta duorum integralium, et cuius coefficientes ut ceterorum datorum argumentorum functiones algebraicae dantur, quippe quae aequatio

duarum aequationum algebraicarum inter omnia argumenta locum tenet, omnium trium generum integralia in binis aequationibus comparantur; integralia primi generis formae:

$$\int \frac{(A+Bz^2)\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-x^2z^2)(1-\lambda^2z^2)(1-\mu^2z^2)]}}$$

sine ulla functione adiecta; integralia secundi generis formae:

$$\int \frac{(Cz^4+Dz^6)\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-x^2z^2)(1-\lambda^2z^2)(1-\mu^2z^2)]}}$$

functione algebraica inter argumenta data, integralia denique tertii generis

$$\int \frac{\partial z}{\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right)\sqrt{[(1-z^2)(1-x^2z^2)(1-\lambda^2z^2)(1-\mu^2z^2)]}}$$

functione logarithmica inter argumenta data adiecta. Quae distributio in analogiam trium generum integralium ellipticorum redit.

Si eadem substitutio ad eos casus applicatur, ubi unus vel duo factores trinomii in lineares factores reales dissolvi nequeant, huiusmodi certe integralia adipisci possumus.

$$\int \frac{\psi(z^2)\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-x^2z^2)(M+Nz^2+Pz^4)]}},$$

$$\int \frac{\psi(z^2)\partial z}{\sqrt{[(M+Nz^2+Pz^4)(M_1+N_1z^2+P_1z^4)]}},$$

quorum illud per octo transformationes reales hoc per quatuor exhibetur; quibus abhibitis, dum argumentum x quolibet valore reali gaudet argumentum z^2 inter limites 0 et 1, binis pro eodem valore ipsius x, reducere licet. Si vero omnes tres illi factores trinomii imaginariis factoribus gaudent, transformatio ne ad formam antecedentem quidem per realem substitutionem fieri nequit. Ad aliud igitur his casibus confugiendum erat. Transformationis genus, ut integralia generalia formae (3.), dum argumentum x reali quolibet valore gaudet, ad formam (4.) reducamus. Hoc per substitutionem irrationalem, theoremate Abeliano adiuti, absolvimus. Qua adhibita, integralia formae (3.) inter quoslibet limites reales sumta, qualescunque factores trinomii sunt, per aggregatum integralium formae (4.) quorum argumenta inter 0 et 1 iacent exprimuntur. Quam integralis divisionem primum apud integralia a Cl. Legendre tractata, antea allata, animadvertimus, atque persecuti sumus.

Nuper denique inquirentibus nobis in praescriptae transformationis naturam memorabilem, novae atque quas diu frustra quaesivimus obvene-

runt substitutiones irrationales, ab aequatione quadratica pendentes, per quas integralia:

$$\int_0^z \frac{(M+Nz^2)\,\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)(1-\lambda^2 z^2)(1-\mu z^2)]}}$$

ad eandem ipsorum formam:

$$\int_0^y \frac{(M_1+N_1 y^2)\,\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2 y^2)(1-l^2 y^2)(1-m^2 y^2)]}}$$

reduximus, ubi novi moduli deinceps maiores aut minores, quam veteres fiunt. Haec transformatio rursus per divisionem integralis proposito peragitur. Inde sex substitutiones reales secundi ordinis, quae transformationibus realibus secundi ordinis apud integralia elliptica notissimis penitus respondent, emanant. Quarum qualibet repetita, modulis rapidissime ad nihilum aut ad unitatem decurrentibus, ad integralia nostra calculanda prima atque levissima via munita est, quam apud integralia definitum:

$$\int_0^1 \frac{(M+Nz^2)\,\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)(1-\lambda^2 z^2)(1-\mu^2 z^2)]}},$$

sine ulla integralis divisione persequi licet. Inde duplicationem integralis propositi pendere, iam alibi adnotatum est; quam transformationibus apte coniunctis, theoremate Abeliano adiutus inde derivare poteris.

Quae omnia, priusquam amplius accuratiusque pertractata geometris in altera commentatione proponamus, in hoc prooemio breviter adumbrasse sufficiat.

I.
De integralium Abelianorum transformatione rationali in genere.

Priusquam ad transformationem rationalem linearem integralium:

$$\int \frac{Fx.\partial x}{\sqrt{(A+A_1 x+A_2 x^2 \text{ etc. } +A_6 x^6)}}$$

ipsam aggrediamur, quippe quae ad generaliora integralia Abeliana facillime extenditur, per superioris ordinis substitutiones rationales transformationem similem fieri non posse, demonstremus.

Quem ad finem consideremus integrale generale:

$$\int \frac{Fx.\partial x}{\sqrt{(\varphi_p x)}},$$

ubi brevitatis causa posuimus:



$$\frac{A_0 + A_1 x + \text{etc.} + A_s x^r}{B_0 + B_1 x + \text{etc.} + B_r x^r} = Fx$$

$$C_1 + C_1 x + \text{etc.} + C_p x^p = \varphi_p x$$

atque ad quod integralia formae: $\int \frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{\left(\frac{\varphi_p x}{\varphi_q x}\right)}}$, nominatore denominatoreque per $\sqrt{(\varphi_q x)}$ multiplicatis, reducuntur.

Loco argumenti x rationali functione ipsius y substituta, transformationem inde prodeuntem rationalem nominemus. Iam vero in iis, quae sequuntur, de talibus transformationibus solis sermo erit, per quas functio sub signo radicali, prout numerus p par vel impar fuerit, ordinem $p$tum vel $(p+1)$tum haud superat. Iam vero hoc theorema proponimus:

Si numerus p numerum quatuor superat, atque aut $=2h$ aut $=2h-1$ ponitur, nec quantitates constantes C_0, C_1 etc. peculiaribus conditionibus subiiciantur, haec una substitutio rationalis formae: $x = \frac{a+by}{c+\partial y}$, datur, per quam integrale: $\int \frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{(\varphi_p x)}}$, in integrale formae:

$$\int \frac{F_1 y \,.\, \partial y}{\sqrt{(D + D_1 y + \text{etc.} + D_{2h} y^{2h})}}$$

transformatur.

Demonstratio.

Ponamus $x = \frac{U}{V}$, ubi per U, et V, functiones ipsius y integras ordinum vel ϱ et π vel π et ϱ, ita ut $\varrho \geqq \pi$ assumatur, denotamus. Qua functione in integrali $\int \frac{Fx\,dx}{\sqrt{(\varphi_p x)}}$ substituta, habemus:

$$\int \frac{[A_0 V^s + A_1 V^{s-1} U + \text{etc.} + A_s U^s]\, V^{r-s+\frac{p-4}{2}} (V \partial U - U \partial V)}{[B_0 V^r + B_1 V^{r-1} U + \text{etc.} + B_r U^r]\, \sqrt{[C_0 V^p + C_1 V^{p-1} U \text{ etc.} + C_p U^p]}}$$

Iam vero brevitatis causa functionibus fy et $\psi_{\varrho . p}\, y$ introductis, ita, ut ponatur:

$$\frac{A_0 V^s + A_1 V^{s-1} U + \text{etc.} + A_s U^s}{B_0 V^r + B_1 V^{r-1} U + \text{etc.} + B_r U^r} \,.\, V^{r-s} = fy,$$

atque:

$$C_0 V^p + C_1 V^{p-1} U + \text{etc.} + C_p U^p = \psi_{\varrho . p}\, y,$$

nec non indice $\varrho . p$ ordinem in quem functio ψ ascendat necesse est, denotante, ex formula ultima potestatibus ipsius (1.) fractis omnibus in denominatorem traductis, utroque casu $p = 2h$ et $p = 2h-1$ segregato, hae formulae evolvuntur:

$$1.\quad \int\frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{(\varphi^{2k}x)}} = \int\frac{fy.V^{h-2}(V\partial U - U\partial V)}{\sqrt{(\psi_{2\varrho h}y)}},$$

$$2.\quad \int\frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{(\varphi_{2h-1}x)}} = \int\frac{fy.V^{h-2}(V\partial U - U\partial V)}{\sqrt{(V.\psi_{(2h-1)\varrho}y)}}.$$

Inde fluit, ordinem functionis irrationalis ipsius (4.) in formula (1.) semper $2\varrho h$ fore, in formula vero (2.), prout functionis V ordo vel ϱ vel $\varkappa$ fuerit, ipsam vel $2h\varrho$ vel $(2h-1)\varrho+\varkappa$. Qui numerus, ut usque ad numerum p certe diminuatur, aut $\frac{r-p}{2}$ aut $\frac{r-p-1}{2}$ factores functionis $\psi_{2h\varrho}y$ vel $V.\psi_{(2h-1)\varrho}y$, totidem ibi singulos sibimet ipsis aequales inveniant, necesse est, adeo ut aut p aut $p-1$ factores sub signo radicali remaneant. Unde aut $\frac{r-p}{2}$ aut $\frac{r-p-1}{2}$ aequationes conditionum inter coëfficientes functionum U et V, quorum numerus $=\varrho+\varkappa+1$ est, emergere videntur. Accedit vero, ut inde tres coëfficientes indeterminati: si $\varrho=\varkappa$ est, duo, si $\varrho=\varkappa+1$, unus, si $\varrho=\varkappa+2$ est, excipiantur; id quod eo clarum fit, quod substitutione $y=\frac{\alpha+\beta y^1}{1+\gamma y^1}$ in formulis (1.) et (2.) introducta, si $\varrho=\varkappa$, nec numerus r, nec numerus $\varrho+\varkappa+1$ commutetur, et factores bini inter se aequales etiam inter se aequales maneant, sin $\varrho=\varkappa+1$, vel $=\varkappa+2$, idem efficiatur substitutionibus: $y=\beta y'$, et $y=\beta y'$. Ponamus igitur primum $\varrho=\varkappa$.

Functiones $\psi_{2\varrho h}y$ et $V.\psi_{(2h-1)}y_\varrho$, utraque ordinis $2h\varrho$ reddita, $(\varrho-1)h$ conditiones, ne ordo $2h$ superetur, suppeditant; unde derivatur, $(\varrho-1)h$ coëfficientes functionum U et V ita constitui posse, ut illis aequationibus satisfiat. — Harum coëfficientium numerus est $(2\varrho+1)-3 = 2\varrho-2$, quibus ad summum uti licet; ita ut hanc aequationem adipiscamur, ne indeterminatorum numerus datorum numerum superet, esto:

$$(\varrho-1)h \overline{\gtrless} 2\varrho-2,$$

sive:

$$(\varrho-1)(h-2)\overline{\gtrless} 0;$$

adeo ut, si $h>2$ est, $\varrho>1$ esse nequeat.

Ponamus deinde $\varrho>\varkappa$.

Sive ponitur: $p=2h$, simulque functio V alterius utrius ordinis: ϱ vel $\varkappa$, sive assumitur: $p=2h-1$ atque functio V ordinis ϱ, semper, ut ordo r usque ad $2h$ diminuatur, cum numerus coëfficientium $=\varrho+\varkappa-1$ sit, hanc conditionem habemus:

$$h(\varrho-1)\overline{\gtrless}\varrho+\varkappa-1,$$

sive:

$$(\varrho-1)(h-1) \overline{\gtrless} \pi;$$

unde sequitur, si $h>2$ sit, $\varrho>1$ esse non posse.

Contra si $p=2h-1$ atque V ordinis π assumitur, ϱ et π utroque paribus vel imparibus positis, conditionum numerus, ne ordo functionis sub signo radicali numerum $2h$ superet, fit $=\frac{(2h-1)\varrho+\pi-2h}{2}$, unde haec conditio derivatur, esto:

$$\frac{(2h-1)\varrho+\pi-2h}{2} \overline{\gtrless} \varrho+\pi-1,$$

sive:

$$(2h-3)(\varrho-1) \overline{\gtrless} \pi+1;$$

ita ut pro $h>2$, si $\varrho>\pi$ simul pares vel impares sint, $\varrho>1$ esse non possit. Altero vero casu, si $p=2h-1$, et V πti ordinis, sed ϱ et π alterum parem alterum imparem assumamus, conditionum numerus ille: $=\frac{(2h-1)\varrho+\pi-2h}{2}$ non integer est, hanc ob rem, hac suppositione omissa, quaeramus numne ordinem functionis sub signo radicali ad $(2h-1)$tum certe redigere possimus; tum hanc conditionem habemus, esto:

$$\frac{(2h-1)(\varrho-1)+\pi}{2} \overline{\gtrless} \varrho+\pi-1,$$

sive

$$(2h-3)(\varrho-1) \overline{\gtrless} \pi,$$

cui si $h>2$ et $\varrho>1$ satisfieri nequit.

Quibus omnibus collatis, concluditur, si $p>4$, atque $\varrho>1$ ponantur numerum conditionum, quae, ut functio sub signo radicali haud maioris ordinis fiat, quam $(2h-1)$ti vel $2h$ti, stare debent, maiorem esse, quam coefficientium in U et V, arbitrariorum numerum, ita ut una sola substitutis rationalis $x=\frac{a+by}{c+dy}$ adhiberi possit. q. e. d.

II.

De transformatione rationali integralium formae:

$$\int\frac{Fx\,dx}{\sqrt{(\varphi_6 x)}}, \text{ et} \int\frac{Fx\,dx}{\sqrt{(\varphi_5 x)}}.$$

Ponamus omnes factores lineares functionis $\varphi_6 x$ reales esse, ita ut sit:

1. $\varphi_6 x = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)(x-\alpha_6),$

ubi quantitates α_1, α_2, α_3 etc. in serie decrescente stant, ita ut differentiae $\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_2-\alpha_3$, etc. positivis gaudeant valoribus. Iam unam nostram substitutionum, ubi conditionum numerum evanescere clarum est, introducentes, coefficientes arbitrarios a, b, e, f, ad formam integralis propositi:

$$\int\frac{Fx\,dx}{\sqrt{(\varphi_6 x)}}$$

commutandam adhibeamus. Fiat igitur substitutione $x=\frac{a+by}{e+fy}$ introducta, $Fx=\psi y$; tum habemus:

$$dx=\frac{(be-af).dy}{(e+fy)^2},$$

$$x-\alpha_1=\frac{(a-e\alpha_1)+(b-f\alpha_1)y}{e+fy},$$

$$x-\alpha_2=\frac{(a-e\alpha_2)+(b-f\alpha_2)y}{e+fy},$$

etc.

$$x-\alpha_6=\frac{(a-e\alpha_6)+(b-f\alpha_6)y}{e+fy}.$$

Quibus congregratis, haec formula emergit:

$$2.\quad\int\frac{Fx.dx}{\sqrt{(\varphi_6 x)}}=\int\frac{(e+fy).\psi y.(be-af)dy}{\sqrt{((a-e\alpha_1)+(b-f\alpha_1)y)\ldots((a-e\alpha_6)+(b-f\alpha_6)y)}}.$$

Quantitates vero a, b, e, f semper ita determinare licet, ut sex factorum linearium novorum unus constantem valorem $=C_1$, alter formam $C_2 y$, tertius formam $C_3(1-y)$, ceterique tres formam $C(1-k^2y)$ induant, ubi $C_1\,C_2\,C_2$ constantes fiunt, atque $k^2>0$ et <1 redditur. Iis enim sex quantitatum α, quae tribus prioribus conditionibus satisfaciunt, deinceps per α_ν, α_μ, α_ϱ denotatis, habemus:

$$3.\quad\begin{cases}(a-e\alpha_\nu)+(b-f\alpha_\nu)y=C_1,\\(a-e\alpha_\mu)+(b-f\alpha_\mu)y=C_2 y\\(a-e\alpha_\varrho)+(b-f\alpha_\varrho)y=C_3(1-y);\end{cases}$$

unde sequuntur hae aequationes:

$$4.\quad\begin{cases}\frac{a}{e}=\alpha_\mu,\quad\frac{b}{e}=-\alpha_\nu\frac{\alpha_\mu-\alpha_\varrho}{\alpha_\nu-\alpha_\varrho},\quad\frac{f}{e}=-\frac{\alpha_\mu-\alpha_\varrho}{\alpha_\nu-\alpha_\varrho},\\\frac{C_1}{e}=\alpha_\mu-\alpha_\nu,\quad\frac{C_2}{e}=\frac{(\alpha_\mu-\alpha_\nu)(\alpha_\mu-\alpha_\varrho)}{\alpha_\nu-\alpha_\varrho},\quad\frac{C_3}{e}=\alpha_\mu-\alpha_\varrho.\end{cases}$$

Formula igitur quaesita fit:

$$5.\quad x=\frac{\alpha_\mu(\alpha_\nu-\alpha_\varrho)-\alpha_\nu(\alpha_\mu-\alpha_\varrho)y}{(\alpha_\nu-\alpha_\varrho)-(\alpha_\mu-\alpha_\varrho)y},$$

unde deducitur haec:

$$6.\quad y = \left(\frac{\alpha_\nu - \alpha_\varrho}{\alpha_\mu - \alpha_\varrho}\right)\left(\frac{x-\alpha_\mu}{x-\alpha_\nu}\right).$$

Iam vero ceterarum trium quantitatum α qualibet per α denotata, inde prodeunt hae formulae:

$$7.\quad (a - e\alpha) + (b - f\alpha)y = C(1 - c^2 y),$$

$$8.\quad c^2 = \left(\frac{\alpha_\mu - \alpha_\varrho}{\alpha_\nu - \alpha_\varrho}\right)\left(\frac{\alpha_\nu - \alpha}{\alpha_\mu - \alpha}\right),\quad \frac{C}{c} = \alpha_\mu - \alpha.$$

Fingamus vero nobis quantitates α_1, α_2, et α_6 in orbem inter se sequentes, ita ut α et α se excipiant, quantitate infinite magna positiva seu negativa interiacente. Inter duas igitur quaslibet ipsarum α duplum semper intervallum invenitur. Jam vero dico, ut conditioni $c^2 > 0$ et < 1 satisfiat, quantitatem α in eo intervallo inter α_ν et α_ϱ contineatur necesse esse ubi α_μ non jaceat. Clarum enim est, formulam ipsius c^2

$$= \left(\frac{\alpha_\mu - \alpha_\varrho}{\alpha_\nu - \alpha_\varrho}\right)\left(\frac{\alpha_\nu - \alpha}{\alpha_\mu - \alpha}\right),$$

ut functionem ipsius α tractatam, cum quantitate α continue crescente, ipsam continue crescere vel decrescere, quippe cuius nominator et denominator functiones lineares ipsius α sunt. Nonnisi pro $\alpha = \alpha_\mu$ hac formula in infinitum abeunte, et dum habeamus:

$$c^2 = 0,\quad c^2 = 1,\quad c^2 = \infty$$

deinceps

$$\alpha = \alpha_\nu,\quad \alpha = \alpha_\varrho,\quad \alpha = \alpha_\mu$$

reddito, iure concluditur, dummodo quantitas α in eo ipsarum α_ν et α_ϱ intervallo contineatur, ubi α_μ non inveniatur, cohaerentem modulum c^2 inter 0 et 1 iacere, sin α_μ et α in eodem intervallo contineantur, etiam cohaerentem modulum unitatem superare. Inde hae octo conditiones inter quantitates α_ϱ, α_μ, α_ν, α, in orbem se excipientes derivantur, quibus omnes quantitates α, tribus α_ϱ, α_μ, α_ν exceptis, satisfacere debent, ut omnes moduli >0 et <1 fiant:

$$A.\quad \begin{Bmatrix} \alpha > \alpha_\nu > \alpha_\mu > \alpha_\varrho \\ \alpha_\nu > \alpha_\mu > \alpha_\varrho > \alpha \\ \alpha_\mu > \alpha_\varrho > \alpha > \alpha_\nu \\ \alpha_\varrho > \alpha > \alpha_\nu > \alpha_\mu \end{Bmatrix},\qquad B.\quad \begin{Bmatrix} \alpha_\varrho > \alpha_\mu > \alpha_\nu > \alpha \\ \alpha > \alpha_\varrho > \alpha_\mu > \alpha_\nu \\ \alpha_\nu > \alpha > \alpha_\varrho > \alpha_\mu \\ \alpha_\mu > \alpha_\nu > \alpha > \alpha_\varrho \end{Bmatrix}.$$

Aut enim quantitates α, α_ν, α_μ, α_ϱ in orbem scriptae ita torquentur, ut, singula quaeque terminum fixum $\pm\infty$ transgressa ex maxima fiat minima; aut quantitates α_ϱ, α_μ, α_ν, α in orbem scriptas ita retro torquere licet, ut singula quaeque terminum eundem $\pm\infty$ transgressa, ex minima fiat maxima.

Iam igitur quantitates α_ϱ, α_μ, α_ν ita eligantur necesse est inter sex quantitates α, ut quaeque ceterarum cuiquam conditionum praescriptarum satisfaciat. Id quod, nonnisi aut α_ν, α_μ, α_ϱ aut α_ϱ, α_μ, α_ν sine intervallo per quantitates, α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6 in orbem scriptas producentes, adipisci possumus. Tum enim nonnisi tres quantitates α ceteras, inter α_ϱ et α_ν non una cum α_μ inveniri in priori ordine per formulas (*A.*), in altero per formulas (*B.*) intelligitur. Ut de magnitudine modulorum cuiusque substitutionis certiores fiamus, formulae:

$$c^2 = \frac{(\alpha_\mu - \alpha_\varrho)}{(\alpha_\nu - \alpha_\varrho)} \frac{(\alpha_\nu - \alpha)}{(\alpha_\mu - \alpha)}$$

ut functionis ipsius α consideratae differentiale primum sumamus, quod erit:

$$= \frac{(\alpha_\mu - \alpha_\varrho)(\alpha_\nu - \alpha_\varrho)(\alpha_\nu - \alpha_\mu)}{(\alpha_\nu - \alpha_\varrho)^2 (\alpha_\mu - \alpha)^2} d\alpha,$$

Hoc vero differentiale pro casibus classis (*A.*) i. e., si α_ν, α_μ, α_ϱ, per seriem α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6 prorsum percurrunt, dum quantitas α inter α_ν et α_ϱ continetur, semper *finito positivo* valore gaudebit. Unde sequitur functionem c^2, dum α in ipsius intervallo, ubi α_μ non iacet, ab α_ϱ usque ad α_ν migret, ipsam ab 1 usque ad 0 continue decrescere; si enim decrescere desineret, etiam differentiale $\frac{\partial c^2}{\partial \alpha}$ positivo valore gaudere desineret. Eodem modo idem differentiale pro casibus classis (*B.*), i. e. si α_ϱ, α_μ, α_ν per seriem illam protinus perducuntur, dum quantitas α inter α_ν et α_ϱ continetur, semper *finito negativo* valere gaudens, indicat, ibi functionem c^2, dum α in ipsius intervallo, ab α_ϱ usque ad α_ν migret, ipsam ab 1 usque ad 0 decrescere. Ergo in utraque classi modulus eo maior est, quo propius cohaerens quantitas α, in intervallo suo $\alpha_\varrho - \alpha_\nu$ ad quantitatem α_ϱ accedit.

Ex iis, quae praemissa sunt, sequitur, in classi (*A.*) semper licere ponere: $\alpha_\nu = \alpha_{\mu-1}$, $\alpha_\varrho = \alpha_{\mu+1}$, modulosque tres, $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 vocatos, fore ex formula (8.):

$$9. \quad \varkappa^2 = \left(\frac{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}}{\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+2}}{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+2}}\right), \quad \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}}{\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+3}}{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+3}}\right),$$

$$\mu^2 = \left(\frac{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}}{\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+4}}{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+4}}\right),$$

atque:

$$\varkappa^2 > \lambda^2 > \mu^2;$$

in classi vero (*B.*) poni posse: $\alpha_\nu = \alpha_{\mu+2}$, $\alpha_\mu = \alpha_{\mu+1}$, $\alpha_\varrho = \alpha_\mu$, modulosque tales esse:

$$10.\quad \varkappa^2 = \left(\frac{\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu}{\alpha_{\mu+2}-\alpha_\mu}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu-1}}{\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu-1}}\right),\quad \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu}{\alpha_{\mu+2}-\alpha_\mu}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu-2}}{\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu-2}}\right),$$
$$\mu^2 = \left(\frac{\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu}{\alpha_{\mu+2}-\alpha_\mu}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu-3}}{\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu-3}}\right)$$

atque:
$$\varkappa^2 > \lambda^2 > \mu^2,$$

dummodo loco ipsius α_{6+h} semper α_h, atque loco α_{-h}, semper α_{6-h} ponatur.

Jam vero nos ad argumenta x et y convertamus. Habuimus ex formulis (5.) et (6.)

$$y = \left(\frac{\alpha_\nu-\alpha_\varrho}{\alpha_\mu-\alpha_\varrho}\right)\left(\frac{x-\alpha_\mu}{x-\alpha_\nu}\right),\quad \text{atque} = c^2\left(\frac{\alpha_\mu-\alpha_\varrho}{\alpha_\nu-\alpha_\varrho}\right)\left(\frac{\alpha_\nu-\alpha}{\alpha_\mu-\alpha}\right);$$

unde videmus functionem y eandem esse argumenti x, quam $\frac{1}{c^2}$ ipsius α, ita ut x cum α commutato, habeamus $y = \frac{1}{c^2}$. Hinc sequitur, pro classi (*A.*), cum sit:

$$y = \left(\frac{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1}}{\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{x-\alpha_\mu}{x-\alpha_{\mu-1}}\right),\qquad \frac{1}{c^2} = \left(\frac{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1}}{\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\alpha-\alpha_\mu}{\alpha-\alpha_{\mu-1}}\right),$$

dum argumentum x hos valores induat:

11. $\begin{cases} \alpha_{\mu-1},\ \alpha_\mu,\ \alpha_{\mu+1},\ \alpha_{\mu+2},\ \alpha_{\mu+3},\ \alpha_{\mu+4},\ \alpha_{\mu-1}, \\ \text{argumentum (1.) his valoribus gaudere:} \\ -\infty,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{1}{\lambda^2},\ \frac{1}{\mu^2},\ +\infty; \end{cases}$

atque, cum differentiale ipsius y:

$$= \frac{(\alpha_\mu-\alpha_{\mu-1})(\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu+1})(\alpha_\mu-\alpha_{\mu-1})}{(\alpha_\mu-\alpha_{\mu-1})^2(x-\alpha_{\mu-1})^2}$$

in quoque sex intervallorum ipsius x, $\alpha_{\mu-1}-\alpha_\mu$, $\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1}$, etc., aeque ac ipsum y *continue* cum mutetur, adeoque valore negativo gaudeat, etiam argumentum y in ipsius intervallis continue crescere, dum x decrescat.

Eodem modo pro classi (*B.*) habemus:

$$y = \frac{(\alpha_{\mu+2}-\alpha_\mu)}{(\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu)}\left(\frac{x-\alpha_{\mu+1}}{x-\alpha_{\mu+2}}\right),\qquad \frac{1}{c^2} = \left(\frac{\alpha_{\mu+2}-\alpha_\mu}{\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu}\right)\left(\frac{\alpha-\alpha_{\mu+1}}{\alpha-\alpha_{\mu+1}}\right);$$

unde sequitur, dum argumentum x hos valores obtineat:

12. $\begin{cases} \alpha_{\mu+2},\ \alpha_{\mu+1},\ \alpha_\mu,\ \alpha_{\mu-1},\ \alpha_{\mu-2},\ \alpha_{\mu-3},\ \alpha_{\mu+2} \\ \text{argumentum } y \text{ hos induere valores:} \\ -\infty,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{\varkappa^2},\ \frac{1}{\lambda^2},\ \frac{1}{\mu^2},\ +\infty. \end{cases}$

atque, cum ipsius g differentiale:

$$= \frac{(\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu)(\alpha_{\mu+2}-\alpha_\mu)(\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu+2})}{(\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu)^2(x-\alpha_\mu)^2}$$

in quoque sex intervallorum ipsius x aeque ac ipsum y *continue* cum x

mutetur, adeoque positivo valore gaudeat, etiam y in ipsius intervallis respondentibus continue crescere, dum x crescat.

Quae cum ita sint, pro classi (A.), in formulis (4.) posito:

$$e = \alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1}, \quad \alpha_\nu = \alpha_{\mu-1}, \quad \alpha_\varrho = \alpha_{\mu+1},$$

habemus:

$$13. \quad a = \alpha_\mu(\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1}), \quad b = -\alpha_{\mu-1}(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}), \quad f = -(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}),$$

$$14. \quad C_1 = (\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1})(\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1}), \quad C^2 = (\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1})(\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1}),$$
$$C_3 = (\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1})(\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1}).$$

Eodem modo in formulis (8.) loco ipsius α: $\alpha_{\mu+2}$, $\alpha_{\mu+3}$, $\alpha_{\mu+4}$, introductis nanciscimur et formulas (9.) et has, loco C: C_4, C_5, C_6, posito:

$$15. \quad C_4 = (\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1})(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+2}), \quad C_5 = (\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1})(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+3}),$$
$$C_6 = (\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1})(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+4}).$$

Iam vero loco ipsius y argumentum z^2 introducere placet. Quo facto fit:

$$16. \quad x = \frac{\alpha_\mu(\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1}) - \alpha_{\mu-1}(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1})z^2}{(\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1}) - (\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1})z^2}, \quad z^2 = \frac{(\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1})}{(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1})}\left(\frac{x - \alpha_\mu}{x - \alpha_{\mu-1}}\right).$$

Ex formulis (13.) fit:

$$17. \quad (e + fy)(be - af)dy$$
$$= 2(\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1})(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1})(\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1})((\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1}) - (\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1})z^2)z\,dz$$

Ex formulis (13.), (14.), (15.), et (9.) sequitur:

$$18. \quad \begin{cases} (a - e\alpha_{\mu-1}) + (b - f\alpha_{\mu-1})y = (\alpha_{\mu+1} - \alpha_{\mu+1})(\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1}), \\ (a - e\alpha_\mu) + (b - f\alpha_\mu)y = (\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1})(\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1})\,z^2, \\ (a - e\alpha_{\mu+1}) + (b - f\alpha_{\mu+1})y = (\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1})(\alpha_{\mu+1} - \alpha_{\mu+1})(1 - z^2), \\ (a - e\alpha_{\mu+2}) + (b - f\alpha_{\mu+2})y = (\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1})(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+2})(1 - \varkappa^2 z^2), \\ (a - e\alpha_{\mu+3}) + (b - f\alpha_{\mu+3})y = (\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1})(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+3})(1 - \lambda^2 z^2), \\ (a - e\alpha_{\mu+4}) + (b - f\alpha_{\mu+4})y = (\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1})(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+4})(1 - \mu^2 z^2), \end{cases}$$

Quibus formulis in (2.) substitutis habemus:

$$19. \quad \int \frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)(x-\alpha_6)]}}$$
$$= \frac{2}{(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})\sqrt{[(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+2})(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+3})(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+4})]}} \int \frac{((\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})-(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1})z^2)\psi z^2 . \partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)(1-\lambda^2 z^2)(1-\mu^2 z^2)]}},$$

ubi quantitas α_μ quaelibet quautitatum α est, aequationibus (16.) relatio inter x et z^2 determinatur, aequationibus (9.) moduli $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, exprimuntur. Limites erunt:

$$20. \quad \begin{cases} x = \alpha_{\mu-1}, = \alpha_\mu, = \alpha_{\mu+1}, = \alpha_{\mu+2}, = \alpha_{\mu+3}, = \alpha_{\mu+4}, = \alpha_{\mu-1}, \\ z^2 = -\infty, = 0, = 1, = \frac{1}{\varkappa^2}, = \frac{1}{\lambda^2}, = \frac{1}{\mu^2}, = +\infty. \end{cases}$$

Pro classi (*B.*) **vero ponamus in formulis (4.)** $e=\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu}$, $\alpha_{\nu}=\alpha_{\mu+2}$, $\alpha_{\varrho}=\alpha_{\mu}$, **unde eadem ratione ac autea adipiscimur, loco ipsius** x **substituto** z^2**:**

$$22.\qquad x=\frac{\alpha_{\mu+1}(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+2})-\alpha_{\mu+2}(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+1})z^2}{(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+2})-(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+1})z^2},\qquad z=\frac{(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+2})}{(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+1})}\left(\frac{x-\alpha_{\mu+1}}{x-\alpha_{\mu+2}}\right),$$

$$(e+fy)(be-af)\partial y$$
$$=-2(\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu+2})(\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu})(\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu})\left((\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+2})-(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+1})z^2\right)z\,\partial z.$$

Formulisque (10.) adiuti. habemus:

$$\begin{aligned}
(a-e\alpha_{\mu+2})+(b-f\alpha_{\mu+2})y &= (\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu})(\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu+2}),\\
(a-e\alpha_{\mu+1})+(b-f\alpha_{\mu+1})y &= (\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu})(\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu+2})z^2,\\
(a-e\alpha_{\mu})\;+(b-f\alpha_{\mu})\;y &= (\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu})(\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu})\;(1-z^2),\\
(a-e\alpha_{\mu-1})+(b-f\alpha_{\mu-1})y &= (\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu})(\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu-1})(1-\varkappa^2z^2),\\
(a-e\alpha_{\mu-2})+(b-f\alpha_{\mu-2})y &= (\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu})(\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu-2})(1-\lambda^2z^2),\\
(a-e\alpha_{\mu-3})+(b-f\alpha_{\mu-3})y &= (\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu})(\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu-3})(1-\mu^2z^2).
\end{aligned}$$

Quibus formulis in (2.) introductis, habemus:

$$\int\frac{Fx.\partial x}{\sqrt{[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)(x-\alpha_6)]}}$$
$$=\frac{1}{(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+2})\sqrt{[(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+2})(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})(\alpha_{\mu-2}-\alpha_{\mu+1})(\alpha_{\mu-3}-\alpha_{\mu+1})]}}\int\frac{((\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+2})-(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+1})z^2).\psi z^2.\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)(1-\lambda^2z^2)(1-\mu^2z^2)]}},$$

ubi rursus quantitas α_{μ} **quaelibet quantitatum** α **est, aequationibus (21.) relatio inter** x **et** z^2**, aequationibusque (10.) moduli** $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, **determinantur. Limites erunt:**

$$23.\quad\left\{\begin{matrix} x=\alpha_{\mu+2}, & =\alpha_{\mu+1}, & =\alpha_{\mu}, & =\alpha_{\mu-1}, & =\alpha_{\mu-2}, & =\alpha_{\mu-3}, & =\alpha_{\mu+2}\\ z^2=-\infty, & =0, & =1, & =\frac{1}{\varkappa^2}, & =\frac{1}{\lambda^2}, & =\frac{1}{\mu^2}, & =\infty\end{matrix}\right\}.$$

Si loco indicis μ **et in classi** (*A.*) **et in classi** (*B.*) **ponamus 1, 2, 3, 4, 5, 6, sex utriusque classis transformationes accipimus, quas in sequentibus tabulis exposuimus. Ibi in prima singulae cuiusque substitutionis serie, omnes utriusque argumenti cohaerentes limites, in secunda formulae ipsae, in tertia factor:**

in classi (*A.*)

$$M=\frac{2((\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})-(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+1})z^2)}{(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+2})(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+3})(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+4})};$$

in classi (*B.*)

$$M=\frac{2((\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+2})-(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})z^2)}{(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+2})\sqrt{[(\alpha_{\mu}-\alpha_{\mu+2})(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})(\alpha_{\mu-2}-\alpha_{\mu+1})(\alpha_{\mu-3}-\alpha_{\mu+1})]}},$$

in quarta denique serie moduli $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, **ubi** $\varkappa>\lambda>\mu$ **est, leguntur. substitutionum qualibet adhibita, nanciscimur:**

$$24.\quad \int \frac{Fx.\partial x}{\sqrt{[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots.(x-\alpha_6)]}} = \int \frac{\pm M.\psi z^2 \partial}{\sqrt{[(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)(1-\lambda^2 z^2)(1-\mu^2 z^2)]}},$$

signo superiore pro positivo, inferiore pro negativo ipsius z valore, adhibito. Inde etiam transformationes integralis:

$$25.\quad \int \frac{Fx.\partial x}{\sqrt{[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots.(x-\alpha_5)]}}$$

in praescriptam formam derivantur. In aequatione (24.) enim ipsius Fx loco: ∞Fx posito, nec non $\alpha_6 = -\infty^2$ facto, quantitatibusque infinite parvis omissis, nanciscimur:

$$26.\quad \int \frac{\infty Fx.\partial x}{\sqrt{[(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)\dots.(x-\alpha_5)(x+\infty^2)]}} = \int \frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots.(x-\alpha\ )]}}$$

unde sequitur in formulis tabulae sequentis nonnisi $\alpha_6 = -\infty$ ponamus necesse esse, ut duodecim integralis (25.) transformationes accipiamus, limitesque argumenti x fore:

$$\infty^2,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ -\infty^2.$$

Classis *A*.

$$\text{I.}\quad \left\{\begin{matrix} x = \alpha_6 & = \alpha & = \alpha_2 & = \alpha_3 & = \alpha_4 & = \alpha_5 & = \alpha \\ z^2 = \infty & = 0 & = 1 & = \frac{1}{\varkappa^2} & = \frac{1}{\lambda^2} & = \frac{1}{\mu^2} & = +\infty^2 \end{matrix}\right\},$$

$$x = \frac{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_6)+\alpha_6(\alpha_1-\alpha_2)z^2}{(\alpha_2-\alpha_6)+(\alpha_1-\alpha_2)z^2},\quad z^2 = \left(\frac{\alpha_2-\alpha_6}{\alpha_1-\alpha_2}\right)\left(\frac{\alpha_1-x}{x-\alpha_6}\right),$$

$$M = \frac{2\sqrt{-1}\,((\alpha_2-\alpha_6)+(\alpha_1-\alpha_2)z^2)}{(\alpha_2-\alpha_6)\sqrt{[(\alpha_2-\alpha_6)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)]}},$$

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_6}\right)\left(\frac{\alpha_3-\alpha_6}{\alpha_1-\alpha_3}\right),\quad \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_6}\right)\left(\frac{\alpha_4-\alpha_6}{\alpha_1-\alpha_4}\right),\quad \mu^2 = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_6}\right)\left(\frac{\alpha_5-\alpha_6}{\alpha_1-\alpha_5}\right).$$

$$\text{II.}\quad \left\{\begin{matrix} x = \alpha_6 & = \alpha_1 & = \alpha_2 & = \alpha_3 & = \alpha_4 & = \alpha_5 & = \alpha_6 \\ z^2 = \frac{1}{\mu^2} & = \pm\infty^2 & = 0 & = 1 & = \frac{1}{\varkappa^2} & = \frac{1}{\lambda^2} & = \frac{1}{\mu^2} \end{matrix}\right\},$$

$$x = \frac{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_3)-\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)z^2}{(\alpha_1-\alpha_3)-(\alpha_2-\alpha_3)z^2},\quad z^2 = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_3}\right)\left(\frac{\alpha_2-x}{\alpha_1-x}\right),$$

$$M = \frac{2((\alpha_1-\alpha_3)-(\alpha_2-\alpha_3)z^2}{(\alpha_1-\alpha_3)\sqrt{[(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)(\alpha_2-\alpha_6)}},$$

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_3}\right)\left(\frac{\alpha_1-\alpha_4}{\alpha_2-\alpha_4}\right),\quad \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_3}\right)\left(\frac{\alpha_1-\alpha_5}{\alpha_2-\alpha_5}\right),\quad \mu^2 = \left(\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_3}\right)\left(\frac{\alpha_1-\alpha_6}{\alpha_2-\alpha_6}\right).$$

$$\text{III.}\quad \left\{\begin{matrix} x = \alpha_6 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 \\ z^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2} = \pm\infty^2 = 0 = 1 = \frac{1}{\varkappa^2} = \frac{1}{\lambda^2} \end{matrix}\right\},$$

$$x = \frac{\alpha_3(\alpha_2-\alpha_4)-\alpha_2(\alpha_3-\alpha_4)z^2}{(\alpha_2-\alpha_4)-(\alpha_3-\alpha_4)z^2},\quad z^2 = \left(\frac{\alpha_2-\alpha_4}{\alpha_3-\alpha_4}\right)\left(\frac{\alpha_3-x}{\alpha_2-x}\right),$$

$$M = \frac{-2\sqrt{-1}\,((\alpha_2-\alpha_4)-(\alpha_3-\alpha_4)z^2)}{(\alpha_2-\alpha_4)\sqrt{[(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)(\alpha_3-\alpha_6)(\alpha_1-\alpha_3)]}},$$

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\alpha_3-\alpha_4}{\alpha_2-\alpha_4}\right)\left(\frac{\alpha_2-\alpha_5}{\alpha_3-\alpha_5}\right),\quad \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_3-\alpha_4}{\alpha_2-\alpha_4}\right)\left(\frac{\alpha_2-\alpha_6}{\alpha_3-\alpha_6}\right),\quad \mu^2 = \left(\frac{\alpha_3-\alpha_4}{\alpha_2-\alpha_4}\right)\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_3}\right).$$

$$\text{IV.}\quad \left\{\begin{matrix} x = \alpha_6 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 \\ z^2 = \frac{1}{\varkappa^2} = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2} = \pm\infty^2 = 0 = 1 = \frac{1}{\varkappa^2} \end{matrix}\right\},$$

$$x = \frac{\alpha_4(\alpha_3-\alpha_5)-\alpha_3(\alpha_4-\alpha_5)z^2}{(\alpha_3-\alpha_5)-(\alpha_4-\alpha_5)z^2},\quad z^2 = \left(\frac{\alpha_3-\alpha_5}{\alpha_4-\alpha_5}\right)\left(\frac{\alpha_4-x}{\alpha_3-x}\right),$$

$$M = \frac{-2((\alpha_3-\alpha_5)-(\alpha_4-\alpha_5)z^2)}{(\alpha_3-\alpha_5)\sqrt{[(\alpha_3-\alpha_5)(\alpha_4-\alpha_6)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_4)]}},$$

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\alpha_4-\alpha_5}{\alpha_3-\alpha_5}\right)\left(\frac{\alpha_3-\alpha_6}{\alpha_4-\alpha_6}\right),\quad \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_4-\alpha_5}{\alpha_3-\alpha_5}\right)\left(\frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_4}\right),\quad \mu^2 = \left(\frac{\alpha_4-\alpha_5}{\alpha_3-\alpha_5}\right)\left(\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_4}\right).$$

$$\text{V.}\quad \left\{\begin{matrix} x = \alpha_6 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 \\ z^2 = 1 = \frac{1}{\varkappa^2} = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2} = \pm\infty^2 = 0 = 1 \end{matrix}\right\},$$

$$x = \frac{\alpha_5(\alpha_4-\alpha_6)-\alpha_4(\alpha_5-\alpha_6)z^2}{(\alpha_4-\alpha_6)-(\alpha_5-\alpha_6)z^2},\quad z^2 = \left(\frac{\alpha_4-\alpha_6}{\alpha_5-\alpha_6}\right)\left(\frac{\alpha_5-x}{\alpha_4-x}\right).$$

$$M = \frac{+2\sqrt{-1}\,((\alpha_4-\alpha_6)-(\alpha_5-\alpha_6)z^2)}{(\alpha_4-\alpha_6)\sqrt{[(\alpha_4-\alpha_6)(\alpha_1-\alpha_5)(\alpha_2-\alpha_5)(\alpha_3-\alpha_5)]}},$$

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\alpha_5-\alpha_6}{\alpha_4-\alpha_6}\right)\left(\frac{\alpha_1-\alpha_4}{\alpha_1-\alpha_5}\right),\quad \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_5-\alpha_6}{\alpha_4-\alpha_6}\right)\left(\frac{\alpha_2-\alpha_4}{\alpha_2-\alpha_5}\right),\quad \mu^2 = \left(\frac{\alpha_5-\alpha_6}{\alpha_4-\alpha_6}\right)\left(\frac{\alpha_3-\alpha_4}{\alpha_3-\alpha_5}\right).$$

$$\text{VI.}\quad \left\{\begin{matrix} x = \alpha_6 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 \\ z^2 = 0 = 1 = \frac{1}{\varkappa^2} = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2} = \pm\infty^2 = 0 \end{matrix}\right\},$$

$$x = \frac{\alpha_6(\alpha_1-\alpha_5)-\alpha_5(\alpha_1-\alpha_6)z^2}{(\alpha_1-\alpha_5)-(\alpha_1-\alpha_6)z^2},\quad z^2 = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_5}{\alpha_1-\alpha_6}\right)\left(\frac{\alpha_6-x}{\alpha_5-x}\right),$$

$$M = \frac{2((\alpha_1-\alpha_5)-(\alpha_1-\alpha_6)z^2)}{(\alpha_1-\alpha_5)\sqrt{[(\alpha_1-\alpha_5)(\alpha_2-\alpha_6)(\alpha_3-\alpha_6)(\alpha_4-\alpha_6)]}},$$

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_6}{\alpha_1-\alpha_5}\right)\left(\frac{\alpha_2-\alpha_5}{\alpha_2-\alpha_6}\right),\quad \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_6}{\alpha_1-\alpha_5}\right)\left(\frac{\alpha_3-\alpha_5}{\alpha_3-\alpha_6}\right),\quad \mu^2 = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_6}{\alpha_1-\alpha_5}\right)\left(\frac{\alpha_4-\alpha_5}{\alpha_4-\alpha_6}\right).$$

Classis *B*.

$$\text{I.}\quad \left\{\begin{array}{lllllllll} x = \alpha_6 & = \alpha_1 & = \alpha_2 & = \alpha_3 & & = \alpha_4 & = \alpha_5 & = \alpha_6 \\ z^2 = \frac{1}{\kappa^2} & = 1 & = 0 & = \mp\infty^2 & & = \frac{1}{\mu^2} & = \frac{1}{\lambda^2} & = \frac{1}{\kappa^2} \end{array}\right\},$$

$$x = \frac{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_3)-\alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)z^2}{(\alpha_1-\alpha_3)-(\alpha_1-\alpha_2)z^2},\quad z^2 = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_2}\right)\left(\frac{\alpha_2-x}{\alpha_3-x}\right),$$

$$M = \frac{-2\sqrt{-1}((\alpha_1-\alpha_3)-(\alpha_1-\alpha_2)z^2)}{(\alpha_1-\alpha_3)\sqrt{[(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)(\alpha_3-\alpha_6)]}},$$

$$\kappa^2 = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_3}\right)\left(\frac{\alpha_3-\alpha_6}{\alpha_2-\alpha_6}\right),\quad \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_3}\right)\left(\frac{\alpha_3-\alpha_5}{\alpha_2-\alpha_5}\right),\quad \mu^2 = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_3}\right)\left(\frac{\alpha_3-\alpha_4}{\alpha_2-\alpha_4}\right).$$

$$\text{II.}\quad \left\{\begin{array}{llllllll} x = \alpha_6 & = \alpha_1 & = \alpha_2 & = \alpha_3 & = \alpha_4 & & = \alpha_5 & = \alpha_6 \\ z^2 = \frac{1}{\lambda^2} & = \frac{1}{\kappa^2} & = 1 & = 0 & = \mp\infty^2 & & = \frac{1}{\mu^2} & = \frac{1}{\lambda^2} \end{array}\right\},$$

$$x = \frac{\alpha_3(\alpha_2-\alpha_4)-\alpha_4(\alpha_2-\alpha_3)z^2}{(\alpha_2-\alpha_4)-(\alpha_2-\alpha_3)z^2},\quad z^2 = \left(\frac{\alpha_2-\alpha_4}{\alpha_2-\alpha_3}\right)\left(\frac{x-\alpha_3}{x-\alpha_4}\right),$$

$$M = \frac{-2((\alpha_2-\alpha_4)-(\alpha_2-\alpha_3)z^2}{(\alpha_2-\alpha_4)\sqrt{[(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)(\alpha_3-\alpha_6)(\alpha_1-\alpha_3)]}},$$

$$\kappa^2 = \left(\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_4}\right)\left(\frac{\alpha_1-\alpha_4}{\alpha_1-\alpha_3}\right),\quad \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_4}\right)\left(\frac{\alpha_4-\alpha_6}{\alpha_3-\alpha_6}\right),\quad \mu^2 = \left(\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_4}\right)\left(\frac{\alpha_4-\alpha_5}{\alpha_3-\alpha_5}\right).$$

$$\text{III.}\quad \left\{\begin{array}{llllllll} x = \alpha_6 & = \alpha_1 & = \alpha_2 & = \alpha_3 & = \alpha_4 & = \alpha_5 & & = \alpha_6 \\ z^2 = \frac{1}{\mu^2} & = \frac{1}{\lambda^2} & = \frac{1}{\kappa^2} & = 1 & = 0 & = \mp\infty^2 & & = \frac{1}{\mu^2} \end{array}\right\},$$

$$x = \frac{\alpha_4(\alpha_3-\alpha_5)-\alpha_5(\alpha_3-\alpha_4)z^2}{(\alpha_3-\alpha_5)-(\alpha_3-\alpha_4)z^2},\quad z^2 = \left(\frac{\alpha_3-\alpha_5}{\alpha_3-\alpha_4}\right)\left(\frac{x-\alpha_4}{x-\alpha_5}\right),$$

$$M = \frac{2\sqrt{-1}((\alpha_3-\alpha_5)-(\alpha_3-\alpha_4)z^2)}{(\alpha_3-\alpha_5)\sqrt{[\alpha_3-\alpha_5\,\alpha_4-\alpha_6\,\alpha_1-\alpha_4\,\alpha_2-\alpha_4]}},$$

$$\kappa^2 = \left(\frac{\alpha_3-\alpha_4}{\alpha_3-\alpha_5}\right)\left(\frac{\alpha_2-\alpha_5}{\alpha_2-\alpha_4}\right),\quad \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_3-\alpha_4}{\alpha_3-\alpha_5}\right)\left(\frac{\alpha_1-\alpha_5}{\alpha_1-\alpha_4}\right),\quad \mu^2 = \left(\frac{\alpha_3-\alpha_4}{\alpha_3-\alpha_5}\right)\left(\frac{\alpha_5-\alpha_6}{\alpha_4-\alpha_6}\right).$$

$$\text{IV.}\quad \left\{\begin{array}{llllllll} x = \alpha_6 & & = \alpha_1 & = \alpha_2 & = \alpha_3 & = \alpha_4 & = \alpha_5 & = \alpha_6 \\ z^2 = \mp\infty^2 & & = \frac{1}{\mu^2} & = \frac{1}{\lambda^2} & = \frac{1}{\kappa^2} & = 1 & = 0 & = \pm\infty^2 \end{array}\right\},$$

$$x = \frac{\alpha_5(\alpha_4-\alpha_6)-\alpha_6(\alpha_4-\alpha_5)z^2}{(\alpha_4-\alpha_6)-(\alpha_4-\alpha_5)z^2},\quad z^2 = \left(\frac{\alpha_4-\alpha_6}{\alpha_4-\alpha_5}\right)\left(\frac{x-\alpha_5}{x-\alpha_6}\right),$$

$$M = \frac{2((\alpha_4-\alpha_6)-(\alpha_4-\alpha_5)z^2)}{(\alpha_4-\alpha_5)\sqrt{[(\alpha_4-\alpha_6)(\alpha_1-\alpha_5)(\alpha_2-\alpha_5)(\alpha_3-\alpha_5)]}},$$

$$\kappa^2 = \left(\frac{\alpha_4-\alpha_5}{\alpha_4-\alpha_6}\right)\left(\frac{\alpha_3-\alpha_6}{\alpha_3-\alpha_5}\right),\quad \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_4-\alpha_5}{\alpha_4-\alpha_6}\right)\left(\frac{\alpha_2-\alpha_6}{\alpha_2-\alpha_5}\right),\quad \mu^2 = \left(\frac{\alpha_4-\alpha_5}{\alpha_4-\alpha_6}\right)\left(\frac{\alpha_1-\alpha_6}{\alpha_1-\alpha_5}\right).$$

$$\text{V.}\quad \left\{\begin{matrix} x = a_6 & = a_1 & = a_2 & = a_3 & = a_4 & = a_5 & = a_6 \\ z^2 = 0 & = \mp\infty^2 & = \frac{1}{\mu^2} & = \frac{1}{\lambda^2} & = \frac{1}{\varkappa^2} & = 1 & = 0 \end{matrix}\right\},$$

$$x = \frac{\alpha_6(\alpha_1-\alpha_5)+\alpha_1(\alpha_5-\alpha_6)z^2}{(\alpha_1-\alpha_5)+(\alpha_5-\alpha_6)z^2},\quad z^2 = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_5}{\alpha_5-\alpha_6}\right)\left(\frac{x-\alpha_6}{\alpha_1-x}\right),$$

$$M = \frac{-2\sqrt{-1}\,((\alpha_1-\alpha_5)+(\alpha_5-\alpha_6)z^2)}{(\alpha_1-\alpha_5)\sqrt{[(\alpha_1-\alpha_5)(\alpha_2-\alpha_6)(\alpha_3-\alpha_6)(\alpha_4-\alpha_6)]}},$$

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\alpha_5-\alpha_6}{\alpha_1-\alpha_5}\right)\left(\frac{\alpha_1-\alpha_4}{\alpha_4-\alpha_6}\right),\quad \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_5-\alpha_6}{\alpha_1-\alpha_5}\right)\left(\frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_3-\alpha_6}\right),\quad \mu^2 = \left(\frac{\alpha_5-\alpha_6}{\alpha_1-\alpha_5}\right)\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_6}\right).$$

$$\text{VI.}\quad \left\{\begin{matrix} x = a_6 & = a_1 & = a_2 & = a_3 & = a_4 & = a_5 & = a_6 \\ z^2 = 1 & = 0 & = \mp\infty^2 & = \frac{1}{\mu^2} & = \frac{1}{\lambda^2} & = \frac{1}{\varkappa^2} & = 1 \end{matrix}\right\},$$

$$x = \frac{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_6)-\alpha_2(\alpha_1-\alpha_6)z^2}{(\alpha_2-\alpha_6)-(\alpha_1-\alpha_6)z^2},\quad z^2 = \left(\frac{\alpha_2-\alpha_6}{\alpha_1-\alpha_6}\right)\left(\frac{\alpha_1-x}{\alpha_2-x}\right),$$

$$M = \frac{2((\alpha_2-\alpha_6)-(\alpha_1-\alpha_6)z^2)}{(\alpha_2-\alpha_6)\sqrt{[(\alpha_2-\alpha_6)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)]}},$$

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_6}{\alpha_2-\alpha_6}\right)\left(\frac{\alpha_2-\alpha_5}{\alpha_1-\alpha_5}\right),\quad \lambda^2 = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_6}{\alpha_2-\alpha_6}\right)\left(\frac{\alpha_2-\alpha_4}{\alpha_1-\alpha_4}\right),\quad \mu^2 = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_6}{\alpha_2-\alpha_6}\right)\left(\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_3}\right).$$

Intervalla, in quibus argumenti x valor versatur, ita distinguamus, ut vocemus:

$$a_6 - a_1,\quad a_1 - a_2,\quad a_2 - a_3,\quad a_3 - a_4,\quad a_4 - a_5,\quad a_5 - a_6$$

respective primum, secundum, tertium, quartum, quintum, sextum integralis propositi intervallum; aeque ac intervalla valoris argumenti z^2 in hunc ordinem reducere placet, ut vocemus:

$$-\infty^2 - 0,\quad 0 - 1,\quad 1 - \frac{1}{\varkappa^2},\quad \frac{1}{\varkappa^2} - \frac{1}{\lambda^2},\quad \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\mu^2},\quad \frac{1}{\mu^2} - \infty^2,$$

respective primum, secundum, tertium, quartum, quintum, sextum integralis novi intervallum. Quibus positis ex antecedentibus hae regulae facillime deducuntur.

27. $h$tum integralis propositi intervallum in $(h-\varkappa+1)$tum intervallum $\varkappa$ti integralis classis (*A.*), et in $(\varkappa-h+3)$tum intervallum $\varkappa$ti integralis classis (*B.*) commutatur, ubique multiplis ipsius 6 omissis aut additis, ut numeros positivos adipiscamur.
Imo, $h$tum intervallum $\varkappa$ti integralis classis (*A.*) in $(h+\varkappa-1)$tum integralis propositi, atque $h$tum intervallum $\varkappa$ti integralis classis (*B.*) in $(\varkappa-h+3)$tum integralis propositi reducitur, ubique multiplis numeri 6 omissis aut additis.

Confecimus adhuc, ut has regulas brevi in conspectu ponamus, has tabulas:

28.

		Intervalla ipsius x: 1	2	3	4	5	6	
fiunt intervalla integralis	Iti	1	2	3	4	5	6	classis (A.).
	IIti	6	1	2	3	4	5	
	IIIti	5	6	1	2	3	4	
	IVti	4	5	6	1	2	3	
	Vti	3	4	5	6	1	2	
	VIti	2	3	4	5	6	1	
atque intervalla integralis	Iti	3	2	1	6	5	4	classis (B.).
	IIti	4	3	2	1	6	5	
	IIIti	5	4	3	2	1	6	
	IVti	6	5	4	3	2	1	
	Vti	1	6	5	4	3	2	
	VIti	2	1	6	5	4	3	

29.

Intervalla			1	2	3	4	5	6	
substitutionis class. (A.)	I.	fiunt:	1	2	3	4	5	6	intervalla integr. propos.
	II.		2	3	4	5	6	1	
	III.		3	4	5	6	1	2	
	IV.		4	5	6	1	2	3	
	V.		5	6	1	2	3	4	
	VI.		6	1	2	3	4	5	
substitutionis class. (B.)	I.	fiunt:	3	2	1	6	5	4	intervalla integr. propos.
	II.		4	3	2	1	6	5	
	III.		5	4	3	2	1	6	
	IV.		6	5	4	3	2	1	
	V.		1	6	5	4	3	2	
	VI.		2	1	6	5	4	3	

Inde videmus integralia eiusdem numeri in utraque classi memorabili gaudere natura, ut ipsorum secunda haud minus quam quinta intervalla ad eadem integralis propositi intervalla reducantur; eodem modo singulum quodque $h$tum classis (A.) et $(h+2)$tum classis (B.) integrale ea proprietate gaudent, ut ipsorum tertium non minus quam sextum intervallum ad eadem reducere liceat; singuli denique cuiusque $h$ti classis (A.), et $(h+4)$ti classis (B.) integralis primum aeque ac quartum intervallum ad idem integralis propositi intervallum deinceps redeunt. Has binas transformationes eiusdem intervalli vocabimus, et easdem eiusdem secundi sive quinti, eiusdem tertii sive sexti, eiusdem primi sive quarti intervalli transformationes singulas nominabimus.

Contra $h$tum singulum classis (A.) et $(h+1)$tum classis (B.) integrale, eodem modo ac $h$tum classis (A.) et $(h+3)$tum classis (B.), nec non $h$tum classis (A.) et $(h+5)$tum classis (B.) talibus bina intervallis haud gaudent, quae ad eadem integr. propositi intervalla redeunt.

III.

De duodecim transformationibus fundamentalibus integralis:

$$\int \frac{(A+By^2)\,\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-\varkappa^2 y^2)(1-\lambda^2 y^2)(1-\mu^2 y^2)]}}.$$

Ex iis, quae hucusque exposita sunt, integrale praescriptum duodecim substitutionibus ad sui ipsius formam facillime reducere possumus. Quas duodecim transformationes, in duas rursus classes, prout novum argumentum simul cum y crescit, aut y crescente decrescit, divisas, toti de integrali proposito disquisitione fundamento esse, videbimus. Ponamus igitur, ut eas eruamus, $y^2 = \frac{1}{x}$ in integrali praescripto, ita ut fiat:

$$\frac{(A+By^2)\,\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-\varkappa^2 y^2)(1-\lambda^2 y^2)(1-\mu^2 y^2)]}} = \frac{-\frac{1}{2}(B+Ax)\,\partial x}{\sqrt{[(x-1)(x-\varkappa^2)(x-\lambda^2)(x-\mu^2)(x)]}}.$$

Iam vero in formulis (19.) et (22.) ponere opus est, ut terminum secundum ad praescriptam formam reducamus:

$$\alpha_1 = \infty^2, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = \varkappa^2, \quad \alpha_4 = \lambda^2, \quad \alpha_5 = \mu^2, \quad \alpha_6 = 0.$$

$$Fx = \frac{\infty\sqrt{-1}}{2}(B+Ax).$$

Quantitate α_μ rursus deinceps α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6 designante, adipiscimur per formulas, quae ex (16.) derivantur;

$$30. \quad y^2 = \frac{(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})-(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1})z^2}{\alpha_\mu(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})-\alpha_{\mu-1}(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1})z^2}, \quad z^2 = \frac{(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})(1-\alpha_\mu y^2)}{(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1})(1-\alpha_{\mu-1}y^2)},$$

sex transformationes classis prioris huius formae:

$$31. \int \frac{(A+By^2)\,\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-\varkappa^2 y^2)(1-\lambda^2 y^2)(1-\mu^2 y^2)]}} = \int \frac{(A_1+B_1 z^2)\,\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-c^2 z^2)(1-l^2 z^2)(1-m^2 z^2)]}}$$

ubi habemus:

$$A_1 = \frac{\sqrt{-1}\,\infty.(B+A\alpha_\mu)}{\sqrt{[(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+2})(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+3})(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+4})]}},$$

$$B_1 = \frac{-\sqrt{-1}\,\infty(B+A\alpha_{\mu-1})(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1})}{(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})\sqrt{[(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+2})(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+3})(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+4})]}}.$$

Moduli tres per aequationes (9.) dantur.

Iam vero quantitate α_μ deinceps quantitates α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6 designante, ex formulis his, quae ex (21.) derivantur:

$$32.\quad y^2 = \frac{(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+2}) - (\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}) z^2}{\alpha_{\mu+1}(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+2}) - \alpha_{\mu+2}(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}) z^2}, \quad z^2 = \left(\frac{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+2}}{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{1 - \alpha_{\mu+1} y^2}{1 - \alpha_{\mu+2} y^2}\right),$$

sex alterius classis transformationes adipiscimur eiusdem formae (27.), ubi habemus:

$$A_1 = \frac{\sqrt{-1}\,\infty (B + A\alpha_{\mu+1})}{\sqrt{[(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+2})(\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1})(\alpha_{\mu-2} - \alpha_{\mu+1})(\alpha_{\mu-3} - \alpha_{\mu+1})]}},$$

$$B_1 = \frac{-\sqrt{-1}\,\infty (B + A\alpha_{\mu+2})(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1})}{(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+2})\sqrt{[(\alpha_\mu - \alpha_{\mu+2})(\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1})(\alpha_{\mu+2} - \alpha_{\mu+1})(\alpha_{\mu-3} - \alpha_{\mu+1})]}},$$

Moduli tres ex aequationibus (10.) sequuntur.

Pro limitibus integralium animadvertendum est, dum argumenti y^2 valor hos valores induat:

$$-\infty^2,\quad 0,\quad 1,\quad \frac{1}{\varkappa^2},\quad \frac{1}{\lambda^2},\quad \frac{1}{\mu^2},\quad \infty^2,$$

argumenti z^2 valores in classis (A.) transformationibus deinceps fore:

$$\left(\frac{\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1}}{\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1}}\right)\left(\frac{\alpha_\mu}{\alpha_{\mu-1}}\right),\quad \left(\frac{\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1}}{\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1}}\right),\quad \left(\frac{\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1}}{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{1 - \alpha_\mu}{1 - \alpha_{\mu-1}}\right),$$

$$\left(\frac{\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1}}{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\varkappa^2 - \alpha_\mu}{\varkappa^2 - \alpha_{\mu-1}}\right),\quad \left(\frac{\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1}}{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\lambda^2 - \alpha_\mu}{\lambda^2 - \alpha_{\mu-1}}\right),\quad \left(\frac{\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu+1}}{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\mu^2 - \alpha_\mu}{\mu^2 - \alpha_{\mu-1}}\right);$$

atque in classis (B.) transformationibus:

$$\left(\frac{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+2}}{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu+1}}{\alpha_{\mu+2}}\right),\quad \left(\frac{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+2}}{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}}\right),\quad \left(\frac{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+2}}{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{1 - \alpha_{\mu+1}}{1 - \alpha_{\mu+2}}\right),$$

$$\left(\frac{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+2}}{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\varkappa^2 - \alpha_{\mu+1}}{\varkappa^2 - \alpha_{\mu+2}}\right),\quad \left(\frac{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+2}}{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\lambda^2 - \alpha_{\mu+1}}{\lambda^2 - \alpha_{\mu+2}}\right),\quad \left(\frac{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+2}}{\alpha_\mu - \alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\mu^2 - \alpha_{\mu+1}}{\lambda^2 - \alpha_{\mu+2}}\right),$$

quippe qui valores ex formulis secundis (30.) et (32.) derivatis cum his semper, etsi in alio ordine scriptis, congruant necesse est:

$$-\infty^2,\quad 0,\quad 1,\quad \frac{1}{c^2},\quad \frac{1}{l^2},\quad \frac{1}{m^2},\quad \infty^2.$$

In sequenti tabula denique, priusquam in naturam transformationum fundamentalium penetrare velis, brevi in conspectu omnes invenis positas. Ibi in singulae cuiusque transformationis serie prima limites, in secunda formulae substitutionum ipsae, in tertia denique integrale novum legitur. Brevitatis causa haec signa introduximus.

$$\varkappa_1^2 = 1 - \varkappa^2,\quad \lambda_1^2 = 1 - \lambda^2,\quad \mu_1^2 = 1 - \mu^2,\quad \lambda_\varkappa^2 = \varkappa^2 - \lambda^2,\quad \mu_\varkappa^2 = \varkappa^2 - \mu^2,\quad \mu_\lambda^2 = \lambda^2 - \mu^2.$$

Classis A.

$$\text{I.}\quad \begin{Bmatrix} y^2 = -\infty^2 = 0 = 1 = \frac{1}{\varkappa^2} = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2} = +\infty^2 \\ z^2 = -\infty^2 = 0 = 1 = \frac{1}{\varkappa^2} = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2} = +\infty^2 \end{Bmatrix}$$

$$y^2 = z^2, \qquad z^2 = y^2,$$

$$\int \frac{(A + B z^2)\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-\kappa^2 z^2)(1-\lambda^2 z^2)(1-\mu^2 z^2)]}}.$$

$$\text{II.} \quad \left\{ \begin{array}{llllllll} y^2 = -\infty^2 & = 0 & = 1 & = \frac{1}{\kappa^2} & = \frac{1}{\lambda^2} & = \frac{1}{\mu^2} & = \infty^2 \\ z^2 = \frac{1}{\kappa_1^2} & = \pm\infty^2 & = 0 & = 1 & = \frac{\lambda_1^2}{\kappa_1^2} & = \frac{\mu_1^2}{\kappa_1^2} & = \frac{1}{\kappa_1^2} \end{array} \right\},$$

$$y^2 = \frac{1}{1-\kappa_1^2 z^2}, \qquad z^2 = -\frac{1}{\kappa_1^2}\,\frac{1-y^2}{y^2},$$

$$\frac{-\sqrt{-1}}{\lambda_1 \mu_1} \int \frac{[A(1-\kappa_1^2 z^2) + B]\partial z}{\sqrt{\left[(1-z^2)\left(1-\frac{\kappa_1^2}{\lambda_1^2} z^2\right)\left(1-\frac{\kappa_1^2}{\mu_1^2} z^2\right)(1-\kappa_1^2 z^2)\right]}}.$$

$$\text{III.} \quad \left\{ \begin{array}{llllllll} y^2 = -\infty^2 & = 0 & = 1 & = \frac{1}{\kappa^2} & = \frac{1}{\lambda^2} & = \frac{1}{\mu^2} & = \infty^2 \\ z^2 = \frac{\lambda_1^2 \kappa^2}{\lambda_\kappa^2} & = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_\kappa^2} & = \pm\infty^2 & = 0 & = 1 & = \frac{\lambda_1^2 \mu_\kappa^2}{\lambda_\kappa^2 \mu_1^2} & = \frac{\lambda_1^2 \kappa^2}{\lambda_\kappa^2} \end{array} \right\},$$

$$y^2 = \frac{1}{\kappa^2}\left(\frac{1-\frac{\lambda_\kappa^2}{\lambda_1^2} z^2}{1-\frac{\lambda_\kappa^2}{\kappa^2 \lambda_1^2} z^2}\right), \qquad z^2 = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_\kappa^2}\left(\frac{1-\kappa^2 y^2}{1-y^2}\right),$$

$$-\frac{1}{\kappa\mu_\kappa - \lambda_1} \int \frac{\left[A\kappa^2\left(1-\frac{\lambda_\kappa^2}{\kappa^2 \lambda_1^2} z^2\right) + B\left(1-\frac{\lambda_\kappa^2}{\lambda_1^2} z^2\right)\right]\partial z}{\sqrt{\left[(1-z^2)\left(1-\frac{\lambda_\kappa^2 \mu_1^2}{\lambda_1^2 \mu_\kappa^2} z^2\right)\left(1-\frac{\lambda_\kappa^2}{\lambda_1^2 \kappa^2} z^2\right)\left(1-\frac{\lambda_\kappa^2}{\lambda_1^2} z^2\right)\right]}}.$$

$$\text{IV.} \quad \left\{ \begin{array}{llllllll} y^2 = -\infty^2 & = 0 & = 1 & = \frac{1}{\kappa^2} & = \frac{1}{\lambda^2} & = \frac{1}{\mu^2} & = \infty^2 \\ z^2 = \frac{\mu_\kappa^2 \lambda^2}{\mu_\lambda^2 \kappa^2} & = \frac{\mu_\kappa^2}{\mu_\lambda^2} & = \frac{\mu_\kappa^2 \lambda_1^2}{\mu_\lambda^2 \kappa_1^2} & = \pm\infty^2 & = 0 & = 1 & = \frac{\mu_\kappa^2 \lambda^2}{\mu_\lambda^2 \kappa^2} \end{array} \right\},$$

$$y^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1-\frac{\mu_\lambda^2}{\mu_\kappa^2} z^2}{1-\frac{\kappa^2 \mu_\lambda^2}{\lambda^2 \mu_\kappa^2} z^2}\right), \qquad z^2 = \frac{\mu_\kappa^2}{\mu_\lambda^2}\left(\frac{1-\lambda^2 y^2}{1-\kappa^2 y^2}\right),$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{\lambda \lambda_1 \mu_\kappa} \int \frac{\left[A\lambda^2\left(1-\frac{\kappa^2 \mu_\lambda^2}{\lambda^2 \mu_\kappa^2} z^2\right) + B\left(1-\frac{\mu_\lambda^2}{\mu_\kappa^2} z^2\right)\right]\partial z}{\sqrt{\left[(1-z^2)\left(1-\frac{\kappa^2 \mu_\lambda^2}{\lambda^2 \mu_\kappa^2} z^2\right)\left(1-\frac{\mu_\lambda^2}{\mu_\kappa^2} z^2\right)\left(1-\frac{\mu_\lambda^2 \kappa_1^2}{\mu_\kappa^2 \lambda_1^2} z^2\right)\right]}}.$$

$$\text{V.}\quad \left\{\begin{array}{llllllll} y^2 = -\infty^2 & = 0 & = 1 & = \frac{1}{\varkappa^2} & = \frac{1}{\lambda^2} & = \frac{1}{\mu^2} & = \infty^2 \\ z^2 = 1 & = \frac{\lambda^2}{\mu^2} & = \frac{\lambda^2\mu_1^2}{\mu^2\lambda_1^2} & = \frac{\lambda^2\mu_\varkappa^2}{\mu^2\lambda_\varkappa^2} & = \pm\infty^2 & = 0 & = 1. \end{array}\right\},$$

$$y = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}z^2}{1-z^2}\right), \quad z^2 = \frac{\lambda^2}{\mu^2}\left(\frac{1-\mu^2y^2}{1-\lambda^2y^2}\right),$$

$$\frac{1}{\mu_\varkappa\mu_1\lambda}\int\frac{\left[A\mu^2(1-z^2)+B\left(1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}z^2\right)\right]\partial z}{\sqrt{\left[(1-z^2)\left(1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}z^2\right)\left(1-\frac{\mu^2\lambda_1^2}{\lambda^2\mu_1^2}z^2\right)\left(1-\frac{\mu^2\lambda_\varkappa^2}{\lambda^2\mu_\varkappa^2}z^2\right)\right]}}.$$

$$\text{VI.}\quad \left\{\begin{array}{llllllll} y^2 = -\infty^2 & = 0 & = 1 & = \frac{1}{\varkappa^2} & = \frac{1}{\lambda^2} & = \frac{1}{\mu^2} & = \infty^2 \\ z^2 = 0 & = 1 & = \frac{1}{\mu_1^2} & = \frac{\varkappa^2}{\mu_\varkappa^2} & = \frac{\lambda^2}{\mu_\lambda^2} & = \pm\infty^2 & = 0 \end{array}\right\},$$

$$y^2 = -\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{1-z^2}{z^2}\right), \quad z^2 = \frac{1}{1-\mu^2y^2},$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{\varkappa\lambda}\int\frac{[A\mu^2z^2-B(1-z^2)]\partial z}{\sqrt{\left[(1-z^2)(1-\mu_1^2z^2)\left(1-\frac{\mu_\varkappa^2}{\varkappa^2}z^2\right)\left(1-\frac{\mu_\lambda^2}{\lambda^2}\right)\right]}}.$$

Classis B.

$$\text{I.}\quad \left\{\begin{array}{llllllll} y^2 = -\infty^2 & = 0 & = 1 & = \frac{1}{\varkappa^2} & = \frac{1}{\lambda^2} & = \frac{1}{\mu^2} & = \infty^2 \\ z^2 = \frac{1}{\varkappa^2} & = 1 & = 0 & = \mp\infty^2 & = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_\varkappa^2} & = \frac{\mu_1^2}{\mu_\varkappa^2} & = \frac{1}{\varkappa^2} \end{array}\right\},$$

$$y^2 = \frac{1-z^2}{1-\varkappa^2z^2}, \quad z^2 = \frac{1-y^2}{1-\varkappa^2y^2},$$

$$-\frac{1}{\lambda_1\mu_\varkappa}\int\frac{[A(1-\varkappa^2z^2)+B(1-z^2)]\partial z}{\sqrt{\left[(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)\left(1-\frac{\mu_\varkappa^2}{\mu_1^2}z^2\right)\left(1-\frac{\lambda_\varkappa^2}{\lambda_1^2}z^2\right)\right]}}.$$

$$\text{II.}\quad \left\{\begin{array}{llllllll} y^2 = -\infty^2 & = 0 & = 1 & = \frac{1}{\varkappa^2} & = \frac{1}{\lambda^2} & = \frac{1}{\mu^2} & = \infty^2 \\ z^2 = \frac{\lambda_1^2\varkappa^2}{\varkappa_1^2\lambda^2} & = \frac{\lambda_1^2}{\varkappa_1^2} & = 1 & = 0 & = \mp\infty^2 & = \frac{\lambda_1^2\mu_\varkappa^2}{\varkappa_1^2\mu_\lambda^2} & = \frac{\lambda_1^2\varkappa^2}{\varkappa_1^2\lambda^2} \end{array}\right\},$$

$$y^2 = \frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{1-\frac{\varkappa_1^2}{\lambda_1^2}z^2}{1-\frac{\lambda^2\varkappa_1^2}{\varkappa^2\lambda_1^2}z^2}\right), \quad z^2 = \frac{\varkappa_1^2}{\lambda_1^2}\left(\frac{1-\lambda^2y^2}{1-\varkappa^2y^2}\right),$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{\varkappa\mu_\varkappa\lambda_1}\int\frac{\left[A\varkappa^2\left(1-\frac{\varkappa_1^2\lambda^2}{\lambda_1^2\varkappa^2}z^2\right)+B\left(1-\frac{\varkappa_1^2}{\lambda_1^2}z^2\right)\right]\partial z}{\sqrt{\left[(1-z^2)\left(1-\frac{\varkappa_1^2}{\lambda_1^2}z^2\right)\left(1-\frac{\varkappa_1^2\lambda^2}{\lambda_1^2\varkappa^2}z^2\right)\left(1-\frac{\varkappa_1^2\mu_\lambda^2}{\lambda_1^2\mu_\varkappa^2}z^2\right)\right]}}.$$

$$\text{III.}\quad\left\{\begin{array}{llllllll} y^2=-\infty^2 & =0 & =1 & =\frac{1}{\varkappa^2} & =\frac{1}{\lambda^2} & =\frac{1}{\mu^2} & =\infty^2 \\ z^2=\frac{\mu_\varkappa^2\lambda^2}{\lambda_\varkappa^2\mu^2} & =\frac{\mu_\varkappa^2}{\lambda_\varkappa^2} & =\frac{\mu_\varkappa^2\lambda_1^2}{\lambda_\varkappa^2\mu_1^2} & =1 & =0 & =\mp\infty^2 & =\frac{\mu_\varkappa^2\lambda^2}{\lambda_\varkappa^2\mu^2}\end{array}\right\},$$

$$y^2=\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1-\frac{\lambda_\varkappa^2}{\mu_\varkappa^2}z^2}{1-\frac{\lambda_\varkappa^2\mu^2}{\mu_\varkappa^2\lambda^2}z^2}\right),\qquad z^2=\frac{\lambda_\varkappa^2}{\mu_\varkappa^2}\left(\frac{1-\mu^2y^2}{1-\lambda^2y^2}\right),$$

$$\frac{1}{\lambda\lambda_1\mu_\varkappa}\int\frac{\left[A\lambda^2\left(1-\frac{\lambda_\varkappa^2\mu^2}{\mu_\varkappa^2\lambda^2}z^2\right)+B\left(1-\frac{\lambda_\varkappa^2}{\mu_\varkappa^2}z^2\right)\right]\partial z}{\sqrt{\left[(1-z^2)\left(1-\frac{\lambda_\varkappa^2\mu_1^2}{\mu_\varkappa^2\lambda_1^2}z^2\right)\left(1-\frac{\lambda_\varkappa^2}{\mu_\varkappa^2}z^2\right)\left(1-\frac{\lambda_\varkappa^2\mu^2}{\mu_\varkappa^2\lambda^2}z^2\right)\right]}}.$$

$$\text{IV.}\quad\left\{\begin{array}{llllllll} y^2=-\infty^2 & =0 & =1 & =\frac{1}{\varkappa^2} & =\frac{1}{\lambda^2} & =\frac{1}{\mu^2} & =\infty^2 \\ z^2=+\infty^2 & =\frac{\lambda^2}{\mu_\lambda^2} & =\frac{\lambda^2\mu_1^2}{\mu_\lambda^2} & =\frac{\lambda^2\mu_\varkappa^2}{\mu_\lambda^2\varkappa^2} & =1 & =0 & =-\infty^2\end{array}\right\},$$

$$y^2=\frac{1-\frac{\mu_\lambda^2}{\lambda^2}z^2}{\mu^2},\qquad z^2=\frac{\lambda^2}{\mu_\lambda^2}(1-\mu^2y^2),$$

$$\frac{-\sqrt{-1}}{\mu_\varkappa\mu_1\lambda}\int\frac{\left[A\mu^2+B\left(1-\frac{\mu_\lambda^2}{\lambda^2}z^2\right)\right]\partial z}{\sqrt{\left[(1-z^2)\left(1-\frac{\mu_\lambda^2\varkappa^2}{\lambda^2\mu_\varkappa^2}z^2\right)\left(1-\frac{\mu_\lambda^2}{\lambda^2\mu_1^2}z^2\right)\left(1-\frac{\mu_\lambda^2}{\lambda^2}z^2\right)\right]}}.$$

$$\text{V.}\quad\left\{\begin{array}{llllllll} y^2=-\infty^2 & =0 & =1 & =\frac{1}{\varkappa^2} & =\frac{1}{\lambda^2} & =\frac{1}{\mu^2} & =\infty^2 \\ z^2=0 & =\mp\infty^2 & =\frac{1}{\mu^2} & =\frac{\varkappa^2}{\mu^2} & =\frac{\lambda^2}{\mu^2} & =1 & =0\end{array}\right\},$$

$$y^2=\frac{1}{\mu^2z^2},\qquad z^2=\frac{1}{\mu^2y^2},$$

$$-\frac{1}{\varkappa\lambda}\int\frac{[A\mu^2z^2+B]\partial z}{\sqrt{\left[(1-z^2)\left(1-\frac{\mu^2}{\lambda^2}z^2\right)\left(1-\frac{\mu^2}{\varkappa^2}z^2\right)(1-\mu^2z^2)\right]}}.$$

$$\text{VI.}\quad \left\{\begin{array}{l} y^2 = -\infty^2 = 0 = 1 \quad = \frac{1}{\varkappa^2} = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2} = \infty^2 \\ z^2 = 1 \quad\quad = 0 = \mp\infty^2 = \frac{1}{\varkappa_1^2} = \frac{1}{\lambda_1^2} = \frac{1}{\mu_1^2} = 1 \end{array}\right\},$$

$$y^2 = -\frac{z^2}{1-z^2}, \qquad z^2 = -\frac{y^2}{1-y^2},$$

$$\sqrt{-1}\int\frac{[A(1-z^2)-Bz^2]\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-\mu_1^2 z^2)(1-\lambda_1^2 z^2)(1-\varkappa_1^2 z^2)]}}.$$

Integralis novi limitibus in eundem ordinem, quo integralis propositi limites gaudent, redactis, ita ut intervalla

$$-\infty^2,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{c^2},\ \frac{1}{l^2},\ \frac{1}{m^2},\ \infty^2$$

respective primum, secundum, et integralis novi intervallum vocemus, eadem theoremata, quae antea apud integrale generalius (27.) attulerimus, easdemque tabulas (28.) et (29.) quibus, quomodo intervalla binorum integralium sese excipiant, clarum fiat, apud has transformationes fundamentales valere facile perspici potest. Iam vero primum inde de formularum duodecim nominatorumque integralium novorum forma, quippe qualis per tabulam comprobatur, certior fies. Integrale enim novo posito, ut antea:

$$= \int\frac{(A_1+B_1 z^2)\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-c^2z^2)(1-l^2z^2)(1-m^2z^2)]}},$$

deinceps in classi A. habebimus, ubi y^2 simul cum z^2 crescit:

$$33.\quad \left\{\begin{array}{lll} \text{I.} & y^2 = z^2, & A_1+B_1z^2 = A+Bz^2. \\ \text{II.} & y^2 = \frac{1}{1-m^2z^2}, & A_1+B_1z^2 = -\frac{\sqrt{-1}}{\lambda_1\mu_1}[A(1-m^2z^2)+B]. \\ \text{III.} & y^2 = \frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{1-m^2z^2}{1-l^2z^2}\right), & A_1+B_1z^2 = -\frac{1}{\varkappa\mu_\varkappa\lambda_1}[A\varkappa^2(1-l^2z^2)+B(1-m^2z^2)]. \\ \text{IV.} & y^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1-l^2z^2}{1-c^2z^2}\right), & A_1+B_1z^2 = \frac{\sqrt{-1}}{\lambda\lambda_1\mu_\varkappa}[A\lambda^2(1-c^2z^2)+B(1-l^2z^2)]. \\ \text{V.} & y^2 = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{1-c^2z^2}{1-z^2}\right), & A_1+B_1z^2 = \frac{1}{\mu_\varkappa\mu_1\lambda}[A\mu^2(1-z^2)+B(1-c^2z^2)]. \\ \text{VI.} & y^2 = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{1-z^2}{z^2}\right), & A_1+B_1z^2 = -\frac{\sqrt{-1}}{\varkappa\lambda}[-A\mu^2z^2+B(1-z^2)]. \end{array}\right.$$

Eodem modo in classi $B.$, ubi ipso y^2 crescente, z^2 decrescit, erit:

$$34.\quad \begin{cases} y^2 = \dfrac{1-z^2}{1-c^2z^2}, & A_1+B_1z^2 = -\dfrac{1}{\lambda_1\mu_1}[A(1-c^2z^2)+B(1-z^2)]. \\ y^2 = \dfrac{1}{\varkappa^2}\left(\dfrac{1-c^2z^2}{1-l^2z^2}\right), & A_1+B_1z^2 = \dfrac{\sqrt{-1}}{\varkappa\mu_\varkappa\lambda_1}[A\varkappa^2(1-l^2z^2)+B(1-c^2z^2)]. \\ y^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}\left(\dfrac{1-l^2z^2}{1-m^2z^2}\right), & A_1+B_1z^2 = \dfrac{1}{\lambda\lambda_1\mu_\varkappa}[A\lambda^2(1-m^2z^2)+B(1-l^2z^2)]. \\ y^2 = \dfrac{1}{\mu^2}(1-m^2z^2), & A_1+B_1z^2 = \dfrac{-\sqrt{-1}}{\mu_\varkappa\mu_1\lambda}[A\mu^2+B(1-m^2z^2)]. \\ y^2 = \dfrac{1}{\mu^2z^2}, & A_1+B_1z^2 = -\dfrac{1}{\varkappa\lambda}[A\mu^2z^2+B]. \\ y^2 = -\dfrac{z^2}{1-z^2}, & A_1+B_1z^2 = -\sqrt{-1}[-A(1-z^2)+Bz^2]. \end{cases}$$

Nominatorum igitur formis deinceps ita suppositis:

$$\text{I.}\begin{cases}1,\\1,\end{cases}\quad \text{II.}\begin{cases}y^2,\\z^2,\end{cases}\quad \text{III.}\begin{cases}1-y^2,\\1-z^2,\end{cases}\quad \text{IV.}\begin{cases}1-\varkappa^2y^2,\\1-c^2z^2,\end{cases}\quad \text{V.}\begin{cases}1-\lambda^2y^2,\\1-l^2z^2,\end{cases}\quad \text{VI.}\begin{cases}1-\mu^2y^2,\\1-m^2z^2,\end{cases}$$

videmus $h$tam formam nominatoris integralis propositi, commutari in $(h-k+1)$tam integralis $k$ti classis $A.$, et in $(k-h+4)$tam formam integralis $k$ti classis $B.$ Imo $h$ta forma $k$ti integralis classis $A.$ in $(h+k-1)$tam, aeque ac $h$ta forma $k$ti integralis classis $B.$ in $(k-h+4)$-tam integralis propositi formam nominatoris reducitur.

Deinde vero thoremata de limitibus, in (27.) enuntiata adhibeamus, ut, quomodo transformationes fundamentalibus una ex altera deriventur, disquiramus. Ponamus hanc ob rem formulam:

$$y^2 = \frac{a+bz^2}{c+dz^2},$$

Htam aut classis $A.$ aut classis $B.$ esse; iam vero integrale Htae transformationis alteriusutrius classis ut integrale transformandam tractemus, ita ut ponamus ibi:

$$z^2 = \frac{a_1+b_1v^2}{c_1+d_1v^2},$$

quae prima formula Ktae transformationis alterius utrius classis est, ubique loco ipsorum $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, integralis huius modulis introductis.

Inde ad novum integrale, inter duodecim iam contentum delabamur necesse est. Iam igitur quaestio oritur, quotumnum sit, Kta substitutione in $H$to integrali introducta, integrale novum. Quae quaestio, his theorematibus solvitur:

Si in $H$to integrali classis $A.$, Kta formula classis $A.$ vel classis $B.$ introducitur, $(H+K-1)$tum classis $A.$ vel classis $B.$ integrale adi-

piscimur. Imo, si in $H$to integrali classis B. Kta formula classis A. vel classis B. introducitur, $(H-K+1)$tum classis B. vel classis A. integrale oritur. Ubique multipla ipsius 6 omittantur aut adiiciantur necesse est, ita ut numeri $(H+K-1)$ et $(H-K+1)$ positivi sint, nec numerum 6 superent. Quae theoremata ita demonstrantur.

Ex formulis: $y^2 = \frac{a+bz^2}{c+dz^2}$, et $z^2 = \frac{a_1+b_1v^2}{c_1+d_1v^2}$, quantitate z^2 eliminata nanciscamur $y^2 = \frac{a_{\prime\prime}+b_{\prime\prime}v^2}{c_{\prime\prime}+d_{\prime\prime}v^2}$, quae, quota utrius classis sit, inveniendum erit. Argumento v^2 in $h$to intervallo integralis quaesiti, $=X$ti, crescente vel decrescente, argumentum z^2 in $(h+K-1)$to vel in $(K-h+3)$-to integralis suppositi crescere, prout secunda formula Kta classis A. vel classis B. fuerit, ex theor. (27.) sequitur. Iam vero loco integralis propositi, primum Htum classis A. ponamus. Cuius in $(h+K-1)$to vel $(K-h+3)$to intervallo argumento z^2 crescente, argumentum y^2 in $((h+K-1)+H-1)$to vel in $((K-h+3)+H-1)$to integralis propositi crescet. Inde sequitur, argumento v^2 in $h$to intervallo Xti integralis classis A. vel classis B. crescente, argumentum y^2 in $(H+K+h-2)$to vel $(H+K-h+2)$to intervallo integralis propositi crescere. Ergo habemus, ex theor. (27.)

$h = H+K+h-2-X+1$, vel: $h = X-(H+K-h+2)+3$;

unde sequitur:

$$X = H+K-1.$$

Hanc ob rem,

dum: $y^2 = \frac{a+bz^2}{c+dz^2}$, Hta formula prioris classis est,

atque: $z^2 = \frac{a_\prime+b_\prime v^2}{c_\prime+d_\prime v^2}$, Kta formula vel prioris vel alterius classis est,

erit: $y^2 = \frac{a_{\prime\prime}+b_{\prime\prime}v^2}{c_{\prime\prime}+d_{\prime\prime}v^2}$, $(H+K-1)$ta vel prioris vel alterius classis.

Tum vero loco integralis propositi: Htum integrale classis B. substituatur. Argumentum y^2 in $(H-(K+h-1)+3)$to vel $(H-(K-h+3)+3)$-to intervallo decrescet, dum ipsum z^2 in $(h+K-1)$to vel $(K-h+3)$to intervallo Hti integralis crescit. Inde sequitur, argumento v^2 in $h$to intervallo Xti integralis classis B. vel classis A. crescente, argumentum y^2 in $(H-K-h+4)$to vel $(H-K+h)$to integralis propositi intervallo crescere. Ergo ex theor: (27.) habemus:

$X-(H-K-h+4)+3 = h$ vel $H-K+h-X+1 = h$,

unde sequitur:

$$X = H - K + 1.$$

Dum igitur: $y^2 = \frac{a + bz^2}{c + dz^2}$, Hta formula classis B est,

atque: $z^2 = \frac{a_{,} + b_{,}v^2}{c_{,} + \partial_{,}v^2}$, Kta formula classis A vel classis B,

erit: $y^2 = \frac{a_{,,} + b_{,,}v^2}{c_{,,} + d_{,,}v^2}$, $(H - K + 1)$ta vel secundae vel prioris classis formula,

q. e. d.

Quae theoremata docent, aut ex secunda aut ex sexta transformatione classis A. omnes eiusdem classis una ex alia deduci posse. Alterius classis B. transformationes inde, qualibet classis B. transformatione adhibita, derivantur omnes.

Eodem modo omnes duodecim transformationes ex binis classis B. mutuo se excipientibus deducere licet, ut ex VI. et I., I. et II., II. et III., III. et IV., IV. et V., V. et VI. Inde denique transformationum nostrarum modulorum natura et origo detegitur. Invenimus enim, theorematibus nostris adiuti, modulos $(h+1)$tae et $(h-1)$tae transformationis classis A., cum modulis $h$tae eiusdem classis quos $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 nominemus, ita cohaerere, ut habeamus:

$$\text{illos: } \frac{1-\varkappa^2}{1-\lambda^2}, \quad \frac{1-\varkappa^2}{1-\mu^2}, \quad 1-\varkappa^2;$$

$$\text{hos: } 1-\mu^2, \quad \frac{\varkappa^2-\mu^2}{\varkappa^2}, \quad \frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2}.$$

Eodem modo apud binas transformationes eiusdem secundi sive quinti intervalli, quae in tabula nostra, eodem utriusque classis numero gaudent, modulis alterius per: $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 significatis, alterius moduli erunt:

$$\varkappa^2, \quad \frac{\varkappa^2-\mu^2}{1-\mu^2}, \quad \frac{\varkappa^2-\lambda^2}{1-\lambda^2}.$$

Transformationes vero binae eiusdem primi sive quarti intervalli, quarum altera in classi A. numero h gaudet, altera in classi B. apud numerum $h+4$ legitur, tales erunt, ut alterius modulis $= \varkappa^2$, λ^2, μ^2 positis, alterius sint moduli:

$$\frac{\mu^2}{\lambda^2}, \quad \frac{\mu^2}{\varkappa^2}, \quad \mu^2.$$

Tum denique $h$tum integrale classis A. et $(h+5)$tum classis B., quippe quorum intervallo secundum et primum mutuo commutantur tales modulos habebunt, ut alterius positis: $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, moduli apud alterum sint:

$$1-\mu^2,\quad 1-\lambda^2,\quad 1-\varkappa^2.$$

Haec de transformationibus fundamentalibus integralis

$$\int\frac{(A+By^2)\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-\varkappa^2y^2)(1-\lambda^2y^2)(1-\mu^2y^2)]}},$$

attulisse sufficiat.

IV.

De integralium Abelianorum diversis ordinibus atque transformationibus fundamentalibus.

Integralia huius formae generalis:

$$\int\frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{[(A+A_1x+A_2x^2+\text{etc.}+A_px^p)]}}$$

prout numerus p mutatur, prorsus diversa natura gaudere, ex theoremate celeberrimo Abeliano elucet. Inde etiam fluit, cur nostra integralia, quae hucusque tractavimus integralia Abeliana primi ordinis nominaverimus, ratio satis dilucida. Integralibus vero $\int\frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{(\varphi_p x)}}$ Abelianis primi, secundi, etc. $h$ti ordinis nominatis, prout numerus integer $\frac{p}{2}$ vel $\frac{p+1}{2}$ valores 3, 4, ... $(h+2)$ induat, integralia:

$$\int\frac{\psi y^2\,\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-\varkappa_1^2y^2)(1-\varkappa_2^2y^2)\dots(1-\varkappa_{2h+1}^2y^2)]}},$$

ad quae integrale $h$ti ordinis reduci potest, dummodo $\varphi_p x$ in factores reales lineares dissolvere licet, ad integralia $h$ti ordinis referuntur. Quippe quam reductionem breviter adhuc exponamus. Integrale igitur propositum sit, si $\alpha_1>\alpha_2\dots>\alpha_{2h+4}$ assumitur:

$$\int\frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{2h+4})]}}.$$

Eodem calculo praemisso, quem pro $h=1$ accurate exposuimus, invenimus, si per α_μ quamlibet quantitatum α, atque per $\alpha_{\mu+1}$ proxime sequentem, per $\alpha_{\mu-1}$ proxime antecedentem significamus, posito:

$$34.\quad x=\frac{\alpha_\mu(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})-\alpha_{\mu-1}(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1})z^2}{(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})-(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1})z^2},\quad z^2=\left(\frac{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1}}{\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{x-\alpha_\mu}{x-\alpha_{\mu-1}}\right),$$

fore:

$$35.\quad\int\frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{2h})]}}=\int\frac{M.\psi z^2\,\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-\varkappa_1^2z^2)(1-\varkappa_2^2z^2)\dots(1-k_{2h+1}z^2)]}},$$

ubi ponendum est:

$$M = \frac{2[(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})-(\alpha_{2h}-\alpha_1)z^2]^h}{(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})^h\sqrt{[(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+2})(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+3})\dots(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+2h+2})]}}.$$

$$\psi z^2 = F(x),$$

36. $$\varkappa_1^2 = \left(\frac{\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1}}{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+2}}{\alpha_\mu-\alpha_{\mu+2}}\right),\quad \varkappa_2^2 = \left(\frac{\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1}}{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+3}}{\alpha_\mu-\alpha_{\mu+3}}\right),\ \dots$$
$$\dots\ \varkappa_{2h+1}^2 = \left(\frac{\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1}}{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+2h+2}}{\alpha_\mu-\alpha_{\mu+2h+2}}\right).$$

Habemus hic: $1>\varkappa_1>\varkappa_2>$ etc. $>\varkappa_{2h+1}>0$, atque hos limites argumentorum; dum argumentum x his valoribus gaudet:

$$\alpha_{\mu-1},\quad \alpha_\mu,\quad \alpha_{\mu+1},\quad \alpha_{\mu+2},\quad \dots\quad \alpha_{\mu+2h+2},\quad \alpha_{\mu-1},$$

argumentum z^2 hos valores induit:

$$-\infty^2,\quad 0,\quad 1,\quad \frac{1}{\varkappa_1^2},\quad \dots\quad \frac{1}{\varkappa_{2h+1}},\quad +\infty^2.$$

Si loco ipsius α_μ ponamus deinceps $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2h+4}$, $(2h+4)$ transformationes classis *A.* nanciscimur.

Eodem modo, posito:

37. $$x = \frac{\alpha_{\mu+1}(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+2})-\alpha_{\mu+2}(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1})z^2}{(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+2})-(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1})z^2},\quad z^2 = \left(\frac{\alpha_\mu-\alpha_{\mu+2}}{\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{x-\alpha_{\mu+1}}{x-\alpha_{\mu+2}}\right),$$

ad eandem aequationem (35.) labimur, ubi vero ponendum erit:

$$M = \frac{2[(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+2})(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1})z^2]^h}{(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+2})^h\sqrt{[(\alpha_\mu-\alpha_{\mu+2})(\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1})(\alpha_{\mu-2}-\alpha_{\mu+1})\dots(\alpha_{\mu-2h-1}-\alpha_{\mu+1})]}},$$

$$\psi z^2 = Fx,$$

38. $$\varkappa_1^2 = \left(\frac{\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu}{\alpha_{\mu+2}-\alpha_\mu}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu-1}}{\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu-1}}\right),\quad \varkappa_2^2 = \left(\frac{\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu}{\alpha_{\mu+2}-\alpha_\mu}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu-2}}{\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu-2}}\right),\ \dots$$
$$\dots\ \varkappa_{2h+1}^2 = \left(\frac{\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu}{\alpha_{\mu+2}-\alpha_\mu}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu+2}-\alpha_{\mu-2h-1}}{\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu-2h-1}}\right).$$

Habemus rursus: $1>\varkappa_1>\varkappa_2>\dots\varkappa_{2h+1}>0$; dum argumentum x hos valores percurrit:

$$\alpha_{\mu+2},\quad \alpha_{\mu+1},\quad \alpha_\mu,\quad \alpha_{\mu-1},\quad \dots\quad \alpha_{\mu-2h-1},\quad \alpha_{\mu+2},$$

argumentum z^2 hos valores induit:

$$-\infty^2,\quad 0,\quad 1,\quad \frac{1}{\varkappa_1^2},\quad \dots\quad \frac{1}{\varkappa_{2h+1}^2},\quad +\infty^2.$$

Loco ipsius α_μ posito deinceps $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2h+4}$, $(2h+4)$ transformationes classis *B.* oriuntur.

Ut easdem transformationes, quarum numerus $=4h+8$ est, pro integrali eiusdem ordinis:

$$\int\frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{2h+3})]}}$$

adipiscamur, in integrali $\alpha_{2h+3} = -\infty^2$, atque $Fx = \infty Fx$, unde quantitatibus infinite parvis omissis, nanciscimur $(4h+8)$ diversas transformationes integralis propositi.

Intervallis argumenti x:

$$\alpha_{2h+4} \ldots \alpha_1, \quad \alpha_1 \ldots \alpha_2, \quad \text{etc.} \qquad \alpha_{2h+3} \ldots \alpha_{2h+4},$$

atque argumenti z^2:

$$-\infty^2 \ldots 0, \quad 0 \ldots 1, \quad 1 \ldots \frac{1}{\varkappa_1^2}, \text{ etc.} \quad \frac{1}{\varkappa_{2h+1}} \ldots \infty^2$$

deinceps primo, secundo etc. nominatis, theoremata, quae numero (27.) allata sunt, facillime ad haec generaliora integralia extenduntur, tabulaeque similes construuntur, ubique nonnisi loco numeri 6, $2h+4$ substituto.

Eodem modo $4h+8$ transformationes fundamentales integralis:

$$\int \frac{(A_0 + A_1 y^2 + \text{etc.} + A_h y^{2h})}{\sqrt{[(1-y^2)(1-\varkappa_1^2 y^2) \ldots (1-\varkappa_{2h+1}^2 y^2)]}}$$

derivantur, quippe quarum substitutiones, una cum modulis, adhuc proponimus in hac tabula:

Classis *A*.

$$\text{I.} \begin{cases} \text{Interv. ipsius } y: \; 1, \; 2, \; 3, \; \ldots \; 2h+4. \\ \text{Interv. ipsius } z: \; 1, \; 2, \; 3, \; \ldots \; 2h+4. \end{cases}$$

$$y^2 = z^2, \qquad z^2 = y^2.$$

$$\text{Moduli: } \varkappa_1^2, \; \varkappa_2^2, \qquad \varkappa_{2h+1}^2.$$

$$\text{II.} \begin{cases} \text{Interv. ipsius } y: \; 1, \; 2, \; 3, \; \ldots \; 2h+4. \\ \text{Interv. ipsius } z: \; 2h+4, \; 1, \; 2, \; \ldots \; 2h+3. \end{cases}$$

$$y^2 = \frac{1}{(1-(1-\varkappa_1^2)z^2)}, \qquad z^2 = \frac{(1-y^2)}{(1-\varkappa_1^2)y^2}.$$

$$\text{Moduli: } \frac{1-\varkappa_1^2}{1-\varkappa_2^2}, \; \frac{1-\varkappa_1^2}{1-\varkappa_3^2}, \; \ldots \; \frac{1-\varkappa_1^2}{1}.$$

: : : : : : : :

$$J \begin{cases} \text{Interv. ipsius } y: \; 1, \; 2, \; 3, \; \ldots \; 2h+4. \\ \text{Interv. ipsius } z: \; (2h+6-i), \; 2h+7-i, \; 2h+8-i, \; \ldots \; 2h+5-i. \end{cases}$$

$$y^2 = \frac{(\varkappa_{i-3}^2 - \varkappa_{i-1}^2) - (\varkappa_{i-2}^2 - \varkappa_{i-1}^2) z^2}{\varkappa_{i-2}^2(\varkappa_{i-3}^2 - \varkappa_{i-1}^2) - \varkappa_{i-3}^2(\varkappa_{i-2}^2 - \varkappa_{i-1}^2) z^2}, \qquad z^2 = \frac{(\varkappa_{i-3}^2 - \varkappa_{i-1}^2)(1-\varkappa_{i-2}^2 y^2)}{(\varkappa_{i-2}^2 - \varkappa_{i-1}^2)(1-\varkappa_{i-3}^2 y^2)}.$$

$$\text{Moduli: } \left(\frac{\varkappa_{i-2}^2 - \varkappa_{i-1}^2}{\varkappa_{i-3}^2 - \varkappa_{i-1}^2}\right)\left(\frac{\varkappa_{i-3}^2 - \varkappa_i^2}{\varkappa_{i-2}^2 - \varkappa_i^2}\right), \; \left(\frac{\varkappa_{i-2}^2 - \varkappa_{i-1}^2}{\varkappa_{i-3}^2 - \varkappa_{i-1}^2}\right)\left(\frac{\varkappa_{i-3}^2 - \varkappa_{i+1}^2}{\varkappa_{i-2}^2 - \varkappa_{i+1}^2}\right), \; \ldots$$

$$\ldots \; \left(\frac{\varkappa_{i-2}^2 - \varkappa_{i-1}^2}{\varkappa_{i-3}^2 - \varkappa_{i-1}^2}\right)\left(\frac{\varkappa_{i-3}^2 - \varkappa_{i-4}^2}{\lambda_{i-2}^2 - \varkappa_{i-4}^2}\right).$$

: : : : : : : :

$$2H+\text{III.}\quad \left\{\begin{array}{llllll}\text{Interv. ipsius } y: & 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots & 2h+4.\\ \text{Interv. ipsius } z: & 3, & 4, & 5, & \ldots\ldots & 2.\end{array}\right\}$$

$$y^2=\frac{\varkappa_{2h}^2-\varkappa_{2h+1}^2 z^2}{\varkappa_{2h+1}^2\varkappa_{2h}^2(1-z^2)},\qquad z^2=\frac{\varkappa_{2h}^2}{\varkappa_{2h+1}^2}\left(\frac{1-\varkappa_{2h+1}^2 y^2}{1-\varkappa_{2h}^2 y^2}\right).$$

$$\text{Moduli:}\quad \frac{\varkappa_{2h+1}^2}{\varkappa_{2h}^2},\quad \left(\frac{\varkappa_{2h+1}^2}{\varkappa_{2h}^2}\right)\left(\frac{\varkappa_{2h}^2-1}{\varkappa_{2h+1}^2-1}\right),\quad \ldots\ldots\quad \left(\frac{\varkappa_{2h+1}^2}{\varkappa_{2h}^2}\right)\left(\frac{\varkappa_{2h}^2-\varkappa_{2h-1}^2}{\varkappa_{2h+1}^2-\varkappa_{2h-1}^2}\right).$$

$$2H+\text{IV.}\quad \left\{\begin{array}{llllll}\text{Interv. ipsius } y: & 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots & 2h+4.\\ \text{Interv. ipsius } z: & 2, & 3, & 4, & \ldots\ldots & 1.\end{array}\right\}$$

$$y^2=-\frac{1-z^2}{\varkappa_{2h+1}^2-z^2},\qquad z^2=\frac{1}{1-\varkappa_{2h+1}^2 y^2}.$$

$$\text{Moduli:}\quad 1-\varkappa_{2h+1}^2,\quad \frac{\varkappa_1^2-\varkappa_{2h+1}^2}{\varkappa_1^2},\quad \ldots\ldots\quad \frac{\varkappa_{2h}^2-\varkappa_{2h+1}^2}{\varkappa_{2h}^2}.$$

Classis *B*.

$$\text{I.}\quad \left\{\begin{array}{lllllll}\text{Interv. ipsius } y: & 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots\ldots & 2h+4.\\ \text{Interv. ipsius } z: & 3, & 2, & 1, & & \ldots\ldots & 4.\end{array}\right\}$$

$$y^2=\frac{1-z^2}{1-\varkappa_1^2 z^2},\qquad z^2=\frac{1-y^2}{1-\varkappa_1^2 y^2}.$$

$$\text{Moduli:}\quad \varkappa_1^2,\quad \frac{\varkappa_1^2-\varkappa_{2h}^2}{1-\varkappa_{2h}^2},\quad \ldots\ldots\quad \frac{\varkappa_1^2-\varkappa_2^2}{1-\varkappa_2^2}.$$

$$\text{II.}\quad \left\{\begin{array}{llllll}\text{Interv. ipsius } y: & 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots & 2h+4.\\ \text{Interv. ipsius } z: & 4, & 3, & 2, & \ldots\ldots & 5.\end{array}\right\}$$

$$y^2=\frac{(1-\varkappa_2^2)-(1-\varkappa_1^2)z^2}{\varkappa_1^2(1-\varkappa_2^2)-\varkappa_2^2(1-\varkappa_1^2)z^2},\qquad z^2=\left(\frac{1-\varkappa_1^2}{1-\varkappa_2^2}\right)\left(\frac{1-\varkappa_2^2 y^2}{1-\varkappa_1^2 y^2}\right).$$

$$\text{Moduli:}\quad \left(\frac{1-\varkappa_1^2}{1-\varkappa_2^2}\right),\quad \left(\frac{1-\varkappa_1^2}{1-\varkappa_2^2}\right)\left(\frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_3^2}\right),\quad \ldots\ldots\quad \left(\frac{1-\varkappa_1^2}{1-\varkappa_2^2}\right)\left(\frac{\varkappa_2^2-\varkappa_3^2}{\varkappa_1^2-\varkappa_3^2}\right).$$

: : : : : : : :

$$J.\quad \left\{\begin{array}{llllll}\text{Interv. ipsius } y: & 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots & 2h+4.\\ \text{Interv. ipsius } z: & i+2, & i+1, & i, & \ldots\ldots & i+3.\end{array}\right\}$$

$$y^2=\frac{(\varkappa_{i-2}^2-\varkappa_i^2)-(\varkappa_{i-2}^2-\varkappa_{i-1}^2)z^2}{\varkappa_{i-1}^2(\varkappa_{i-2}^2-\varkappa_i^2)-\varkappa_i^2(\varkappa_{i-2}^2-\varkappa_{i-1}^2)z^2},\qquad z^2=\left(\frac{\varkappa_{i-2}^2-\varkappa_{i-1}^2}{\varkappa_{i-2}^2-\varkappa_i^2}\right)\frac{1-\varkappa_i^2 y^2}{1-\varkappa_{i-1}^2 y^2}\Bigg).$$

$$\text{Moduli:}\quad \left(\frac{\varkappa_{i-2}^2-\varkappa_{i-1}^2}{\varkappa_{i-2}^2-\varkappa_i^2}\right)\left(\frac{\varkappa_{i-3}^2-\varkappa_i^2}{\varkappa_{i-3}^2-\varkappa_{i-1}^2}\right),\quad \left(\frac{\varkappa_{i-2}^2-\varkappa_{i-1}^2}{\varkappa_{i-2}^2-\varkappa_i^2}\right)\left(\frac{\varkappa_{i-4}^2-\varkappa_i^2}{\varkappa_{i-4}^2-\varkappa_{i-1}^2}\right),\quad \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\quad \left(\frac{\varkappa_{i-2}^2-\varkappa_{i-1}^2}{\varkappa_{i-2}^2-\varkappa_i^2}\right)\left(\frac{\varkappa_i^2-\varkappa_{i+1}^2}{\varkappa_{i-1}^2-\varkappa_{i+1}^2}\right).$$

: : : : : : : :

$2H+\mathrm{III}.$ $\begin{Bmatrix} \text{Interv. ipsius } y: & 1, & 2, & 3, & \dots & 2h+4. \\ \text{Interv. ipsius } z: & 1, & 6, & 5, & \dots & 2. \end{Bmatrix}$

$$y^2 = \frac{1}{\varkappa_{2h+1}^2 z^2}, \quad z^2 = \frac{1}{\varkappa_{2h+1}^2 z^2}.$$

$$\text{Moduli: } \frac{\varkappa_{2h+1}^2}{\varkappa_{2h-1}^2}, \quad \frac{\varkappa_{2h+1}^2}{\varkappa_{2h-1}^2}, \quad \dots \quad \varkappa_{2h+1}^2.$$

$2H+\mathrm{IV}.$ $\begin{Bmatrix} \text{Interv. ipsius } y: & 1, & 2, & 3, & \dots & 2h+4. \\ \text{Interv. ipsius } z: & 2, & 1, & 6, & \dots & 3. \end{Bmatrix}$

$$y^2 = -\frac{z^2}{1-z^2}, \quad z^2 = -\frac{y^2}{1-y^2}.$$

$$\text{Moduli: } 1-\varkappa_{2h+1}^2, \quad 1-\varkappa_{2h}^2, \quad \dots \quad 1-\varkappa_1^2.$$

Has transformationes per idem theorema, quod apud integralia primi ordinis demonstravimus unam ex alia derivari, dummodo ubique loco numeri 6, $2h+4$ ponatur, facile intelligitur.

V.

Quomodo integralia, hucusque tractata, inter limites reales quaslibet contenta, per aggregatum integralium formae:

$$\int_0^u \frac{\psi \sin^2 \mathrm{am}\, u \,.\, \partial u}{\sqrt{[(1-\varkappa_1^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a_1 \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u) \dots (1-\varkappa_1^2 \sin^2 \mathrm{am}_{2h} \sin^2 \mathrm{am}\, u)]}}$$

exprimantur.

Ex iis, quae praemissa sunt, elucet, integrale

$$39. \quad \int_{\alpha_\mu}^x \frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{2h+4})]}},$$

argumento x inter α_μ et $\alpha_{\mu+1}$ versante, per aptam classis A substitutionem quae per formulam (34.) exhibetur, ad huiusmodi integrale

$$40. \quad \int_0^z \frac{\psi z^2 \partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-\varkappa_1^2 z^2)(1-\varkappa_2^2 z^2)\dots(1-\varkappa_{2h+1}^2 z^2)]}},$$

ubi argumenti z valor unitatem haud superet, reduci posse; moduli per aequationes (35.) dantur. Eadem ratione integrale

$$\int_{\alpha_{\mu+1}}^x \frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{2h+4})]}}$$

per formulam (37.), in eandem illam formam transformatur, ubi moduli per (37.) dantur. Vix adnotandum est, has binas transformationes, quas eiusdem secundi intervalli nominaverimus, esse, atque in tabula apud integralia nostra sub eodem utriusque classis numero stare. Quae cum ita sint, integrale

$$\int_{\alpha_\mu}^{x} \frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{2h+4})]}},$$

ipso x in intervallo α_μ et $\alpha_{\mu+1}$ iacente et per integrale (40.), et per integralium

$$\int_0^1 \frac{\psi_1 z^2 \partial z}{\sqrt{\left[(1-z^2)(1-\varkappa_1^2 z^2)\left(1-\frac{\varkappa_1^2-\varkappa_{2h+1}^2}{1-\varkappa_{2h+1}^2}z^2\right)\left(1-\frac{\varkappa_1^2-\varkappa_{2h}^2}{1-\varkappa_{2h}^2}z^2\right)\dots\left(1-\frac{\varkappa_1^2-\varkappa_2^2}{1-\varkappa_2^2}z^2\right)\right]}}$$

$$+\int_0^z \frac{\psi_1 z^2 \partial z}{\sqrt{\left[(1-z^2)(1-\varkappa_1^2 z^2)\left(1-\frac{\varkappa_1^2-\varkappa_{2h+1}^2}{1-\varkappa_{2h+1}^2}z^2\right)\left(1-\frac{\varkappa_1^2-\varkappa_{2h}^2}{1-\varkappa_{2h}^2}z^2\right)\dots\left(1-\frac{\varkappa_1^2-\varkappa_2^2}{1-\varkappa_2^2}z^2\right)\right]}},$$

aggregatum ita exprimi posse, ut argumentum novum < 1 sit, apparet.

Ponamus igitur $z = \sin\operatorname{am}(u, \varkappa_1)$, atque quia $1 > \varkappa_1 > \varkappa_2 > \dots$ $\dots \varkappa_{2h+1}$ est,

$\varkappa^2 = \varkappa_1 \sin\operatorname{am}(a_1, \varkappa_1)$, $\varkappa_3 = \varkappa_1 \sin\operatorname{am}(a_2, \varkappa_1)$, $\dots$ $\varkappa_{2h+1} = \varkappa_1 \sin\operatorname{am}(a_{2h}, \varkappa_1)$.

Habemus igitur:

$$\partial u = \frac{\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-\varkappa_1^2 z^2)]}},$$

atque:

$$\int_{\alpha_\mu}^{x} \frac{Fx\,\partial x}{\sqrt{[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{2h+4})]}}$$

$$\text{aut } = \int_0^u \frac{\psi(\sin^2\operatorname{am} u).\partial u}{\sqrt{[(1-\varkappa_1^2\sin^2\operatorname{am} a_1 \sin^2\operatorname{am} u)\dots(1-\varkappa_1^2\sin^2\operatorname{am} a_{2h}\sin^2\operatorname{am} u)]}},$$

$$\text{aut } = \int_0^{\varkappa} \frac{\psi_1(\sin^2\operatorname{am} v).\partial v}{\sqrt{[(1-\varkappa_1^2\sin^2\operatorname{coam} a_{2h}\sin^2\operatorname{am} v)\dots(1-\varkappa_1^2\sin^2\operatorname{coam} a_1\sin^2\operatorname{am} v)]}}$$

$$+\int_0^v \frac{\psi_1(\sin^2\operatorname{am} v).\partial v}{\sqrt{[(1-\varkappa_1^2\sin^2\operatorname{coam} a_{2h}\sin^2\operatorname{am} v)\dots(1-\varkappa_1^2\sin^2\operatorname{coam} a_1\sin^2\operatorname{am} v)]}}.$$

Illic habemus:

$$\sin^2\operatorname{am}(u, \varkappa_1) = \left(\frac{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1}}{\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{x-\alpha_\mu}{x-\alpha_{\mu+1}}\right),$$

hic:

$$\sin^2\operatorname{am}(v, \varkappa_1) = \left(\frac{\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1}}{\alpha_\mu-\alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{x-\alpha_{\mu+1}}{x-\alpha_{\mu+2}}\right) = \sin^2\operatorname{coam}(u, \varkappa_1).$$

Ex notatione solemni: $\int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-\varkappa_1^2 z^2)]}} = \varkappa$ positum est.

Iam vero inde integralis propositi evolutio duplex in series convergentes secundum sinus anguli $= \frac{\pi u}{2\varkappa}$ multiplorum comparata est. Si enim

formula

$$\frac{\psi(\sin^2 \mathrm{am}\, u)}{\sqrt{[(1-x_1^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a_1 \sin^2 \mathrm{am}\, u)\dots(1-x_1^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a_{2\lambda} \sin^2 \mathrm{am}\, u)]}},$$

aut:

$$\frac{\psi'(\sin^2 \mathrm{am}\, v)}{\sqrt{[(1-x_1^2 \sin^2 \mathrm{coam}\, a_{2\lambda} \sin^2 \mathrm{am}\, v)\dots(1-x_1^2 \sin^2 \mathrm{coam}\, a_1 \sin^2 \mathrm{am}\, v)]}},$$

per theoremata functionum ellipticarum in series convergentes secundum cosinus multiplorum anguli $\frac{\pi u}{2x}$ aut $\frac{\pi v}{2x}$ dissoluta sit, his seriebus per du multiplicatis atque integratione facta, series desideratas adipiscimur.

Inde denique sequitur, cum integrale

$$\int_m^n \frac{Fx\partial x}{\sqrt{[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{2\lambda+4})]}},$$

ubi m et n valoribus quibuslibet realibus gaudent, ad aggregatum integralium formae (39.) reducatur, etiam hoc integrale per aggregatum serierum, quae secundum multiplorum anguli dati sinus progrediuntur, exprimi posse.

Adiiciamus adhuc de transformationibus eiusdem secundi intervalli apud integralia primi ordinis notam, ad utriusque modulos spectantem. Cum enim per utramque integrale

$$\int_{\alpha_\mu}^x \frac{Fx\partial x}{\sqrt{[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_6)]}}$$

ad formam:

$$\int_0^z \frac{\psi.z^2\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-x^2z^2)(1-\lambda^2z^2)(1-\mu^2z^2)]}}$$

reducatur, in utra moduli minores sint, quaestio oritur. Iam vero obtinemus alterius transformationis modulis x^2, λ^2, μ^2 positis, prout habeamus

$$\text{aut: } 1-x^2 > (1-\lambda^2)(1-\mu^2),$$
$$\text{aut: } 1-x^2 = (1-\lambda^2)(1-\mu^2),$$
$$\text{aut: } 1-x^2 < (1-\lambda^2)(1-\mu^2),$$

alterius modulos ultimos deinceps aut minores aut eosdem aut maiores fore.

Posito enim:

$$1 = x^2 \gtreqless (1-\lambda^2)(1-\mu^2),$$

erit:

$$x^2 \lesseqgtr \lambda^2+\mu^2-\lambda^2\mu^2,$$

sive:

$$\frac{x^2-\mu^2}{1-\mu^2} \lesseqgtr \lambda^2, \quad \text{et} \quad \frac{x^2-\lambda^2}{1-\lambda^2} \lesseqgtr \mu^2,$$

quibus conditionibus, cum $\frac{x^2-\mu^2}{1-\mu^2}$, $\frac{x^2-\lambda^2}{1-\mu^2}$ ultimi alterius substitutionis moduli sint, quod erat demonstrandum, demonstratum est.

Inde adhuc sequitur, ut novi moduli l^2 et m^2 minores fiunt, quam λ^2 et μ^2, fore: $1-\lambda^2 < \sqrt{(1-x^2)}$; si enim $1-\lambda^2 \gtreqless \sqrt{(1-x^2)}$ esset, etiam esset $1-\mu^2 > \sqrt{(1-x^2)}$, unde sequeretur: $1-x^2 < (1-\lambda^2)(1-\mu^2)$. Dum igitur λ^2 inter limites x^2 et $(1-\sqrt{(1-x^2)})$ continetur, m^2 inter 0 et $1-\sqrt{(1-x^2)}$ iaceat necesse est. Ergo si μ^2 ipsum quantitatem $1-\sqrt{(1-x^2)}$ superat aut aequat, per substitutionem eiusdem secundi intervalli minimus modulus m^2 inter limites 0 et $1-\sqrt{(1-x^2)}$, atque secundus l^2 inter limites m^2 et $1-\sqrt{(1-x^2)}$ reducitur. Eodem modo, si $\mu^2 < 1-\sqrt{(1-x^2)}$ atque $\lambda^2 > 1-\sqrt{(1-x^2)}$ atque $1-x^2 > (1-\lambda^2)(1-\mu^2)$ fuerit, m^2 intra limites 0 et $1-\sqrt{(1-x^2)}$ atque l^2 intra λ^2 et $1-\sqrt{(1-x^2)}$ diminuuntur. Unde facillime diiudicari potest, utra transformatio integralis (39.) praeferenda sit. Si enim habeamus:

$$\left(\frac{\alpha_{\mu-1}-\alpha_\mu}{\alpha_{\mu-1}-\alpha_{\mu+1}}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu+3}}{\alpha_\mu-\alpha_{\mu+3}}\right) < \left(\frac{\alpha_{\mu-2}-\alpha_\mu}{\alpha_\mu-\alpha_{\mu+2}}\right)\left(\frac{\alpha_{\mu+1}-\alpha_{\mu+2}}{\alpha_{\mu-2}-\alpha_{\mu+1}}\right)$$

transformatio eiusdem numeri classis $(B.)$ minores suppeditabit modulos.

VI.
De tribus integralium Abelianorum cuiusque ordinis generibus principalibus.

Integralia ultraelliptica, quae supra in hanc formam:

$$\int \frac{\psi z^2 \partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-x_1^2 z^2)(1-x_2^2 z^2)\dots(1-x_{2h-3}^2 z^2)]}}$$

reduximus, functione ψz^2 alias aliasque induente formas, haud innumerabilia transcendentium genera distincta constituunt, sed in certa quaedam genera principalia, quippe e quibus, algebraicis functionibus additis, omnia cetera eiusdem ordinis componere licet, dispartiri possunt. Primum simplicissimumque genus integralium Abelianorum $h$ti ordinis oritur, si ψz^2 ut functio rationalis integra $h$tum ipsius z^2 gradum haud superans assumitur. Cuius generis integralia per quamlibet substitutionum nostrarum formae

$$z^2 = \frac{m+ny^2}{p+qy^2},$$

ubi coefficientes ex superioribus capitibus desumi possunt, in eandem ipsorum formam revertuntur. Integralia eiusdem ordinis, ubi ψz^2 aut integra functio superioris ordinis, aut fracta est, simili proprietate gaudere non videntur. De qua re priusquam amplius disseramus, integralium Abelianorum primi ordinis reductionem generalem ponere velimus.

Functio rationalis ψz^2, denominatore in nominatorem ducto, ad aggregatum functionis integrae et fractae, cuius nominatoris gradus denominatoris gradum haud aequat, reducta sit. Iam vero per methodos notissimas functio fracta illa in fractionis simplices resoluta sit, quae hac forma gaudeant:

$$\frac{N}{\left(1-\frac{1}{m^2}z^2\right)^p},$$

ubi constantes N et m^2 quemque valorem realem imaginariumve habere possunt. Inde clarum fit, has duas generales integralium propositorum formas remanere:

$$\int\frac{z^{2m}\partial z}{\sqrt{[(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)(1-\lambda^2z^2)(1-\mu^2z^2)]}},$$

et

$$\int\frac{N\partial z}{\left(1-\frac{1}{m^2}z^2\right)^p\sqrt{[(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)(1-\lambda^2z^2)(1-\mu^2z^2)]}},$$

ad quarum aggregata omnia cetera primi ordinis reduci possint. Illam formam per $Z^{(m)}$, hanc per $Y^{(p)}$ denotemus. Iam vero hic quaestio oritur, quot et quinam numeri m et p sint, ut ad $Z^{(m)}$ et $Y^{(p)}$ ceterae cunctae functiones similes, algebraicis functionibus adiectis, reduci possint.

Ponamus hunc ad finem in aequatione identica:

$$\int U\partial V+\int V\partial U = UV,$$

$$U=\sqrt{[(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)(1-\lambda^2z^2)(1-\mu^2z^2)]}=\Delta z, \qquad V=z^{2m-7}.$$

Evolvamus vero, ante substitutionem introductam, quantitatem U^2 ad dignitates ascendentes ipsius Z^2, ita ut sit:

$$U^2 = 1-(1+A)z^2+(A+B)z^4-(B+C)z^6+Cz^8,$$

ubi positum est:

$$A = \varkappa^2+\lambda^2+\mu^2,$$
$$B = \varkappa^2.\lambda^2+\varkappa^2.\mu^2+\lambda^2.\mu^2,$$
$$C = \varkappa^2.\lambda^2.\mu^2.$$

Tum habemus:

$$\int U\partial V = \int \frac{U^2\partial V}{U}$$
$$= (2m-7)\int \frac{z^{2m-8}\partial z}{U}[1-(1+A)z^2+(A+B)z^4-(B+C)z^6+Cz^8]$$
$$= (2m-7)[Z^{(m-4)}-(1+A)Z^{(m-3)}+(A+B)Z^{(m-2)}-(B+C)Z^{(m-1)}+CZ^{(m)}],$$

atque:

$$\int V\partial U = \int \frac{z^{2m-7}\partial z}{U}[-(1+A)z+2(A+B)z^3-3(B+C)z^5+4Cz^7]$$
$$= -(1+A)Z^{(m-3)}+2(A+B)Z^{(m-2)}-3(B+C)Z^{(m-1)}+4CZ^{(m)}.$$

Quibus formulis congregatis, haec aequationem identicam adipiscimur:

$$1.\quad z^{2m-7}\Delta z = (2m-7)Z^{(m-4)}-(2m-6)(1+A)Z^{(m-3)}$$
$$+(2m-5)(A+B)Z^{(m-2)}-(2m-4)(B+C)Z^{(m-1)}+(2m-3)CZ^{(m)}.$$

Quae formula docet integrale $Z^{(4+h)}$ semper per integralia $Z^{(0)}$, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, $Z^{(3)}$, et algebraicam ipsius x functionem exprimi posse, h quoque valore integro positivo gaudente. Derivatur enim ex formula praemissa haec, si $m=(4+h)$ ponatur:

$$2.\quad Z^{(h+4)} = \frac{z^{2h+1}.\Delta z}{(5+2h)C}-\frac{1+2h}{5+2h}\cdot\frac{1}{C}Z^{(h)}+\frac{2+2h}{5+2h}\cdot\frac{1+A}{C}Z^{(h+1)}$$
$$-\frac{3+2h}{5+2h}\cdot\frac{A+B}{C}Z^{(h+2)}+\frac{4+2h}{5+2h}\cdot\frac{B+C}{C}Z^{(h+3)};$$

unde clarum fit, $Z^{(h+4)}$ per $Z^{(h+3)}$, $Z^{(h+2)}$, $Z^{(h+1)}$, $Z^{(h)}$ exprimi posse, ita ut numero h sensim diminuto ad $Z^{(3)}$, $Z^{(2)}$, $Z^{(1)}$, $Z^{(0)}$ revenire liceat. Adnotemus etiam, integralia $Z^{(-h)}$ quae sub forma Y^h ut speciales casus, ubi $N=\left(-\frac{1}{m^2}\right)^h$ et $\frac{1}{m^2}=\infty$ ponitur, continentur, etiam per quatuor illa integralia exprimi posse. Ponamus enim $m=3-h$ in formula (1.); tum habemus:

$$3.\quad Z^{(-h-1)} = \frac{-z^{-(2h+1)}\Delta z}{2h+1}+\frac{2h}{2h+1}(1+A)Z^{(-h)}-\frac{2h-1}{2h+1}(A+B)Z^{(1-h)}$$
$$+\frac{2h-2}{2h+1}(B+C)Z^{(2-h)}-\frac{2h-3}{2h+1}CZ^{(3-h)},$$

unde clarum fit, indicem h usque ad 0 diminui posse.

Iam vero ad reductionem functionum $Y^{(p)}$ transeamus. Ponamus:

$$U = z\sqrt{[(1-(1+A)z^2+(A+B)z^4-(B+C)z^6+Cz^8)]} = z\Delta z,$$
$$V=\left(1-\frac{1}{m^2}z^2\right)^{-(p-1)};$$

inde fit:

$$4.\quad \begin{cases} \int U\partial V = \frac{2}{m^2}(p-1)\int \frac{\partial z.(z^2-(1+A)z^4+(A+B)z^6-(B+C)z^8+Cz^{10})}{\left(1-\frac{1}{m^2}z^2\right)^p.\Delta z}, \\ \int V\partial U = \int \frac{\partial z.\Delta z}{\left(1-\frac{1}{m^2}z^2\right)^{p-1}} - \int \frac{\partial z((1+A)z^2-2(A+B)z^4+3(B+C)z^6-4Cz^8)}{\left(1-\frac{1}{m^2}z^2\right)^{p-1}.\Delta z}, \end{cases}$$

sive:

$$5.\quad = \int \frac{\partial z(1-2(1+A)z^2+3(A+B)z^4-4(B+C)z^6+5Cz^8)}{\left(1-\frac{1}{m^2}z^2\right)^{p-1}.\Delta z}.$$

Iam vero nominatores formularum (4.) et (5.), quippe qui rationales ipsius z^2 functiones integrae sunt, in seriem finitam ad dignitates ipsius $\left(1-\frac{1}{m^2}z^2\right)$ progredientem, evolvantur. Quam ad finem, priori nominatore per fz^2 denotato, habemus:

$$f(z^2) = f(m^2) - m^2.\frac{\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right)}{1}f'(m^2) + m^4\frac{\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right)^2}{1.2}f''(m^2) - \text{etc.},$$

ubi per $f'(m^2)$, $f''(m^2)$ functiones derivatas ipsius fz^2, quantitate z^2 ut variabili assumta, atque loco ipsius z^2, quantitate m^2 substituta, significamus. Facile videmus nominatorem formulae (5.) esse $=f'(z^2)$; nec non habemus:

$$\begin{aligned} f(m^2) &= m^2-(1+A)m^4+(A+B)m^6-(B+C)m^8+Cm^{10}, \\ f'(m^2) &= 1-2(1+A)m^2+3(A+B)m^4-4(B+C)m^6+5Cm^8, \\ f''(m^2) &= -1.2(1+A)+2.3(A+B)m^2-3.4(B+C)m^4-4.5Cm^6, \\ f'''(m^2) &= 1.2.3(A+B)-2.3.4(B+C)m^2+3.4.5Cm^4, \\ f^{IV}(m^2) &= -1.2.3.4(B+C)+2.3.4.5Cm^2, \\ f^{V}(m^2) &= 1.2.3.4.5C. \end{aligned}$$

Quibus formulis adhibitis, ex aequatione identica:

$$\int U\partial V + \int V\partial U = UV,$$

hanc adipiscimur aequationem:

$$\frac{Nz.\Delta z}{\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right)^{p-1}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{m^2}(p-1)f(m^2)Y^{(p)} - (2p-3)f'(m^2)Y^{(p-1)} + \frac{(2p-4)}{1.2}m^2f''(m^2)Y^{(p-2)} \\ -\frac{2p-5}{1.2.3}m^4f'''(m^2)Y^{(p-3)} + \frac{2p-6}{1.2.3.4}m^6f^{IV}(m^2)Y^{(p-4)} - \frac{2p-7}{1.2.3.4.5}m^8f^{V}(m^2)Y^{(p-5)} \end{array} \right\}$$

Hinc denique hanc generalem formulam reductionis derivamus:

$$6.\quad 2(p-1)[1-(1+A)m^2+(A+B)m^4-(B+C)m^6+Cm^8]Y^{(p)}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} (2p-3)[1-2(1+A)m^2+3(A+B)m^4-4(B+C)m^6+5Cm^8]Y^{(p-1)} \\ +(2p-4)[(1+A)m^2-3(A+B)m^4+6(B+C)m^6-10Cm^8]Y^{(p-2)} \\ +(2p-5)[(A+B)m^4-4(B+C)m^6+10Cm^8]Y^{(p-3)} \\ +(2p-6)[(B+C)m^6-5Cm^8]Y^{(p-4)}+(2p-7)Cm^8Y^{(p-5)}+\dfrac{Nz\Delta z}{\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right)^{p-1}}. \end{array}\right.$$

Qua formula ostenditur, si $p \geqq 2$ ponatur, $Y^{(p)}$ semper per functiones Y cum minoribus indicibus, idonea functione algebraica addita, exprimi posse. Si usque ad $p=2$ pervenimus, $Y^{(2)}$ per $Y^{(1)}$, $Y^{(0)}$, $Y^{(-1)}$, $Y^{(-2)}$, $Y^{(-3)}$ exprimuntur, quarum quatuor ultimae facile ad functiones $Z^{(0)}$, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, $Z^{(3)}$ reduci possunt.

Quae cum ita sint, omnia integralia Abeliana prima ordinis ad has functiones

$$Z^{(0)},\quad Z^{(1)},\quad Z^{(2)},\quad Z^{(3)},\quad Y^{(1)},$$

sive ad haec integralia:

$$\int\frac{\partial z}{\Delta z},\quad \int\frac{z^2.\partial z}{\Delta z},\quad \int\frac{z^4.\partial z}{\Delta z},\quad \int\frac{z^6.\partial z}{\Delta z},\quad \int\frac{N\partial z}{\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right)\Delta z}$$

reduci posse, clare demonstratum est.

Adiiciantur adhuc hic formulae in generali theoria haud supervacaneae, quae ex aequatione (6.), ibi primo termino $=0$ posito, atque $p=2$ facto, emergunt. Habemus enim his positis:

$$1-(1+A)m^2+(A+B)m^4-(B+C)m^6+Cm^8 = 0,$$

sive

$$(1-m^2)(1-m^2\varkappa^2)(1-m^2\lambda^2)(1-m^2\mu^2) = 0.$$

Inde sequuntur hae suppositiones, ut primus terminus evanescat, aut:

$$m^2 = -\frac{1}{\infty},\qquad N=\infty;$$

tum enim fit

$$Y^{(2)}=0,\quad Y^{(1)}=\int\frac{\partial z}{z^2\Delta z^2},\quad m^2Y^{(0)}=\int\frac{\partial z}{\Delta z},\quad m^4Y^{(-1)}=\int\frac{z^2\partial z}{\Delta z}\ \text{etc.}$$

aut:

$$m^2=1,\quad \text{aut } m^2=\frac{1}{\varkappa^2},\quad \text{aut } m^2=\frac{1}{\lambda^2},\quad \text{aut } m^2=\frac{1}{\mu^2}.$$

Inde, functionibus $Z^{(0)}$, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, Z^3 loco ipsorum $Y^{(0)}$, $Y^{(-1)}$, $Y^{(-2)}$, $Y^{(-3)}$ apte introductis, ex aequatione (6.) has formulas memorabiles derivamus:

$$7.\quad \int\frac{\partial z}{z^2\Delta z} = (A+B)Z^{(1)}-2(B+C)Z^{(2)}+3CZ^{(3)}-\frac{\Delta z}{z}.$$

$$8. \int \frac{(1-x^2)(1-\lambda^2)(1-\mu^2)\partial z}{(1-z^2)\Delta z}$$
$$= -(A+B+C)Z^{(0)} + (A+B-C)Z^{(1)} - (2B+C)Z^{(2)} - 3CZ^{(3)} + \frac{z\Delta z}{(1-z^2)}.$$

$$9. \int \frac{\left(1 - \frac{2(1+A)}{x^2} + \frac{3(A+B)}{x^4} - \frac{4(B+C)}{x^6} + \frac{5C}{x^8}\right)\partial z}{(1-x^2z^2)\Delta z}$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{A+B}{x^4} - \frac{2(B+C)}{x^6} + \frac{3C}{x^8}\right)Z^{(0)} - \left(\frac{A+B}{x^4} - \frac{C}{x^8}\right)Z^{(1)} \\ + \left(\frac{2(B+C)}{x^6} - \frac{C}{x^8}\right)Z^{(2)} + \frac{3C}{x^8}Z^{(3)} - \frac{z\Delta z}{1-x^2z^2} \end{array} \right\}.$$

$$10. \int \frac{\left(1 - \frac{2(1+A)}{\lambda^2} + \frac{3(A+B)}{\lambda^4} - \frac{4(A+C)}{\lambda^6} + \frac{5C}{\lambda^8}\right)\partial z}{(1-\lambda^2z^2)\Delta z}$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{A+B}{\lambda^4} - \frac{2(B+C)}{\lambda^6} + \frac{3C'}{\lambda^8}\right)Z^{(0)} - \left(\frac{A+B}{\lambda^4} - \frac{C}{\lambda^8}\right)Z^{(1)} \\ + \left(\frac{2(B+C)}{\lambda^6} - \frac{C}{\lambda^8}\right)Z^{(2)} + \frac{3C}{\lambda^8}Z^{(3)} - \frac{z\Delta z}{1-\lambda^2z^2} \end{array} \right\}.$$

$$11. \int \frac{\left(1 - \frac{2(1+A)}{\mu^2} + \frac{3(A+B)}{\mu^4} - \frac{4(B+C)}{\mu^6} + \frac{5C}{\mu^8}\right)\partial z}{(1-\mu^2z^2)\Delta z}$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{A+B}{\mu^4} - \frac{2(B+C)}{\mu^6} + \frac{3C}{\mu^8}\right)Z^{(0)} - \left(\frac{A+B}{\mu^4} - \frac{C}{\mu^8}\right)Z^{(1)} \\ + \left(\frac{2(B+C)}{\mu^6} - \frac{C}{\mu^8}\right)Z^{(2)} + \frac{3C}{\mu^8}Z^{(3)} - \frac{z\Delta z}{1-\mu^2z^2} \end{array} \right\}.$$

Quae formulae docent, integralia formae $Y^{(p)}$, quorum parameter $\frac{1}{m^2}$ vel uni modulorum, vel unitati aequus est, vel in infinitum abit, semper ad integralia formae $Z^{(0)}$, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, $Z^{(3)}$ algebraica functione adiecta, reduci posse.

Jam vero, ut distributionem integralium propositorum definiamus, ad illam quaestionem generalem reverti licet, ad quaenam integralium formas delabamur, duodecim nostris substitutionibus fundamentalibus in integralia formae:

$$\int \frac{\psi z^2 \partial z}{\Delta z}$$

introductis.

Has enim duodecim substitutiones formae: $z^2 = \frac{m+ny^2}{p+qy^2}$ in quinque illis functionibus, ad quas omnes ceteras reduximus, adhibere debemus. Quo facto, integralia $\int \frac{\partial z}{\Delta z}$ et $\int \frac{z^2 \partial z}{\Delta z}$ in hanc formam abeunt:

$$\int \frac{(A+By^2)\partial y}{\Delta y}.$$

Integralia vero $\int \frac{z^4 \partial z}{\Delta z}$: in horum commutantur integralium aggregatum:

$$\int \frac{(A+By^2)\partial y}{\Delta y} + \int \frac{N\partial y}{\left(1+\frac{qy^2}{p}\right)\Delta y}.$$

Integralia formae: $\int \frac{z^6 \partial z}{\Delta z}$, hanc formam induunt:

$$\int \frac{(A+By^2)dy}{\Delta y} + \int \frac{M\partial y}{\left(1+\frac{q}{p}y^2\right)^2 \Delta y} + \int \frac{N\partial y}{\left(1+\frac{q}{p}y^2\right)^2 \Delta y},$$

quorum integralium secundum per methodos expositas ad talia integralia:

$$\int \frac{(A_1+B_1y^2)\partial y}{\Delta y} + \int \frac{(C_1y^4+D_1y^6)\partial y}{\Delta y} + \int \frac{E\partial y}{\left(1+\frac{q}{p}y^2\right)\Delta y}$$

reducitur, functione algebraica adiecta; ita ut integrale $\int \frac{z^6 \partial z}{\Delta z}$ per hoc aggregatum:

$$\int \frac{(A+By^2)\partial y}{\Delta y} + \int \frac{(Cy^4+Dy^6)\partial y}{\Delta y} + \int \frac{N\partial y}{\left(1+\frac{q}{p}y^2\right)\Delta y} + fy$$

exprimatur, ubi A, B, C, D, N constantes determinandae, atque fy functio algebraica est.

Integralia denique ultima $\int \frac{N\partial z}{\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right)\Delta z}$, per huiusmodi aggregatum exprimuntur:

$$\int \frac{(A+By^2)\partial y}{\Delta y} + \int \frac{N\partial y}{\left(1-\frac{1}{m^2}y^2\right)\Delta z}.$$

Iam vero ex artc. (33.) et (34.) capitis tertii videmus, quantitatem $-\frac{q}{p}$ in omnibus duodecim substitutionibus, vel modulum novi integralis, vel $=1$, vel $=0$, vel $=\infty$ fieri, ita ut integralia formae $Y^{(1)}$, quae apud transformationem integralium $\int \frac{z^4 \partial z}{\Delta z}$ atque $\int \frac{z^6 \partial z}{\Delta z}$ proveniant, ex formulis draemissis (7.), (8.), (9.), (10.), (11.), ad integralia formae $Z^{(0)}$, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, $Z^{(3)}$ reduci possint. Habemus igitur has reductiones, si duodecim substitutiones adhibeamus:

Integralia formae $\int \frac{(A+Bz^2)\partial z}{\Delta z}$, qualibet substitutione fundamentali facta, in eandem formam redeunt.

Integralia formae $\int\frac{(Cz^4+Dz^6)\partial z}{\Delta z}$, qualibet illarum substitutionum adhibita, reductionibus factis ad haec integralia reveniunt, functione algebraica adiecta:

$$\int\frac{(A_1+B_1z^2)\partial z}{\Delta z}+\int\frac{C_1z^4+D_1z^6)\partial z}{\Delta z}.$$

Integralia formae $\int\frac{N\partial z}{\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right)\Delta z}$, qualibet substitutione fundamentali introducta, in huiusmodi integralia abeunt:

$$\int\frac{(A+Bz)^2\partial z}{\Delta z}+\int\frac{N\partial z}{\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right)\Delta z}.$$

Semper igitur ad tria genera integralium reducimur, quae etiam prorsus diversa natura gaudere, eodem modo ac tria genera integralium ellipticorum, videbimus. Vocemus igitur primum genus:

$$\int_c^z\frac{(M_0+M_1z^2)\partial z}{\Delta z}=\Pi_1 z.$$

secundum genus:

$$\int_c^z\frac{(M_2z^4+M_3z^6)\partial z}{\Delta z}=\Pi_2 z,$$

tertium genus:

$$\int_c^z\frac{\partial z}{\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right)\Delta z}=\Pi_3 z,$$

ubi quantitas c constans quaelibet est.

VII.

Theorematis fundamentalis expositio generalis.

Quam distributionem ex natura integralium Abelianorum emanare, theoremate Abeliano fundamentali demonstratur, quippe quod hic exponamus.

Hunc ad finem has functiones integras ipsius x alteram parem, alteram imparem assumamus:

$$12.\quad \begin{cases} A_0+A_1x^2+\text{etc.}+A_nx^{2n}, \\ B_0x+B_1x^3+\text{etc.}+B_px^{2p+1}, \end{cases}$$

utramlibet functionem, per $\Theta_1 x$ denotemus, alteramque per $\Theta_2 x$. Deinde functionem $(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)(1-\lambda^2x^2)(1-\mu^2x^2)$ in duos factores pares

$\varphi_1 x$ et $\varphi_2 x$ discerpamus, ita habeamus:

13. $\sqrt{[(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)(1-\lambda^2 x^2)(1-\mu^2 x^2)} = \sqrt{(\varphi_1 x . \varphi_2 x)} = \Delta x.$

Iam vero dico functiones:

$$(\Theta_1 x)^2(\varphi_1 x) \text{ et } (\Theta_2 x)^2(\varphi_2 x)$$

eiusdem ordinis ipsius x esse non posse, quia numerus quo differentia ordinum ipsorum $(\Theta_1 x)^2$ et $(\Theta_2 x)^2$ exhibetur, formae $4K+2$ est, dum differentia ordinum functionum $\varphi_1 x$ et $\varphi_2 x$ divisore 4 gaudet. Hanc ob rem, $\Theta_1 x$ ut eam ambarum functionum (12.) assumere licet, qua ordo ipsius $(\Theta_1 x)^2 \varphi_1 x$ maior quam ipsius $(\Theta_2 x)^2 \varphi_2 x$ ordo reddatur.

Tum pono productum hoc:

14. $(\Theta_1 x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_2 x)^2 \varphi_2 x = Fx,$

in factores formae $x^2 - x_1^2$ dissolutum esse, ita ut habeamus:

15. $(\Theta_1 x)^2 \varphi_1 x - (\Theta_2 x)^2 \varphi_2 x = A(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \dots (x^2 - x_\mu^2)$

ubi A quantitas ab x non dependens est.

Iam vero coefficientibus A_0, A, etc. atque B_0, B, etc. ut functionibus unius vel plurium variabilium independentium, quas y, z etc. vocamus, tractatis, contra $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, ut constantibus, radices x_1, x_2 etc. functiones quantitatum y, z etc. fore clarum est. Illustrissimum igitur theorema Abelianum, ad nostrum casum specialem restrictum, ita audit:

„Quantitatibus x_1, x_2 etc. ex aequatione (15.) determinatis, hae „relationes trium transcendentium Π_1, Π_2, Π_3 valebunt:

$$\varepsilon_1 \Pi_1 x_1 + \varepsilon_2 \Pi_1 x_2 + \text{etc.} \quad + \varepsilon_\mu \Pi_1 x_\mu + C = o,$$
$$\varepsilon_1 \Pi_2 x_1 + \varepsilon_2 \Pi_2 x_2 + \text{etc.} \quad + \varepsilon_\mu \Pi_2 x_\mu + C = \upsilon,$$
$$\varepsilon_1 \Pi_3 x_1 + \varepsilon_2 \Pi_3 x^2 + \text{etc.} \quad + \varepsilon_\mu \Pi_3 x_\mu + C = \zeta,$$

„ubi C quantitas constans est, quae nec cum quantitatibus y, z, etc. nec „cum coefficientibus A_0, A, etc. B_0, B, etc. mutatur, υ vero functio al„gebraica et ζ functio logarithmica earundem quantitatum vel coefficien„tium, tum denique ε_1, ε_2 etc. $= +1$ vel $= -1$ his aequationibus deter„minantur:

16. $\varepsilon_1 = \dfrac{(\Theta_1 x_1)\sqrt{(\varphi_1 x_1)}}{\Theta_2 x_1 \sqrt{(\varphi_2 x_1)}}, \quad \varepsilon_2 = \dfrac{(\Theta_1 x_2)\sqrt{(\varphi_1 x_2)}}{\Theta_2 x_2 \sqrt{(\varphi_2 x_2)}} \text{ etc.}, \quad \varepsilon_2 = \dfrac{(\Theta_1 x_\mu)\sqrt{(\varphi_1 x_\mu)}}{\Theta_2 x_\mu \sqrt{(\varphi_2 x_\mu)}}.$ “

In producto enim (14.) loco ipsius x^2 prima radicum aequationis (15.) $= x_1^2$ introducta atque per $\delta_y \Theta_1 x_1$ et $\delta_y \Theta_2 x_1$ his functionibus:

$$17. \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial y} + \dfrac{\partial A_1}{\partial y} x_1^2 + \dfrac{\partial A_2}{\partial y} x_1^4 + \text{etc.} \quad + \dfrac{\partial A_n}{\partial y} x^{2n}, \\ \dfrac{\partial B_0}{\partial y} x_1 + \dfrac{\partial B_1}{\partial y} x_1^3 + \dfrac{\partial B_2}{\partial y} x_1^5 + \text{etc.} \quad + \dfrac{\partial B_p}{\partial y} x_1^{2p+1}, \end{cases}$$

apte denotatis, ex (15.) haec aequatio deducitur:

$$18. \quad (\Theta_1 x_1)^2 \varphi_1 x_1 - (\Theta_2 x_1)^2 \varphi_2 x_1 = 0,$$

atque huius differentiale partiale, dum x_1 ut functio ipsius y tractatur:

$$19. \quad F^1 x_1 . \frac{\partial x_1}{\partial y} + 2[\Theta_1 x_1 \delta_y \Theta_1 x_1 . \varphi_1 x_1 - \Theta_2 x_1 . \delta_y \Theta_2 x_1 \varphi_2 x_1] = 0.$$

Hic vero formulis, quae ex aequationibus (16.) facillime deducuntur:

$$\Theta_1 x_1 \varphi_1 x_1 = \varepsilon_1 \Theta_2 x_1 \Delta x_1,$$
$$\Theta_2 x_1 \varphi_2 x_1 = \varepsilon_1 \Theta_1 x_1 \Delta x_1,$$

substitutis, atque utroque termino per $\left(1 - \frac{x_1^2}{m^2}\right) . F^1 x_1 . \Delta x_1$ diviso, nanciscimur:

$$20. \quad \frac{2(\Theta_1 x_1 . \delta_y \Theta_2 x_1 - \Theta_2 x_1 \delta_y \Theta_1 x_1)}{(F^1 x)\left(1 - \frac{x_1^2}{m^2}\right)} = \varepsilon_1 \frac{\partial x_1}{\partial y} . \frac{1}{\left(1 - \frac{x_1^2}{m^2}\right) \Delta x_1} .$$

Sin ponamus:

$$\int_c^{x_1} \frac{\partial x_1}{\left(1 - \frac{x_1^2}{m^2}\right) \Delta x_1} = \Pi_3 x_1,$$

ex aequatione (20.) cum quantitates m^2, $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, c constantes sint, sequitur haec:

$$21. \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \Pi_3 x_1}{\partial y} = \frac{2((\Theta_1 x_1) \delta_y \Theta_2 x_1 - \Theta_2 x_1 \delta_y \Theta_1 x_1)}{\left(1 - \frac{x_1^2}{m^2}\right) F^1 x_1} .$$

Prorsus eadem ratione nanciscimur similem aequationem differentialem partialem pro quaque ceterarum radicum, nimirum:

$$21. \begin{cases} \varepsilon_2 \dfrac{\partial \Pi_3 x_2}{\partial y} = \dfrac{2((\Theta_1 x_2)(\delta_y \Theta_2 x_2) - (\Theta_2 x_2)(\delta_y \Theta_1 x_2))}{\left(1 - \frac{x_2^2}{m^2}\right) F^1 x_2}, \\ \text{etc.} \\ \varepsilon_\mu \dfrac{\partial \Pi_3 x_\mu}{\partial y} = \dfrac{2((\Theta_1 x_\mu)(\delta_y \Theta_2 x_\mu) - (\Theta_2 x_\mu)(\delta_y \Theta_1 x_\mu))}{\left(1 - \frac{x_\mu^2}{m^2}\right) F^1 x_\mu}, \end{cases}$$

Functionis integrae:

$$\Theta_1 x \delta_y \Theta_2 x - \Theta_2 x \delta_y \Theta_1 x$$

ordo numerum $2n + 2p + 1$ superare nequit, quo functionis $F^1 x$ ordo semper maior est; ita ex notissimo theoremate de fractionibus algebraicis sequitur esse:

$$\frac{(\Theta_1 x_1)(\delta_y \Theta_2 x_1) - (\Theta_2 x_1)(\delta_y \Theta_1 x_1)}{\left(1 - \frac{x_1^2}{m_2}\right) F^1 x_1} + \frac{\Theta_1 x_2 \delta_y \Theta_2 x_2 - \Theta_2 x_2 \delta_y \Theta_1 x_2}{\left(1 - \frac{x_2^2}{m^2}\right) F^1 x_2} + \dots$$

$$\dots + \frac{\Theta_1 x_\mu \delta_y \Theta_2 x_\mu - \Theta_2 x_\mu \delta_y \Theta_1 x_\mu}{\left(1 - \frac{x_\mu^2}{m^2}\right) F^1 x_\mu} = \frac{m}{2} \frac{(\Theta_1 m)(\delta_y \Theta_2 m) - (\Theta_2 m)(\delta_y \Theta_1 m)}{F(m)} .$$

Aequationibus igitur (21.) additis, habemus:

$$22.\quad \frac{\partial[\Pi_3 x_1 + \Pi_3 x_2 + \text{etc.} + \Pi_3 x_\mu]}{\partial y} = \frac{m.(\Theta_1 m)(\partial_y \Theta_2 m) - (\Theta_2 m)(\partial_y \Theta_1 m)}{Fm}.$$

eodemque calculo ad variabiles ceteras independentes, z, etc. extenso, iisdemque signis adhibitis:

$$23.\quad \frac{\partial(\Pi_3 x_1 + \Pi_3 x_2 \text{ etc. } + \Pi_3 x_\mu)}{\partial z} = \frac{m.(\Theta_1 m\, \partial_z \Theta_2 m - \Theta_2 m\, \partial_z \Theta_1 m)}{Fm}$$

etc.

Ex his aequationibus differentialibus partialibus, aequatio haec differentialis totalis derivatur, loco Fm valore ex (14.) substituto:

$$24.\quad \partial(\Pi_3 x_1 + \Pi_3 x_2 + \text{etc.} + \Pi_3 x_\mu) = \frac{m(\Theta_1 m.\partial\Theta_2 m - \Theta_2 m \partial\Theta_1 m)}{(\Theta_1 m)^2 \varphi_1 m - (\Theta_2 m)^2 \varphi_2 m}.$$

ubi per $\partial\Theta_2 m$ et $\partial\Theta_1 m$ hae formulae differentiales denotantur:

$$\partial A_0 + m^2 \partial A_1 + m^4 \partial A_2 + \text{etc.} + m^{2n} \partial A_n,$$
$$m\partial B_0 + m^3 \partial B_1 + m^5 \partial B_2 + \text{etc.} + m^{2p+1} \partial B_p.$$

Aequatione (24.) integrata, adipiscimur:

$$25.\quad \Pi_3 x_1 + \Pi_3 x_2 + \text{etc.} + \Pi_3 x_\mu + C = \frac{m}{2\Delta m}\log\frac{\Theta_1 m\sqrt{(\varphi_1 m)} + \Theta_2 m\sqrt{(\varphi_2 m)}}{\Theta_1 m\sqrt{(\varphi_1 m)} - \Theta_2 m\sqrt{(\varphi_2 m)}}.$$

Hac aequatione tertia aequatio theorematis enuntiati exhibetur. Ut utramque priorem eiusdem theorematis aequationem inde derivemus, utrumque terminum aequationis (24.) in seriem secundum dignitates ipsius $\frac{1}{m}$ ascendentes progredientem evolvamus necesse est. Quem ad finem in integrali:

$$\Pi_3 x = \int_a^x \frac{\partial x}{\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)\Delta x},$$

$$1 - \frac{x^2}{m^2} = 1 + \frac{x^2}{m^2} + \frac{x^4}{m^4} + \text{etc.}$$

posito, prior terminus hanc seriem praebet:

$$26.\quad \begin{cases} \partial.\left(\varepsilon_1 \int_a^{x_1} \frac{\partial x_1}{\Delta x_1} + \varepsilon_2 \int_a^{x_2} \frac{\partial x_2}{\Delta x_2} + \text{etc.} + \varepsilon_\mu \int_a^{x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\Delta x_\mu}\right) \\ + \frac{\partial}{m^2}.\left(\varepsilon_1 \int_a^{x_1} \frac{x_1^2 \partial x_1}{\Delta x_1} + \varepsilon_2 \int_a^{x_2} \frac{x_2^2 \partial x_2}{\Delta x_2} + \text{etc.} + \varepsilon_\mu \int_a^{x_\mu} \frac{x_\mu^2 \partial x_\mu}{\Delta x_\mu}\right) \\ + \frac{\partial}{m^4}.\left(\varepsilon_1 \int_a^{x_1} \frac{x_1^4 \partial x_1}{\Delta x_1} + \varepsilon_2 \int_a^{x_2} \frac{x_2^4 \partial x_2}{\Delta x_2} + \text{etc.} + \varepsilon_\mu \int_a^{x_\mu} \frac{x_\mu^4 \partial x_\mu}{\Delta x_\mu}\right) \\ + \text{etc.} \end{cases}$$

Alter terminus ita scriptus:

$$\partial\,.\left\{\frac{m}{2\varDelta m}\log\left(\frac{1+\frac{\Theta_2 m}{\Theta_1 m}\sqrt{\left(\frac{\varphi_2 m}{\varphi_1 m}\right)}}{1-\frac{\Theta_2 m}{\Theta_1 m}\sqrt{\left(\frac{\varphi_2 m}{\varphi_1 m}\right)}}\right)\right\},$$

in hoc differentiale abit:

$$\partial\left\{\left(\frac{m}{\varDelta m}\right).\left[\frac{\Theta_2 m}{\Theta_1 m}\sqrt{\left(\frac{\varphi_2 m}{\varphi_1 m}\right)}\right]+\frac{1}{3}\left(\frac{m}{\varDelta m}\right).\left[\frac{\Theta_2 m}{\Theta_1 m}\sqrt{\left(\frac{\varphi_2 m}{\varphi_1 m}\right)}\right]^3+\text{etc.}\right\}.$$

Cum vero $\Theta_1 m\sqrt{(\varphi_1 m)}$ maiori potestate summa ipsius m, quam $\Theta_2 m\sqrt{(\varphi_2 m)}$ gaudere, assumtum sit, nec non $\frac{\Theta_2 m}{\Theta_1 m}\sqrt{\left(\frac{\varphi_2 m}{\varphi_1 m}\right)}$ functio impar sit, eidem functioni hanc formam tribuere licet:

$$=\frac{1}{m}\left(D_0+D_1\frac{1}{m^2}+D_2\frac{1}{m^4}+\text{etc.}\right).$$

Eodem modo functio $\frac{m}{\varDelta m}$ in huiusmodi seriem secundum potestates ipsius $\frac{1}{m}$ progredientem evoluatur necesse est:

$$\frac{1}{m^3}\left(E_0+E_1\frac{1}{m^2}+\text{etc.}\right).$$

Quibus collectis secundus terminus ad potestates ipsius $\frac{1}{m^2}$ evolutus hac forma gaudebit:

$$27.\quad \frac{\partial}{m^4}.(E_0 D_0)+\partial.\frac{1}{m^6}(E_0 D_1+E_1 D_0+\tfrac{1}{3}D_0^3 E_0)+\text{etc.}$$

ubi E_0, E_1, ... D_0, D_1, ... functiones finitae algebraicae coefficientium ipsorum $\Theta_1 x$ et $\Theta_2 x$ fiunt. Evolutione (26.) cum hac ultima collata, quippe quae pro quoque valore ipsius m valet, nanciscimur has relationes, dum integrationes faciamus:

$$\varepsilon_1\int_c^{x_1}\frac{\partial x_1}{\varDelta x_1}+\varepsilon_2\int_c^{x_2}\frac{\partial x_2}{\varDelta x_2}+\text{etc.}+\varepsilon_\mu\int_c^{x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\varDelta x_\mu}+C=0,$$

$$\varepsilon_1\int_c^{x_1}\frac{x_1^2\,\partial x_1}{\varDelta x_1}+\varepsilon_2\int_c^{x_2}\frac{x_2^2\,\partial x_2}{\varDelta x_2}+\text{etc.}+\varepsilon_\mu\int_c^{x_\mu}\frac{x_\mu^2\,\partial x_\mu}{\varDelta x_\mu}+C=0,$$

$$\varepsilon_1\int_c^{x_1}\frac{x_1^4\,\partial x_1}{\varDelta x_1}+\varepsilon_2\int^{x_2}\frac{x_2^4\,\partial x_2}{\varDelta x_2}+\text{etc.}+\varepsilon_\mu\int_c^{x_\mu}\frac{x_\mu^4\,\partial x_\mu}{\varDelta x_\mu}+C=E_0.D_0,$$

$$\varepsilon_1\int_c^{x_1}\frac{x_1^6\,\partial x_1}{\varDelta x_1}+\varepsilon_2\int_c^{x_2}\frac{x_2^6\,\partial x_2}{\varDelta x_2}+\text{etc.}+\varepsilon_\mu\int_c^{x_\mu}\frac{x_\mu^6\,\partial x_\mu}{\varDelta x_\mu}+C=E_0 D_1+E_1 D_0+\tfrac{1}{3}E_0 D_0^3.$$

Hinc utraque prior relatio in theoremate enuntiata, derivatur.

Prorsus simili ratione integralia Abeliana superiorum ordinum in tria genera diversa dividuntur, ad quae cetera eiusdem ordinis omnia reduci possunt. Quam rem calculi extensi causa praetermittamus. Tria ge-

nera transcendentium hoc modo primo introducta, cum tribus generibus integralium ellipticorum eadem natura gaudere, ex iis quae supra allata sunt, clarum esse videtur.

Ex theoremate allato, theorema de additione functionum Abelianorum ita derivare possumus. Ponamus coefficientes functionum $\Theta_1 x$ et $\Theta_2 x$: A_0, A_1, etc. A_n; B_0, B_1, etc. B_p per $(p+n+1)$ quantitates x_1, x_2, ... x_{p+n+1} ita determinatos, ut habeamus:

$$\Theta_1 x_1 \cdot \surd(\varphi_1 x_1) = \Theta_2 x_1 \surd(\varphi_2 x_1),$$
$$\Theta_1 x_2 \cdot \surd(\varphi_1 x_2) = \Theta_2 x_2 \surd(\varphi_2 x_2),$$
$$\text{etc.}$$
$$\Theta_1 x_{p+n+1} \cdot \surd(\varphi_1 x_{p+n+1}) = \Theta_2 x_{p+n+1} \surd(\varphi_2 x_{p+n+1}),$$

unde $p+n+2$ coefficientium illorum omnes usque ad unum, qui in aequatione (18.) per divisionem tollitur, ut functiones rationales ipsorum x_1, x_2, etc. $\surd(\varphi_1 x_2)$, $\surd(\varphi_1 x_2)$ etc. atque $\surd(\varphi_2 x_1)$, $\surd(\varphi_2 x_2)$ etc. inveniuntur. Quas quantitates x_1, x_2, etc. in locum variabilium independentium y, z etc. successisse, clarum est. Aequatione (18.) vero per productum

$$(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\dots.(x^2-x_{p+n+1}^2)$$

divisa, ceterae quantitates x_{p+n+2}^2, x_{p+n+3}^2, etc. x_μ^2 ut radices aequationis $(\mu-p-n-1)$ti ordinis dantur, cuius coefficientes ipsorum x_1, x_2, etc. $\surd(\varphi_1 x_1)$, $\surd(\varphi_1 x_2)$ etc. $\surd(\varphi_2 x_1)$, $\surd(\varphi_2 x_2)$ etc. functiones rationales fient. Quippe quae aequatio, ordinibus ipsorum $\Theta_1 x$ et $\Theta_2 x$ apte electis, secundum gradum ipsius x_2 haud superat, quo minore gaudere nequit. Sit enim ordo functionis $\varphi_1 x = 2\nu_1$ nec non ipsius $\varphi_2 x = 2\nu_2$, tum sive $\Theta_1 x$ sive $\Theta_2 x$ functio par est, quia functio $(\Theta_1 x)^2 \varphi_1 x$ ordine 2μ gaudet, quem ordo ipsius $(\Theta_2 x)^2 \varphi_2 x$ haud aequat, habemus:

$$2\mu > 2n+\nu_1+2p+1+\nu_2,$$

sive

$$\mu > n+p+\frac{\nu_1+\nu_2}{2}+\tfrac{1}{2},$$

unde sequitur numerus relinquarum radicum:

$$= \mu-n-p-1 > \frac{\nu_1+\nu_2}{2}-\tfrac{1}{2}.$$

Ergo, cum $\nu_1+\nu_2 = 4$ sit, ordo ipsius x^2, in aequatione, de qua diximus, numerum superet, necesse est. Ut vero hic ordo fiat secundus, habemus, si functio $\Theta_1 x$ ordinis $2n$ fuerit, hanc conditionem:

$$\mu = n+p+3 = 2n+\nu_1,$$

sive

$$p = n+\nu_1-3,$$

sin functio $\Theta_1 x$ ordinis $2p+1$ fuerit, hanc aequationem:

sive:
$$\mu = n+p+3 = 2p+1+\nu_1,$$
$$n = p+\nu_1-2.$$
Illic habemus ordinem ipsius $\Theta_1 x.\sqrt{(\varphi_1 x)}$, $=2n+\nu_1$ et ipsius $\Theta_2 x\sqrt{(\varphi_2 x)}$, $=2n+\nu_1-1$, hic vero ordinem ipsius $\Theta_1 x\sqrt{(\varphi_1 x)}$, $=2p+1+\nu$, et ipsius $\Theta_2 x\sqrt{(\varphi_2 x)}$, $=2p+\nu_1$.

Unde videmus in huiusmodi evolutione fractionis:
$$\frac{\Theta_2 x.\sqrt{(\varphi_2 x)}}{\Theta_1 x\sqrt{(\varphi_1 x)}} = D_1\frac{1}{x}+D_1\frac{1}{x^3}+\text{etc.}$$
coefficientem D_0 evanescere non posse, sed functionem algebraicam quantitatum x_1 x_2 etc. fore.

His collatis theorema illustre antea expositum ita enuntiare licet: „Si quantitates x_1, x_2, etc. $x_{\mu-2}$ ut datae assumantur, unicuique trium „harum inter integralia Π_1, Π_2, Π_3 relationum:
$$\Pi_1 x_1+\Pi_1 x_2+\text{etc. }+\Pi_1 x_{\mu-2}$$
$$= -\varepsilon_{\mu-1}\Pi_1 x_{\mu-1}-\varepsilon_\mu \Pi_1 x_\mu - C.$$
$$\Pi_2 x_1+\Pi_2 x_2+\text{etc. }+\Pi_2 x_{\mu-2}$$
$$= -\varepsilon_{\mu-1}\Pi_2 x_{\mu-1}-\varepsilon_\mu \Pi_2 x_\mu - C+M_2 E_0 D_0+M_3(E_0 D_1+E_1 D_0+\tfrac{1}{3}E_0 D_0^3),$$
$$\Pi_3 x_1+\Pi_3 x_2+\text{etc. }+\Pi_3 x_{\mu-2}$$
$$= -\varepsilon_{\mu-1}\Pi_3 x_{\mu-1}-\varepsilon_\mu \Pi_3 x_\mu - C+\frac{m}{2\Delta m}\log\frac{\Theta_1 m\sqrt{(\varphi_1 m)}+\Theta_2 m\sqrt{(\varphi_2 m)}}{\Theta_1 m\sqrt{(\varphi_1 m)}-\Theta_2 m\sqrt{(\varphi_2 m)}},$$
„haec aequatio quadratica ipsius x^2 respondet,
$$\frac{(\Theta_1 x)^2.\varphi_1 x-(\Theta_2 x)^2.\varphi_2 x}{(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\dots(x^2-x_{\mu-2}^2)} = A(x^2-x_{\mu-1}^2)(x^2-x_\mu^2) = 0.$$
„Ubi habemus:
$$\Delta x = \sqrt{[(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)(1-\lambda^2 x^2)(1-\mu^2 x^2)]} = \sqrt{(\varphi_1 x\,\varphi_2 x)}$$
„atque functionis $\varphi_1 x$ ordine $=2\nu_1$, ipsius $\varphi_2 x$ ordine $=2\nu_2$ posito, si „numerum $\mu=2n+\nu_1$ ponamus:
$$\Theta_1 x = A_0+A_1 x^2+\text{etc. }+A_n x^{2n},$$
$$\Theta_2 x = B_0+B_1 x^3+\text{etc. }+B_{n+\nu_1-3}x^{2(n+\nu_1)-6},$$
„sin numerum $\mu=2p+1+\nu_1$ ponamus:
$$\Theta_1 x = A_0 x+A_1 x^3+\text{etc. }+A_p x^{2p+1},$$
$$\Theta_2 x = B_0\ \ +B_1 x^2+\text{etc. }+B_{p+\nu_1-2}x^{2(p+\nu_1-2)}.$$
„Coefficientes functionum $\Theta_1 x$ et $\Theta_2 x$ his aequationibus determinantur:
$$\Theta_1 x_1\sqrt{(\varphi_1 x_1)} = \Theta_2 x_1\sqrt{(\varphi_2 x_1)},$$
$$\Theta_1 x_2\sqrt{(\varphi_1 x_2)} = \Theta_2 x_2\sqrt{(\varphi_2 x_2)},$$
$$\text{etc.}$$
$$\Theta_1 x_{\mu-2}\sqrt{(\varphi_1 x_{\mu-2})} = \Theta_2 x_{\mu-2}\sqrt{(\varphi_2 x_{\mu-2})}.$$

„Functiones algebraicae, quas per D et E denotavimus, ut coefficientes „harum serierum dantur:

$$\frac{\Theta_2 x}{\Theta_1 x}\sqrt{\left(\frac{\varphi_2 x}{\varphi_1 x}\right)} = D_0\frac{1}{x} + D_1\frac{1}{x^3} + \text{etc.}$$

$$\frac{x}{\Delta x} = E_0\frac{1}{x^3} + E_1\frac{1}{x^5} + \text{etc.}$$

„quantitates denique $\varepsilon_{\mu-1}$ et ε_μ inde ex his ambabus aequationibus inve- „niuntur:

$$\varepsilon_{\mu-1} = \frac{\Theta_1 x_{\mu-1}}{\Theta_2 x_{\mu-1}}\sqrt{\left(\frac{\varphi_1 x_{\mu-1}}{\varphi_2 x_{\mu-1}}\right)}, \quad \varepsilon_\mu = \frac{\Theta_1 x_\mu}{\Theta_2 x_\mu}\sqrt{\left(\frac{\varphi_1 x_\mu}{\varphi_2 x_\mu}\right)}."$$

Scholion.

Aequatio quadratica, cuius radices $x_{\mu-1}^2$ et x_μ^2 sunt, duabus aequationibus algebraicis inter quantitates $x_1^2, x_2^2, \ldots x_\mu^2$ aequivalet, pro binis aequationibus transcendentalibus, quae ex arbitriis nominatoris ipsius $\Pi_1 x$ coefficientibus originem trahunt, locum tenens. Quas aequationes protinus ex theoremate ipso provenire, alio loco ostendemus.

Inde ex hoc theoremate, numeros ν_1 et ν_2 quibuscunque modis, fieri potest, ut summam $=4$ efficiant, mutantes, totidem varias suppositiones aequationis (18.) derivare licet, quibus factis aggregatum quotquot datorum integralium Abelianorum primi ordinis, ad aggregatam duorum reducuntur.

Adnotandum adhuc est, Cl. Le Gendre in commentatione iam citata (Fonctions elliptiques, troisième supplement §. III. art. 220.) integralia huius formae:

$$\int\frac{\partial x f x}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}}$$

in tria genera dividentem, in errorem inductum esse, cum obtinuerit integralia formae:

$$\int\frac{x^e\,\partial x}{\sqrt{(\varphi x)}} = \psi x,$$

nisi numerus e minor quam $\frac{\lambda}{2}-1$ sive $\frac{\lambda-1}{2}$ assumatur, prout λ, ordo functionis φx, par sive impar fuerit, functione algebraica adiecta comparari posse, hancque ob rem secundum genus horum transcendentium constituere. E notatione enim illic introducta, est:

$$\Sigma\psi x = C + \Pi X$$

ubi per ΠX coefficiens ipsius $\frac{1}{x}$, in evolutione secundum ascendentes ipsius $\frac{1}{x}$ potestates progrediente, functionis huius:

$$\frac{x^e}{\sqrt{(\varphi x)}}\log\left(\frac{\Theta x\sqrt{(\varphi_1 x)}+\Theta_1 x\sqrt{(\varphi_2 x)}}{\Theta x\sqrt{(\varphi_1 x)}-\Theta_1 x\sqrt{(\varphi_2 x)}}\right)$$

denotatur, ibi posito:

$$\begin{aligned}\Theta x &= a_0+a_1x+\text{etc.} \quad +a\;x^n,\\ \Theta_1 x &= b_0+b_1x+\text{etc.} \quad +b_px^p,\\ \varphi_1 x &= \alpha_0+\alpha_1x+\text{etc.} \quad +\alpha_\nu x^\nu,\\ \varphi_2 x &= \beta_0+\beta_1x+\text{etc.} \quad +\beta_\mu x^\mu,\\ \sqrt{(\varphi_1 x\cdot\varphi_2 x)} &= \sqrt{(\varphi x)}.\end{aligned}$$

Iam vero facillime intelligitur, hanc functionem ΠX etiam logarithmicam fieri posse. Cum enim sit $\nu_1+\nu_2=\lambda$, numero λ ut pari assumto, ponamus:

$$2(n-p)=\mu-\nu,$$

tum fractione $\frac{x^e}{\sqrt{(\varphi x)}}$ in huiusmodi seriem dissoluta:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\lambda}{2}-e}[E_0+E_1\frac{1}{x}+E_2\frac{1}{x^2}+\text{etc.}],$$

et functione:

$$\log\left(\frac{\Theta x\sqrt{(\varphi_1 x)}+\Theta_1 x\sqrt{(\varphi_2 x)}}{\Theta x\sqrt{(\varphi_1 x)}+\Theta_1 x\sqrt{(\varphi_2 x)}}\right)$$

in huius formae seriem abeunte:

$$\log\left(\frac{a_n\sqrt{\alpha_\nu}+b_p\sqrt{\beta_\mu}}{a_n\sqrt{\alpha_\nu}-b_p\sqrt{\beta_\mu}}\right)+D_1\frac{1}{x}+D_2\frac{1}{x^2}+\text{etc.}$$

habemus, $e=\frac{\lambda}{2}-1$ posito:

$$\Pi X=E_0\log\left(\frac{a_n\sqrt{\alpha_\nu}+b_p\sqrt{\beta_\mu}}{a_n\sqrt{\alpha_\nu}+b_p\sqrt{\beta_\mu}}\right),$$

atque $e=\frac{\lambda}{2}$ posito:

$$\Pi X=E_0D_1+E_1\log\left(\frac{a_n\sqrt{\alpha_\nu}+b_p\sqrt{\beta_\mu}}{a_n\sqrt{\alpha_\nu}+b_p\sqrt{\beta_\mu}}\right)$$

etc.

Haud praetermittamus adnotare, posito $2(n-p)=\mu-\nu$ numerum novorum integralium, per quorum aggregatum, quotquot datorum integralium eiusdem formae aggregatum, exprimitur, quam minimo valore $=\frac{\lambda}{2}-1$ gaudere. Habemus enim numero omnium radicum ϱ posito, quia $2(n-p)=\mu-\nu$ est:

$$\varrho=2n+\nu=2p+\mu$$

ergo:

$$\varrho = n+p+\frac{\nu+\mu}{2} = n+p+\frac{\lambda}{2}.$$

Numerus datorum integralium $= n+p+1$ esse debet, ergo numerus novorum est:

$$= \varrho-n-p-1 = \frac{\lambda}{2}-1. \quad \text{q. e. d.}$$

Cum primum igitur integralium formae:

$$\int\frac{x^e\partial x}{\sqrt{(\varphi x)}}$$

aggregatum, per $\frac{\lambda}{2}-1$ integralia nova exprimere velimus, functionem logarithmicam adiiciamus necesse est. Unde clarum fit, illa integralia, si λ par est, atque $e > \frac{\lambda}{2}-2$, ad tertium genus transcendentium, quippe quod, functione logarithmica adiecta, comparatur, referenda esse.

Omnia, quae de integralibus Abelianis primi ordinis hactenus attulimus, sine ulla difficultate ad ceteros ordines extendi possunt. Quorum ordinum integralia eodem modo in terna genera diversa dividuntur, quorum primum quantitate constante, secundum functione algebraica, tertium functione logarithmica adiecta, comparationem admittit. Haec vero hic non exposita sunt, partim quia per se ex iis quae attulimus emanant, partim quia in disquisitionibus nostris altioribus, inprimis integralia Abeliana primi ordinis, proxima ad integralia elliptica, amplexi sumus.

17.

Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences de tous les ordres.

(Par Mr. *Guillaume Libri.*)

(Lu à l'Académie Royale des sciences de Paris le 28. Octobre 1833.)

Introduction.

Il existe en analyse plusieurs questions qu'on sait résoudre seulement dans les cas particuliers, mais dont on ne connait pas la résolution générale. Je me propose de prouver, dans une autre occasion, que l'on possède tous les élémens nécessaires pour écrire en analyse les opérations particulières qu'on sait effectuer, et pour en déduire dans tous les cas la formule générale cherchée. Mais dans le mémoire que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie, je m'occupe seulement d'une question spéciale du genre de celles que je viens d'indiquer: c'est-à-dire de l'intégration des équations linéaires aux différences de tous les ordres.

On sait que dans toute équation aux différences, si l'on donne une valeur déterminée à la variable, on pourra toujours trouver l'expression de l'inconnue à l'aide d'éliminations successives. Integrer l'équation proposée n'est autre chose que trouver le résultat d'un nombre indéfini d'éliminations. Non seulement ce problème n'a pas été résolu daus toute sa généralité, mais même dans les équations qu'on appelle linéaires, on ne sait résoudre complétement que celle du premier ordre, dont l'intégrale a été donnée par Lagrange. L'intégration des équations linéaires aux différences est une question d'autant plus importante, qu'elle se présente lorsqu'on cherche l'expression en série de l'intégrale des équations différentielles linéaires, équations qui se rencontrent sans cesse dans les applications de l'analyse au calcul des phenomènes naturels.

En 1827 j'ai publié un mémoire sur quelques formules générales d'analyse, dans lequel je suis parvenu à exprimer le terme général du développement du polynome, sans passer par les termes précédens, comme on l'avait fait jusqu'alors. Pour arriver à cette formule j'ai dù intégrer une équation linéaire aux différences d'ordre indéfini. Maintenant pour trouver l'intégrale d'une équation linéaire aux différences d'un ordre determiné

quelconque, j'ai taché de la réduire à une autre équation d'ordre indéfini du genre de celles que j'avais intégrées dans le mémoire cité. A cet effet j'ai supposé que l'équation proposée était d'ordre indéfini, et puis j'ai mulplié chacun de ses termes par une fonction discontinue telle qu'elle devint zéro pour tous les termes ajoutés à l'équation proposée, et qu'elle fut égale à l'unité pour tous les termes compris dans cette équation. De cette manière ayant ramené l'équation proposée à une autre équation que j'avais déjà intégrée, je n'ai eu qu'à effectuer les substitutions pour avoir l'intégrale cherchée. Dans ce mémoire je donne l'intégrale de l'équation linéaire aux différences du second ordre à coefficiens variables. Par une analyse absolument semblable, on intégrerait toutes les équations linéaires aux différences des ordres supérieurs.

Les fonctions discontinues que j'ai choisies pour facteurs, sont d'une grande simplicité. Je les ai employées pour la première fois dans un mémoire qui a paru récemment dans le Journal de Math. de Mr. Crelle. On pourrait se servir également des autres fonctions discontinues déjà connues, et on résoudrait également le problème.

Analyse.

Etant proposée l'équation aux différences d'ordre indéfini

$$y_{x_0} = \varphi_{x_0}(x_0)y_0 + \varphi_{x_0-1}(x_0)y_1 + \varphi_{x_0-2}(x_0)y_2 + \varphi_{x_0-3}(x_0)y_3 + x_{x_0-4}(x_0)y_4 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \varphi_2(x_0)y_{x_0-2} + \varphi_1(x_0)y_{x_0-1};$$

si l'on y substitue successivement les valeurs de y_2, y_3, y_4, etc., déduites des mêmes équations, on aura la série

$$\begin{aligned}
y_{x_0} = {} & \varphi_{x_0}(x_0)y_0 + \varphi_{x_0-1}(x_0)y_1 \\
& + \varphi_{x_0-2}(x_0)\{\varphi_2(2)y_0 + \varphi_1(2)y_1\} \\
& + \varphi_{x_0-3}(x_0)\{\varphi_3(3)y_0 + \varphi_2(3)y_1 + \varphi_1(3)[\varphi_2(2)y_0 + \varphi_1(2)y_1]\} \\
& + \varphi_{x_0-4}(x_0)\left\{\begin{matrix}\varphi_4(4)y_0 + \varphi_3(4)y_1 + \varphi_2(4)\{\varphi_2(2)y_0 + \varphi_1(2)y_1\} \\ + \varphi_1(4)\{\varphi_3(3)y_0 + \varphi_2(3)y_1(3)[\varphi_2(2)y_0 + \varphi_1(2)y_1]\}\end{matrix}\right\} \\
& + \varphi_{x_0-5}(x_0)\left\{\begin{matrix}\varphi_5(5)y_0 + \varphi_4(5)y_1 + \varphi_3(5)(\varphi_2(2)y_0 + \varphi_1(2)y_1) \\ \qquad + \varphi_2(5)\{\varphi_3(3)y_0\varphi_2(3)y_1 + \varphi_1(3)[\varphi_2(2)y_0 + \varphi_1(2)y_1]\} \\ + \varphi_1(5)[\varphi_4(4)y_0 + \varphi_3(4)y_1 + \varphi_2(4)(\varphi_2(2)y_0 + \varphi_1(2)y_1) \\ \qquad + \varphi_1(4)\{\varphi_3(3)y_0 + \varphi_2(3)y_1 + \varphi_1(3)[\varphi_2(2)y_0 + \varphi_1(2)y_1]\}]\end{matrix}\right. \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \varphi_{x_0-n}(x_0)A_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \varphi_2(x_0)\{\varphi_{x_0-2}(x_0-2)y_0 + \varphi_{x_0-3}(x_0-2)y_1 + \text{etc.}\} \\
& + \varphi_1(x_0)\{\varphi_{x_0-1}(x_0-1)y_0 + \varphi_{x_0-2}(x_0-1)y_1 + \text{etc.}\}
\end{aligned}$$

dans laquelle la loi des termes est manifeste, car le terme A_u se forme en changeant x_0 en u dans tous les termes précédens.

A présent si l'on partage cette série en autant de séries partielles qu'il y a de facteurs, ou, ce qui revient au même, si l'on groupe successivement tous les termes composés d'un seul, ou de deux, ou de trois facteurs, et ainsi de suite (en ne considérant généralement $\varphi_0(u)y_0+\varphi_1(u)y_1$ que comme un seul facteur) on aura l'équation

$$y_{x_0}=\left\{\begin{array}{l} B_1 \\ +B_2 \\ \\ \\ +B_3= \\ \\ \\ \\ +\text{etc.}\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \varphi_{x_0}(x_0)y_0+\varphi_{x_0-1}(x_0)y_1 \\ +\varphi_{x_0-2}(x_0)(\varphi_2(2)y_0+\varphi_1(2)y_1)+\varphi_{x_0-3}(x_0)(\varphi_3(3)y_0+\varphi_2(3)y_1) \\ \qquad\qquad +\varphi_{x_0-4}(x_0)(\varphi_4(4)y_0+\varphi_3(4)y_1)\ldots \\ \qquad\qquad \ldots+\varphi_2(x_0)(\varphi_{x_0-2}(x_0-2)y_0+\varphi_{x_0-3}(x_0-2)y_1) \\ +\varphi_{x_0-3}(x_0)\{\varphi_1(3)(\varphi_2(2)y_0+\varphi_1(2)y_1)\} \\ +\varphi_{x_0-4}(x_0)\{\varphi_2(4)(\varphi_2(2)y_0+\varphi_1(2)y_1)+\varphi_1(4)(\varphi_3(3)y_0+\varphi_2(3)y_1)\}\ldots \\ \qquad \ldots+\varphi_2(x_0)\left\{\begin{array}{l}\varphi_{x_0-4}(x_0-2)(\varphi_2(2)y_0+\varphi_1(2)y_1) \\ +\varphi_{x_0-6}(x_0-2)(\varphi_3(3)y_0+\varphi_2(3)y_1)\ldots+\text{etc.}\end{array}\right\} \\ +\text{etc.}\end{array}\right.$$

dans laquelle on a indiqué par B_1, B_2, B_3, etc. les séries composées d'un seul, de deux, de trois facteurs etc.

Maintenant la série B_2 a pour terme général

$$\varphi_{x_0-x_1}(x_0)(\varphi_{x_1}(x_1)y_0+\varphi_{x_1-1}(x_1)y_1)$$

(pourvu que l'on donne successivement à x_1 toutes les valeurs 2. 3, 4, ... x_0-1) et partant on aura

$$B_2=\sum_{x_1=2}^{x_1=x_0}\varphi_{x_0-x_1}(x_0)(\varphi_{x_1}(x_1)y_0+\varphi_{x_1-1}(x_1)y_1).$$

De même la série B_3 a pour terme général

$$\varphi_{x_0-x_1}(x_0)\varphi_{x_1-x_2}(x_1)(\varphi_{x_2}(x_2)y_0+\varphi_{x_2-1}(x_2)y_1)$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{où l'on doit faire successivement} \\ \quad x_1=3,4,5,\ldots.x_0-1, \\ \quad x_2=2,3,4,\ldots.x_1-1\end{array}\right)$$

d'où l'on déduira

$$B_3=\sum_{x_1=3}^{x_1=x_0-1}\ \sum_{x_2=2}^{x_2=x_1}\varphi_{x_0-x_1}(x_0)\varphi_{x_1-x_2}(x_1)(\varphi_{x_2}(x_2)y_0+\varphi_{x_2-1}(x_2)y_1).$$

Il est évident qu'en continuant de la même manière on obtiendra en général

$$B = \sum_{x_1=u}^{x_1=x_0} \sum_{x_2=u-1}^{x_2=x_1} \cdots \sum_{x_{u-1}=2}^{x_{u-1}=x_{u-1}} \varphi_{x_0-x_1}(x_0)\,\varphi_{x_1-x_2}(x_1)\,\varphi_{x_2-x_3}(x_2)\cdots$$

$$\cdots(\varphi_{x_{u-1}}(x_{u-1})y_0+\varphi_{x_{u-1}-1}(x_2)y_1).$$

Et si l'on fait pour abréger,

$$\sum_{x_1=u}^{x_1=x_0} \sum_{x_2=u-1}^{x_2=x_1} \cdots \sum_{x_{u-1}=2}^{x_{u-1}=x_{u-2}} = e^{\sum_{s=1}^{s=u} \log \sum_{x_s=u-s+1}^{x_s=x_{s-1}}}$$

on aura aussi

$$B_u = e^{\sum_{s=1}^{s=u} \log \sum_{x_s=u-s+1}^{x_s=x_{s-1}}} \varphi_{x_0-x_1}(x_0)\,\varphi_{x_1-x_2}(x_1)\cdots(\varphi_{x_{u-1}}(x_{u-1})y_0+\varphi_{x_{u-1}-1}(x_{u-1})y_1)$$

$$= e^{\sum_{s=1}^{s=u} \log \sum_{x_s=u-s+1}^{x_s=x_{s-1}}} (\varphi_{x_{u-1}}(x_{x-1})y_0+\varphi_{x_{u-1}-1}(x_{u-1})y_1)\,[\varphi_{x_{u-2}-x_{u-1}}(x_{u-2})]^{u-2}.$$

Et enfin

$$y_{x_0} = B_1+B_2+B_3\cdots+B_{x_0-1}$$

$$= \begin{cases} \varphi_{x_0}(x_0)y_0+\varphi_{x_0-1}(x_0)y_1 \\ +\sum_{u=2}^{u=x_0} e^{\sum_{s=1}^{s=u} \log \sum_{x_s=u-s+1}^{x_s=x_{s-1}}} (\varphi_{x_{u-1}}(x_{u-1})y_0+\varphi_{x_{u-1}-1}(x_{u-1})y_1)\,[\varphi_{x_{u-1}-x_{u-1}}(x_{u-2})]^{u-2}. \end{cases}$$

L'analyse précédente n'est qu'une répétition de celle qui nous avait déjà servi à trouver le développement du polynome (*Mémoires de math. et de phys. Tom. I. pag.* 3—6). Nous allons voir maintenant comment elle peut s'appliquer à l'intégration de l'équation linéaire aux différences du second ordre.

Soit proposée l'équation linéaire du second ordre

$$y_z = a_z\,y_{z-1} + b_z\,y_{z-2} + C_z$$

dans laquelle a_z, b_z, c_z, sont des fonctions de z. On sait qu'on peut toujours la réduire à une autre équation linéaire aussi et du second or re, qui ne contiendra de terme en z seulement. Supposons q ue cett nouvelle équation soit de la forme

$$y_{x_0} = f_1(x_0)\,y_{x_0-1} + f_2(x_0)\,y_{x_0+2};$$

si l'on fait en général

$$\varphi_u(x_0) = \frac{f_u(x_0)}{1+0^{\frac{n}{2}-u}}$$

(u étant un nombre entier positif).

on aura toujours

$$\varphi_u(x_0) = 0, \quad (\text{lorsque } u > 2)$$

et

$$\varphi_u(x_0) = 1, \quad (\text{lorsque } u < 3)$$

On aura donc identiquement

$$y_{x_0} = f_1(x_0)y_{x_0-1} + f_2(x_0)y_{x_0-2}$$
$$= \varphi_{x_0}(x_0)y_0 + \varphi_{x_0-1}(x_0)y_1 + \varphi_{x_0-2}(x_0)y_2) \ldots + \varphi_2(x_0)y_{x_0-2} + \varphi_1(x_0)y_{x_0-1};$$

et comme cette équation, d'après ce que nous avons déjà vu, a pour intégrale

$$y_{x_1} = \varphi_{x_0}(x_0)y_0 + \varphi_{x_0-1}(x_0)y_1$$
$$+ \sum_{u=2}^{u=x_0} e^{\sum_{s=1}^{s=2} \log \sum_{x_s=u-s+1}^{x_s=x_{s-1}}} (\varphi x_{u-1}(x_{u-1})y_0 + \varphi x_{u-1}-1(x_{u-1})y_1)[\varphi x_{u-2}-x_{u-1}(x_{u-2})]^{u-2};$$

on aura enfin, en substituant en général la valeur de

$$\varphi_p(x_0) = \frac{f_p(x_0)}{1+0^{\frac{s}{2}-p}},$$

$$y_{x_0} = \frac{f_{x_0}(x_0)y_0}{1+0^{\frac{s}{2}-x_0}} + \frac{f_{x_0-1}(x_0)y_1}{1+0^{\frac{1}{2}-x_0-1}}$$
$$+ \sum_{u=2}^{u=x_0} e^{\sum_{s=1}^{s=u} \log \sum_{x_s=u-s+1}^{x_s=x_{s-1}}} \left(\frac{f_{x_{u-1}}(x_{u-1})y_0}{1+0^{\frac{s}{2}-x_{u-1}}} + \frac{f_{x_{u-1}}(x_{u-1})y_1}{1+0^{\frac{s}{2}-x_{u-1}-1}}\right)\left[\frac{f_{x_{u-2}-x_{u-1}}(x_{u-2})}{1+0^{\frac{s}{2}-x_{u-2}+x_{u-1}}}\right]^{u-2}$$

et cette formule donnera l'intégrale de l'équation linéaire du second ordre

$$y_{x_0} = f_1(x_0)y_{x_0-1} + f_2(x_0)y_{x_0-2},$$

en observant que la série des fonctions

$$f_1(x_0), \quad f_2(x_0), \quad \ldots \quad f_r(x_0), \quad \text{etc.}$$

est tout à fait arbitraire, pourvu que f_1 et f_2 correspondent aux valeurs qui se déduisent de l'équation proposée et que parmi les autres fonctions $f_3(x_0)$, $f_4(x_0)$, etc. il n'y en ait aucune qui devienne infinie.

Pour transformer l'équation du second ordre, en une équation d'ordre indéfini, nous avons multiplié par le facteur $\frac{1}{1+0^{\frac{s}{2}-u}}$, mais on pourra se servir de toute autre fonction discontinue $\psi(u)$ telle qu'on ait $\psi(u) = 0$, lorsque $u > 2$, et $\psi(u) = 1$, lorsque $u < 2$ (u étant un nombre entier positif quelconque).

Il est clair que par la même méthode on parviendrait à intégrer toutes les équations linéaires aux différences des degrés supérieurs. Seulement si l'on voulait, par exemple, intégrer l'équation du troisième ordre

$$y_{x_0} = f_1(x_0)\, y_{x_0-1} + f_2(x_0)\, y_{x_0-2} + f_3(x_0)\, y_{x_0-3},$$

après l'avoir transformée comme ci-dessus dans l'équation d'ordre indéfini

$$y_{x_0} = \varphi_{x_0}(x_0)\, y_0 + \varphi_{x_0-1}(x_0)\, y_1 + \varphi_{x_0-2}(x_0)\, y_2 + \varphi_{x_0-3}(x_0)\, y_3 \ldots + \varphi_1(x_0)\, y_{x_0-1}$$

il ne faudra commencer la substitution que par y_3; en laissant y_0, y_1, y_2, qui seront les trois constantes arbitraires de l'intégrale.

18.

Mémoire sur les intégrales définies aux différences finies.

(Par Mr. *Guillaume Libri.*)

(Lu à l'Académie Royale des sciences de Paris, le 8. Juillet 1833.)

Introduction.

La théorie des intégrales définies a occupé dans ces derniers tems les géomètres les plus célèbres. C'est surtout en cultivant cette branche du calcul intégral que les analystes sont arrivés à ces belles formules de transformation qui ont tant perfectionné l'analyse des équations aux differentielles partielles, et qui par suite ont contribué puissamment aux progrès de la physique mathématique. Mais en s'occupant presqu'exclusivement des intégrales définies aux différentielles, on a négligé beaucoup trop la théorie des intégrales définies aux differences. Il est vrai que par le théorème de Mr. *Fourier* on peut toujours passer de l'un à l'autre de ces genres d'intégrales: mais les formules qu'on obtient de cette manière, sont très difficiles à calculer et ne conduisent presque jamais à des résultats finis. Quant aux séries infinies dont on connait la somme, elles ne sont autre chose que des intégrales aux différences finies; mais ces intégrales ont toujours pour limites zéro et l'infini, et on en cherche les valeurs par des méthodes toutes particulières.

Maintenant, il m'a semblé que dans l'état actuel de l'analyse, il était nécessaire de considérer généralement la théorie des intégrales définies aux différences finies, quels que fussent les limites de l'intégration. Le sujet est neuf et fécond; mais dans ce mémoire je me bornerai à exposer les recherches que j'ai faites sur les intégrales aux diffférences des fonctions circulaires; et je reserverai pour une autre occasion les résultats plus compliqués, et les applications de mes formules.

On sait que les fonctions circulaires qui servent à la division du cercle en parties égales, jouissent de la propriété remarquable de pouvoir être exprimées par les racines d'une équation algébrique, dont tous les coefficiens sont rationnels. Il résulte de là, que les sommes des puissances

entières et positives des racines de ces équations, formant toujours des quantités rationnelles, et que toutes ces racines étant des fonctions circulaires qui varient d'après une loi connue, leur somme sera une intégrale aux differences finies, qui aura pour limites de l'intégration, zéro, et le degré de l'équation ou le nombre des parties dans lesquelles on veut diviser la circonférence. On déduit de là les intégrales définies aux différences d'une puissance positive quelconque du sinus, du cosinus, de la tangente et de la cotangente: seules fonctions circulaires qu'on sut faire dépendre, jusqu'à présent, de la résolution d'équations algébriques à coefficiens rationnels. Il n'était pas difficile de deduire de là les intégrales de ces mêmes fonctions élevées à des puissances négatives; et j'ai commencé par là mon travail. Puis j'ai montré qu'il existait une infinité d'autres fonctions circulaires qui se réduisaient à dépendre d'équations algébriques à coefficiens rationnels; mais que ces coefficiens, par une singularité dont l'analyse n'avait offert jusqu'ici aucun exemple, ne pouvaient être déterminés qu'en résolvant des équations indéterminées du premier degré. Les points de contact entre l'analyse algébrique et la théorie des nombres sont si rares, que j'ai cru pouvoir signaler ce rapprochement à l'attention des géomètres.

Les équations à deux termes qui servent à la division du cercle, peuvent se décomposer en d'autres équations, chacune desquelles à pour racines les sinus et cosinus de certains arcs, qui varient en général comme les puissances des nombre naturels. J'ai déduit de cette décomposition les valeurs de plusieurs intégrales définies aux différences, dont la détermination paraissait difficile. Pour obtenir ces valeurs, il fallait connaitre les coefficiens des équations auxiliaires qui naissent de la résolution des équations à deux termes. Mr. *Gauss* et Mr. *Legendre* se sont occupés à plusieurs reprises de cette détermination; mais ils ne l'ont effectuée que pour les trois premiers degrés: maintenant je donne dans ce mémoire une méthode générale pour trouver à l'aide de certaines congruences, les équations auxiliaires de tous les degrés, et j'en déduis les valeurs d'un grand nombre d'intégrales définies aux differences, qui n'étaient pas connues jusqu'à présent.

La théorie des intégrales définies aux differentielles renferme deux propositions fondamentales (le théorème de Mr. *Fourier* et celui de Mr. *Parceval*) dont l'utilité est bien connue de tous les géomètres. J'ai

pensé qu'il fallait chercher pour les intégrales définies aux différences finies des théorèmes analogues à ceux que je viens de citer; et je suis parvenu à exprimer (par des intégrales aux différences seulement) la somme des séries et la transformation générale des fonctions, lorsque ces séries et ces fonctions ne contiennent qu'un nombre fini de termes: si le nombre des termes devient infini, alors les intégrales aux differences se changent en intégrales aux différentielles, et, par un procédé analogue à celui dont s'est servi Mr. *Poisson* pour passer du théorème de Mr. *Lagrange* à celui de Mr. *Fourier*, on retombe sur les théorèmes dont j'ai parlé plus haut.

Ces expressions auxquelles j'ai ajouté d'autres formules nouvelles, forment la dernière partie de ce mémoire. Elles peuvent s'appliquer à un grand nombre de questions analytiques; elles sont utiles soutout dans l'intégration des équations linéaires aux différences; intégration qu'on faisait dépendre des intégrales définies aux différentielles, et qui désormais se déduira bien plus naturellement des intégrales définies aux différences finies.

Analyse.

On a vu par la formule (22.) de mon *Mémoire sur la théorie des nombres* que si l'on réprésente par φ une fonction quelconque de plusieurs variables $\varphi(x, y, z, \ldots.$ etc.) la série

$$1+\left(\cos\frac{2\varphi\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\varphi\pi}{m}\right)+\left(\cos\frac{4\varphi\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{4\varphi\pi}{m}\right)\ldots.$$
$$\ldots.+\left(\cos 2\left(\frac{m-1}{m}\right)\varphi\pi+\sqrt{-1}\sin 2\left(\frac{m-1}{m}\right)\varphi\pi\right)$$

aura pour valeur m ou zéro, selon que $\frac{\varphi}{m}$ sera un nombre entier ou une fraction. Il résulte de là que l'intégrale

$$\frac{1}{m}\sum_{x=a}^{x=b}\sum_{y=c}^{y=d}\sum_{z=e}^{z=f}\ldots.\left\{1+\left(\cos\frac{2\varphi\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\varphi\pi}{m}\right)\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\left[\cos 2\left(\frac{m-1}{m}\right)\varphi\pi+\sqrt{-1}\sin 2\left(\frac{m-1}{m}\right)\varphi\pi\right]\right\}$$

a pour valeur le nombre de solutions de la congruence $\varphi\equiv 0$ (mod. m), comprises entre les limites $x=a$, $x=b$; $y=e$, $y=d$; $z=e$, $z=f$ etc.

On voit par là que l'intégrale

$$1.\quad \frac{1}{m}\sum_{x=a}^{x=b}\sum_{y=c}^{y=d}\sum_{z=e}^{z=f}\dots + F(x,y,z\dots \text{etc.})\Big\{1+\Big(\cos\frac{2\varphi\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\varphi\pi}{m}\Big)\dots$$
$$\dots + \Big[\cos 2\Big(\frac{m-1}{m}\Big)\varphi\pi + \sqrt{-1}\sin 2\Big(\frac{m-1}{m}\Big)\varphi\pi\Big]\Big\}$$

a pour valeur $\sum_{u=1}^{u=k}\sum_{v=1}^{v=q}\sum_{s=1}^{f=p} F(\alpha_u, \beta_v, \gamma_s \dots \text{etc.})$ en indiquant par α_1, $\alpha_2 \dots$ $\dots \alpha_k$, les k valeurs entières de x (comprises entre a et b) qui résolvent les congruences $\varphi\equiv 0$ (mod. m), et en exprimant par β_1, β_2, ... β_q, les q valeurs entières de y (comprises entre c et d) qui résolvent la même congruence et ainsi de suite.

Si l'on fait $a=c=e=$ etc. $=0$; $b=d=f\dots=m$; l'intégrale (1.) se simplifiera beaucoup; elle aura pour valeur

$$2.\quad \sum_{u=1}^{u=k}\sum_{v=1}^{v=q}\sum_{s=1}^{f=p}\dots F(r_u, \varrho_v, R_s, \text{etc.}),$$

en indiquant par r_u, ϱ_v, R_s en général l'une quelconque des k valeurs de x, des q valeurs de y, des p valeurs de z etc., qui résolvent la congruence $\varphi\equiv 0$ (mod. m); en supposant toujours qu'on ne considère que les racines entières positives et moindres que m.

La formule (28.) du Mémoire que nous venons de citer, prouve que si l'on appelle α la plus petite des racines positives de la congruence $ax+b\equiv 0$ (mod. c), on aura

$$\alpha = \frac{c-1}{2}+\tfrac{1}{2}\sum_{u=1}^{u=c}\frac{\sin 2u\Big(b-\dfrac{a}{2}\Big)\dfrac{\pi}{c}}{\sin\dfrac{ua\pi}{c}}$$

$$=\frac{1}{c}\sum_{u=1}^{u=c} x\Big\{1+\cos 2(ax+b)\frac{\pi}{c}\dots + \cos 2(c-1)(ax+b)\frac{\pi}{c}\Big\}.$$

Maintenant si dans la formule (1.) on fait $F(x, y, 2\dots \text{etc.}) = F(x)$ et qu'on intègre seulement par rapport à la variable x entre les limites $x=0$, $x=c$; comme la congruence $ax+b\equiv 0$ (mod. c) n'a plus qu'une seule racine $x=\alpha$, (entre les limites $x=0$, $x=c$), il est clair que la formule (2.) donnera

$$\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c}F(x)\Big\{1+\cos 2(ax+b)\frac{\pi}{c}\dots + \cos 2(c-1)(ax+b)\frac{\pi}{c}\Big\} = F(\alpha)$$

$$= F\Big\{\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c}x\Big(1+\cos 2(ax+b)\frac{\pi}{c}\dots + \cos 2(c-1)(ax+b)\frac{\pi}{c}\Big)\Big\}.$$

On peut simplifier beaucoup ce problème en observant que

$$1+\cos 2(ax+b)\frac{\pi}{c}\ldots.+\cos 2(c-1)(ax+b)\frac{\pi}{c}$$
$$=\frac{\sin(2c-1)(ax+b)\frac{\pi}{c}+\sin(cx+b)\frac{\pi}{c}}{2\sin(ax+b)\frac{\pi}{c}},$$

d'où il résulte que

$$\sum_{x=0}^{x=c} F(x)\frac{\left\{\sin(2c-1)(ax+b)\frac{\pi}{c}+\sin(ax+b)\frac{\pi}{c}\right\}}{2\sin(ax+b)\frac{\pi}{c}}$$
$$=cF\left(\frac{c-1}{c}+\frac{1}{2}\sum_{x=1}^{x=c}\frac{\sin 2x\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}}{\sin\frac{ax\pi}{c}}\right)=cF(\alpha).$$

Cette équation, qui subsiste toujours quelle que soit la formo (algébrique ou transcendante) de la fonction $F(x)$, est remarquable en ce qu'elle transporte à la détermination d'une seule intégrale, et par suite à la résolution d'une équation indéterminée du premier degré, la détermination de l'intégrale comprise dans le premier membre.

Avant d'aller plus loin, il est bon d'observer que puisque la formule $\alpha=\frac{c-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{u=c}\frac{\sin 2u\left(b-\frac{a}{c}\right)\frac{\pi}{c}}{\sin\frac{ua\pi}{c}}$ exprime la plus petite valeur entière et positive α, de x, qui satisfait à l'équation $ax+b=cy$, on aura la plus petite valeur entière et positive β, de y, qui satisfait à l'équation $cy-b=ax$, en faisant

$$\beta=\frac{a-1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{u=a}\frac{\sin 2u\left(b+\frac{c}{2}\right)\frac{\pi}{a}}{\sin\frac{uc\pi}{a}}$$

et comme si $b<a$ la moindre valeur entière et positive de y, correspond à la moindre valeur entière et positive de x, et qu'on peut toujours réduire l'équation $ax+b=cg$, á une autre équation dans laquelle $b<a$; on aura alors

$$b+a\frac{(c-1)}{2}+\frac{a}{2}\sum_{u=1}^{u=c}\frac{\sin 2u\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}}{\sin\frac{ua\pi}{c}}=c\left(\frac{a-1}{2}\right)-\frac{c}{2}\sum_{u=1}^{u=a}\frac{\sin 2u\left(b+\frac{c}{2}\right)\frac{\pi}{a}}{\sin\frac{uc\pi}{a}}$$

et par suite

$$\sum_{u=1}^{u=c} \frac{\sin 2u\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}}{\sin\frac{ua\pi}{c}} - \frac{c}{a}\sum_{u=1}^{u=a} \frac{\sin 2u\left(b+\frac{c}{2}\right)\frac{\pi}{a}}{\sin\frac{uc\pi}{a}} = 2\frac{b}{a} + \left(\frac{c-a}{a}\right).$$

Cette relation a lieu entre deux intégrales définies dont on ne sait pas trouver la valeur

Pour appliquer les formules précédentes à quelques exemples, supposons qu'on veuille déterminer les coefficiens d'une équation algébrique de l'orde $n-1$ qui a pour racines successivement les $n-1$ quantités

$$\frac{\sin 2\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{n} - \sqrt{-1}\cos 2\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{a\pi}{n}},$$

$$\frac{\sin 4\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{n} - \sqrt{-1}\cos 4\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2a\pi}{n}},$$

. . . .

$$\frac{\sin 2(n-1)\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{n} - \sqrt{-1}\cos 2(n-1)\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{n}}{\sin 2(n-1)\frac{\pi}{n}}.$$

Pour y parvenir nous chercherons les valeurs des sommes des puissances successives de ces racines, et puis nous en déduirons les valeurs des coefficiens de l'équation cherchée. Nous avons vu que la somme de toutes ces quantités est égale à $2\alpha+1-n$, α étant la plus petite racine entière et positive de la congruence $ax+b\equiv 0$, (mod. n). Maintenant pour avoir la somme des carrés de ces racines (c'est-à-dire la somme des carrés des fonctions circulaires que nous venons d'écrire) nous chercherons la somme de tous les produits de la forme $\alpha\beta$: α et β étant deux des valeurs (entières et positives et moindres que n) qui résolvent la congruence $a(x+y)+2b\equiv 0$, (mod. n). En effet si l'on appelle N_2 la somme de tous ces produits, elle sera donnée par la formule

$$N_2 = \frac{1}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\sum_{y=0}^{y=n} xy\left\{1+\left(\cos 2\frac{\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{a(x+y)+2b}\dots\right.$$

$$\left.\dots+\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin 2\frac{(n-1)\pi}{n}\right)^{a(x+y)+2b}\right\}$$

$$= \frac{n^2(n-1)^2}{4n}$$

$$+\left(\sum_{x=0}^{x=n} x\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{ax+b}\right)\left(\sum_{y=0}^{y=n} y\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{ay+b}\right)$$

$$+\left(\sum_{x=0}^{x=n} x\left(\cos\frac{4\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{n}\right)^{ax+b}\right)\left(\sum_{y=0}^{y=n} y\left(\cos\frac{4\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{n}\right)^{ay+b}\right)$$

$$+\dots\dots\dots\dots+\text{etc.}$$

et par suite on aura

$$N_2 = \frac{n(n-1)^2}{4}+\left(\frac{\sin 2\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{n}-\sqrt{-1}\cos 2\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{a\pi}{n}}\right)^2$$

$$+\left(\frac{\sin 4\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{n}-\sqrt{-1}\cos 4\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{2a\pi}{n}}\right)^2+\text{etc.}$$

et comme la valeur de N_2 peut s'obtenir directement en résolvant la congruence $a(x+y)+2b\equiv 0$, (mod. n), on aura $4N_2-n(n-1)^2=S_2$, (S_2 étant la somme des carrés des racines de l'équation cherchée). Si l'on considerait une congruence à trois inconnues de la forme

$$a(x+y+z)+3b\equiv 0 \text{ (mod. } n\text{)},$$

on trouverait la somme des cubes des racines, et ainsi de suite, de manière que l'équation

$$x^{n-1}+A_1x^{n-2}\dots+A_{n-1}=0,$$

qui a pour racines les $n-1$ quantités

$$\frac{\sin 2\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{n}-\sqrt{-1}\cos 2\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{a\pi}{n}},\quad \frac{\sin 4\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{n}-\sqrt{-1}\cos 4\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2a\pi}{n}},$$

$$\dots\dots\frac{\sin 2(n-1)\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{n}-\sqrt{-1}\cos 2(n-1)\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{n}}{\sin 2(n-1)\frac{a\pi}{n}},$$

aura tous ces coefficiens $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$, rationnels, qui seront déterminés par la résolution des équations indéterminées

$ax+b=ny$; $a(x+y)+2b=nz$; $a(x+y+2)+3b=nu$ etc ....
dont on sait trouver toutes les racines par les méthodes connues.

On pourrait généraliser cette analyse, et chercher les coefficiens de l'équation dont les racines sont successivement $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ... $\varphi(u)$ .... $\varphi(n-1)$ en indiquant généralement par $\varphi(u)$ une intégrale définie de la forme

$$\sum_{x=0}^{x=n} F(x)\left(\cos 2n(ax+b)\frac{\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin 2n(ax+b)\frac{\pi}{n}\right),$$

car les coefficiens de cette équation seraient donnés par les racines des congruences $ax+b\equiv 0$ (mod. n); $a(x+y)+2b\equiv 0$ (mod. n); etc.....

C'est par des considérations de cette nature qu'on peut déterminer les coefficiens de l'équation qui a pour racines les quantités

$$\frac{\cos\frac{2b\pi}{n}}{\left(\sin\frac{a\pi}{n}\right)^2},\quad \frac{\cos\frac{4b\pi}{n}}{\left(\sin\frac{2a\pi}{n}\right)^2},\quad \ldots\ldots \quad \frac{\cos 2(n-1)\frac{b\pi}{n}}{\left(\sin(n-1)\frac{a\pi}{n}\right)^2},$$

problème que nous avions proposé à la page 203. du premier volume des *Mémoires de Mathématiques et de Physique.*

En effet on a

$$\sum_{x=0}^{x=n} x^2\left[\cos 2u(ax+b)\frac{\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin 2u(ax+b)\frac{\pi}{n}\right]$$
$$= n\left(\frac{\sin 2\frac{bu\pi}{n}-\sqrt{-1}\cos 2\frac{bu\pi}{n}}{4\left(\frac{\sin au\pi}{n}\right)^2}\right)$$

et par suite, en considérant des séries de la forme

$$N_1=\frac{1}{n}\sum_{x=0}^{x=n} x^2\Big\{1+\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{ax+b}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\left[\cos 2\left(\frac{n-1}{n}\right)\pi+\sqrt{-1}\sin 2\left(\frac{n-1}{n}\right)\pi\right]^{ax+b}\Big\},$$

$$N_2=\frac{1}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\sum_{y=0}^{x=n} x^2y^2\Big\{1+\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{ax+b}$$
$$\times\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{ay+b}\ldots\ldots\text{etc.}\Big\}$$

. . . . etc.

dont les valeurs seront données par les racines des congruences

$ax+b\equiv 0$ (mod. n); $a(x+y)+2b\equiv 0$ (mod. n), etc.;

on aura une équation de degré $n-1$ dont tous les coefficiens seront rationnels, et qui aura pour racines les quantités

$$\frac{\sin\frac{2b\pi}{n}-\sqrt{-1}\cos\frac{2b\pi}{n}}{4\left(\sin\frac{a\pi}{n}\right)^2},\quad \frac{\sin\frac{4b\pi}{n}-\sqrt{-1}\cos\frac{4b\pi}{n}}{4\left(\sin\frac{2a\pi}{n}\right)}\ldots\text{ etc.}$$

d'ou l'on pourrait déduire par des transformations connues, les coefficiens des équations qui ont pour racines des quantités exprimées généralement par

$$\frac{\sin\frac{2b\pi}{n}}{\left(\sin\frac{a\pi}{n}\right)^2},\quad \frac{\cos\frac{2b\pi}{n}}{\left(\sin\frac{a\pi}{n}\right)^2}.$$

On vait qu'on pourrait multiplier beaucoup ces formules en différenciant par rapport à a. On aurait alors des fonctions circulaires qui contiendraient un sinus, ou un cosinus au numérateur; et uno puissance quelconque de sinus ou de cosinus au dénominateur.

On sait que l'équation

$$X=x^n-\frac{1}{4}nx^{n-2}+\frac{1}{16}n\left(\frac{n-3}{2}\right)x^{n-5}-\frac{1}{64}n\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}x^{n-6}\ldots$$
$$\ldots\pm\frac{1}{2^{n-1}}nx-1=0,$$

a pour racines les quantités

$$\cos\frac{0\pi}{n},\quad \cos\frac{2\pi}{n},\quad \cos\frac{4\pi}{n},\quad\ldots\quad \cos 2(n-1)\frac{\pi}{n};$$

d'ou il résulte

$$\sum_{u=0}^{u=n}\cos\frac{2u\pi}{n}=0,$$

comme on le savait déjà. On pourra déduire de là aisément en général $\sum_{u=0}^{u=n+1}\left(\cos\frac{2u\pi}{n}\right)^m$, à l'aide des coefficiens de l'équation $X=0$.

Si lon fait $x=\frac{1}{y}$, l'équation $y^n\mp\frac{ny^{n-1}}{2^{n-1}}+\text{etc.}\ldots-1=0$ aura pour racines les quantités

$$\frac{1}{1},\quad \frac{1}{\cos\frac{4\pi}{n}},\quad \frac{1}{\cos\frac{4\pi}{n}},\quad\ldots\quad \frac{1}{\cos 2(n-1)\frac{\pi}{n}},$$

d'où on tirera $\sum_{u=0}^{u=n}\frac{1}{\cos\frac{2u\pi}{n}}=\pm\frac{n}{2^{n-1}}$; et il sera facile de déduire de là les valeurs de

$$\sum_{u=0}^{u=n}\frac{1}{\left(\cos\frac{2u\pi}{n}\right)^m},\quad \sum_{u=1}^{u=n}\frac{1}{\left(\sin\frac{2u\pi}{2}\right)^m}\text{ etc.}$$

Au reste on voit que si a et n n'ont pas de commun diviseur plus grand que l'unité, on aura

$$\sum_{u=0}^{u=n} \frac{1}{\left(\cos 2(au+b)\frac{\pi}{n}\right)^m} = \sum_{u=0}^{u=n} \frac{1}{\left(\cos \frac{2u\pi}{n}\right)^m}.$$

En considérant l'équation $4\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right) = y^2 \pm nz^2 = 0$, qui se décompose dans les deux autres $y + z\sqrt{(\pm n)} = 0$, $y - z\sqrt{(\pm n)} = 0$, (dont l'une a toujours pour racines des quantités de la forme $x = \cos\frac{2x^2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2x^2\pi}{n}$), on trouve la valeur de l'intégrale définie

$$\sum_{x=0}^{x=n} \left(\cos\frac{2x^2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2x^2\pi}{n}\right) = \sqrt{\left(n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right)}$$

et on en déduit de suite les valeurs de

$$\sum_{x=0}^{x=n} \cos\frac{2x^2\pi}{n},\quad \sum_{x=0}^{x=n} \sin\frac{2x^2\pi}{n}.$$

Si on décomposait l'équation $y + z\sqrt{(\pm n)} = 0$ en deux autres, dont l'une contient la partie réelle, et l'autre la partie imaginaire des racines; on en déduirait par la division

$$\sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{\cos\frac{2x^2\pi}{n}},\quad \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{\sin\frac{2x^2\pi}{n}};$$

et ces deux fonctions qu'on pourra déterminer, seront encore des fonctions rationnelles de $\sqrt{n}$.

Nous avons déjà prouvé (dans le mémoire sur la théorie des nombres déjà cité) qu'on avoit toujours $\sum_{x=0}^{x=n} \sin\frac{2cx^2\pi}{n} = 0$, c étant un nombre entier quelconque; et n étant un nombre premier de la forme $6p+1$. Maintenant comme si n n'est pas de la forme $6p+1$, on aura

$$\sum_{x=0}^{x=n} \sin\frac{2cx^2\pi}{n} = \sum_{x=0}^{x=n} \sin\frac{2cx\pi}{n};$$

il en résulte que lorsque n est un nombre premier quelconque, et c un nombre entier, on a toujours $\sum_{x=0}^{x=n} \sin\frac{2cx^2\pi}{n} = 0$. On déduirait de là la valeur de $\sum_{x=0}^{x=n} \cos\frac{2x^2\pi}{n}$ en fonction de a (le nombre a étant donné par

l'équation indéterminée $4n = a^2 + 27b^2$). Au reste on aura toujours en général $\sum_{x=0}^{x=n} \sin\frac{2cx^m\pi}{n} = 0$, lorsque m est un nombre impair, c un nombre entier quelconque, et n est un nombre premier. On pourrait généraliser beaucoup ces résultats et en déduire les valeurs de

$$\sum_{x=0}^{x=n} \frac{\sin\frac{2x\pi}{n}}{1-2a\cos\frac{2x\pi}{n}+a^2}, \quad \sum_{x=0}^{x=n} \frac{\cos\frac{2x\pi}{n}}{1-2a\cos\frac{2x\pi}{n}+a^2}, \quad \sum_{x=0}^{x=n} \frac{\sin\frac{2x^2\pi}{n}}{1-2a\cos\frac{2x^2\pi}{n}+a^2},$$

etc. etc.

mais il suffira d'avoir indiqué la methode à employer dans tous les cas.

On a vu dans le *Mémoire sur la théorie des nombres* que la détermination de $\sum_{x=0}^{x=n}\left(\cos\frac{2x^m\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2x^m\pi}{n}\right)$ dépend en général de la résolution d'équations dont les coefficiens sont donnés en fonction du nombre des solutions qui ont les congruences $x^m + 1 \equiv 0 \pmod{n}$, $x^m + y^m + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ etc. Ces nombres que nous avons appelés N_1, N_2, N_n etc. servent à la recherche des *équations auxiliaires* à l'aide desquelles on peut résoudre les équations à deux termes. Lorsque $m = 3$, et $m = 4$, on peut toujours trouver N_2 et N_3 à l'aide des équations $4n = a^2 + 27b^2$; $n = a^2 + b^2$. Dans les autres cas il faut résoudre effectivement les congruences que nous venons d'indiquer. Maintenant nous allons exposer une rélation qui réduit les nombres N_2, N_3, etc. à être congrus à des quantités données. Nous commencerons par demontrer par notre méthode deux théorèmes déjà connus, et nous généraliserons ensuite notre analyse.

Dans le seconde volume du Journal de Mathématiques de Mr. *Crelle*, Mr. *Jacobi* a énoncé sans démonstration le théorème suivant.

„Soit n un nombre premier de la forme $6p+1$, on sait que l'é„quation $4n = a^2 + 27b^2$ aura une seule solution en nombres entiers po„sitifs. Maintenant je dis qu'on aura toujours

$$\pm a \equiv \frac{4p(4p-1)\dots(2p-1)}{1.2.3\dots2p} \pmod{6p+1}.$$

Pour démontrer ce théorème nous rappelerons que nous avons démontré dans le *Mémoire sur la théorie des nombres*, que si l'on exprime par N_2 le nombre des solutions entières, positives et moindres que n de la congruence $x^3 + y^3 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$, on aura toujours $N_2 = n \pm a - 2$

(où il faut prendre le signe $+$ ou le signe $-$ selon que a est de la forme $3q+1$ ou de la forme $3q-1$). Maintenant si l'on exprime toujours (comme nous l'avons fait dans le Mémoire cité) par $a_1, a_2, a_3, \ldots a_u, \ldots, a_{2p}$ les $2p$ résidus cubiques de n et par $b_1, b_2, \ldots b_u, \ldots b_{2p}$; $c_1, c_2, \ldots c_u, \ldots c_{2p}$, les deux séries qui comprennent les non-résidus cubiques de n, et si l'on represente successivement par M_1, M_2, M_3, le nombre des solutions des congruences $x^n+1 \equiv a_u$ (mod. n); $y^n+1 \equiv b_u$ (mod. n); $z^n+1 \equiv c_u$ (mod. n); il est clair d'abord qu'on pourra changer respectivement a_u, b_u, et c_u, en $-a_u, -b_u, -c_u$, sans que M_1, M_2, M_3, changent de valeur, et si l'on conserve aux lettres A, B, C, les valeurs que nous leur avons déjà attribuées, on aura

$$nM_1 = n^2 + A^2(1+3A) + B^2(1+3B) + C^2(1+3C):$$
$$nM_2 = n^2 + AB(1+3A) + BC(1+3B) + CA(1+3C);$$
$$nM_3 = n^2 + AC(1+3A) + BA(1+3B) + CB(1+3C).$$

A présent il est clair que si $y = r$ est une racine de la congruence du second degré $\frac{y^3-1}{y-1} \equiv 0$ (mod. n), on aura toujours

$$(a_u)^{4p} \equiv 1 \text{ (mod. } n); \quad (b_u)^{4p} \equiv r \text{ (mod. } n); \quad (c_u)^{4p} \equiv r^2 \text{ (mod. } n);$$

et par suite

$$\sum_{x=0}^{x=n} (x^3+1)^{4p} = 1 + \sum_{x=1}^{x=n} (x^3+1)^{4p} = 1 + M_1 + rM_2 + r^2M_3 \text{ (mod. } n).$$

Mais nous avons démontré dans le même Mémoire que s étant un nombre premier, on a $\sum_{x=1}^{x=s} (x^t) \equiv -1$ (mod. s); (lorsque $t \equiv 0$ (mod. $s-1$)) tandis que $\sum_{x=1}^{x=s} (x^t) \equiv 0$ (mod. s), lorsque la congruence $t \equiv 0$ (mod. $s-1$), n'est pas resoluble. Et comme en développant $(x^n+1)^{4p}$, on ne trouve que trois exposans ($12p$, $6p$, et 0) qui soient divisibles par $n-1$, on aura enfin

$$\sum_{x=0}^{x=n} (x^3+1)^{4p} = 1 + \sum_{x=1}^{x=n} (x^3+1)^{4p}$$
$$\equiv M_1 + rM_2 + r^2M_3 \equiv -2 - \frac{4p(4p-1)\ldots(2p+1)}{1.2.3\ldots 2p} \text{ (mod. } n).$$

Si on élimine les quantités A, B, C et r a l'aide de la congruence $r^3-1 \equiv 0$ (mod. n), et des équations connues

$$1+A+B+C=0; \quad 2r = A(1+3A) + B(1+3B) + C(1+3C);$$
$$uN_2 = n^2 + A(1+3A)^2 + B(1+3B)^2 + C(1+3C)^2;$$

on trouvera

$$N_2+2 \equiv \frac{-4p(4p-1)\ldots.(2p+1)}{1.2.3\ldots.2p} \pmod{6p+1}$$

et par suite

$$\pm a \equiv \frac{-4p(4p-1)\ldots.(2p+1)}{1.2.3\ldots.2p} \pmod{6p+1},$$

où il faudra prendre le signe $+$ lorsque $a=3q+1$, et le signe $-$ lorsque $a=3q-1$. On peut appliquer les mêmes principes à la démonstration du théorème suivant dû à M. *Gauss:*

„Lorsque $n=8m+1$ est un nombre premier, l'équation $a^2+16b^2=n$ „n'a qu'ne seule solution entière et positive. Maintenent je dis qu'on aura „toujours

$$\pm 2a \equiv \frac{4m(4m-1)\ldots.(2m+1)}{1.2\ldots.2m} \pmod{8m+1}."$$

En effet en conservant les notations du mémoire plusieurs fois cité, et si l'on appele respectivement M_1, M_2, M_3, M_4, le nombre des solutions entières, positives et moindres que n des congruences

$$x^4+1 \equiv a_n \pmod{n};\quad y^4+1 \equiv b_n \pmod{n};\quad z^4+1 \equiv c_n \pmod{n};$$
$$r^4+1 \equiv d_n \pmod{n};$$

et par r une racine de la congruence $\frac{\nu^4-1}{\nu-1} \equiv 0 \pmod{n}$, on aura

$$\sum_{x=0}^{x=n}(x^4+1)^{4m} = 1+\sum_{x=1}^{x=n}(x^4+1)^{4m} \equiv M_1+rM_2-M_3-rM_4 \pmod{n}.$$

Mais les quantités M_1, M_2, M_3, M_4, peuvent s'exprimer en fonction de A, B, C, D, r comme nous venons de le voir, pour le troisième degré. Et comme les quantités A, B, C, D, r, peuvent être éliminées à l'aide de la congruence $r^4-1 \equiv 0 \pmod{n}$ et des équations

$$A+B=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{n};\quad C+D=-\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{n};$$
$$4n=n+A(1+4A)+B(1+4B)+C(1+4C)+D(1+4D);$$
$$nN_2=n^2+A(1+4A)^2+B(1+4B)^2+C(1+4C)^2+D(1+4D)^2$$

et que l'on a

$$1+\sum_{x=1}^{x=n}(x^4+1)^{4n} \equiv 1-2\frac{-4m(4m-1)\ldots.(2m+1)}{1.2.3\ldots.2m} \equiv M_1+rM_2-M_3-rM_4 \pmod{n}$$

on obtiendra enfin après l'élimination,

$$\frac{N_2-n+3}{3} \equiv \pm 2a \equiv \frac{4m(4m-1)\ldots.(2m+1)}{1.2.3\ldots.2m} \pmod{n}.$$

On peut appliquer les mêmes principes aux congruences des degrés supérieurs. En effet, si l'on exprime respectivement par M_1, M_2, $\ldots. M_\nu$,

le nombre des solutions (entières, positives et moindres que n) des congruences

$$x^a+1 \equiv a_n \ (\text{mod. } ap+1); \quad y^a+1 \equiv b \ (\text{mod. } ap+1); \ \ldots.$$
$$\ldots. \ v^a+1 \equiv h_n \ (\text{mod. } ap+1);$$

(dans lesquelles $n = ap+1$ est un nombre premier) et si l'on sépare la partie réelle de la partie imaginaire dans les valeurs de A, B, C, etc. en posant

$$A = p_1+q_1\sqrt{-1}; \quad B = p_2+p_2\sqrt{-1}; \quad C = p_3+q_3\sqrt{-1} \ \text{ etc.},$$

on aura

$$nM_2 = n^2+(p_1+q_1\sqrt{-1})(p_2-q_2\sqrt{-1})(1+a(p_1+q_1\sqrt{-1}))$$
$$+(p_2+q_2\sqrt{-1})(p_3-q_3\sqrt{-1})(1+a(p_2+q_2\sqrt{-1}))+\text{ etc.}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ etc.}$$

Maintenant pour les congruences du degré a, outre l'intégrale $\sum\limits_{x=0}^{x=ap+1}(x^a+1)^{2p}$, on devra aussi considérer les intégrales $\sum\limits_{x=0}^{x=ap+1}(x^a+1)^{4p}$; $\sum\limits_{x=0}^{x=ap+1}(x^a+2)^{6p}$, et ainsi de suite. Ou bien les intégrales

$$\sum_{x=0}^{x=ap+1}(x^a+1); \quad \sum_{x=0}^{x=ap+1}\sum_{y=0}^{y=ap+1}(x^a+y^a+1);$$
$$\sum_{x=0}^{x=ap+1}\sum_{y=0}^{y=ap+1}\sum_{z=0}^{z=ap+1}(x^a+y^a+z^a+1); \ \text{etc.}$$

et comme toutes ces intégrales se réduisent, d'un côté à être congrues (selon le module n) à des coëfficiens du développement du polynome, et que d'un autre côté on peut les rendre congrues (selon le même module n) à des expressions de cette forme $F(M_1, M_2, M_a+r)$ (en indiquant par r une racine de la congruence $\frac{B^2-1}{B-1} \equiv 0$ (mod. n), on exprimera toutes ces intégrales de deux manières par v_1, p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3, etc., et par les coefficiens du développement du polynome. Mais si l'on élimine toutes ces quantités à l'aide de la congruence $r^a-1 \equiv 0$ (mod. n) et des équations

$$1+A+B\ldots..+R = 0,$$
$$nN_1 = n+A(1+aA)+B(1+aB)\ldots.+R(1+aR),$$
$$nN_2 = n^2+A(1+aA)^2+B(1+aB)^2\ldots.+R(1+aR)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ etc.}$$

qui se décomposent chacune en deux à l'aide des équations

$$A = p_1 + q_1\sqrt{-1};\quad B = p_2 + q_2\sqrt{-1};\quad C = p_3 + q_3\sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

on aura alors autant d'équations qu'il en faut pour éliminer toutes ces quantités, et il ne restera que les quantités N_1, N_2, etc. qui seront toutes données par des congruences de la forme

$$N_1 \equiv B \pmod{n};\quad N_2 \equiv \gamma \pmod{n};\quad N_3 \equiv P \pmod{n};$$

et ainsi de suite.

Les quantités B, γ, P, etc. étant toutes connues, on déterminera par là N_1, N_2, N_3 etc. à l'aide de ces congruences, et les coefficiens des équations auxiliaires s'en déduiront sans difficulté.

Quoique ce Mémoire ne soit destiné qu'à la recherche de la valeur de quelques intégrales définies aux différences, qui dépendent d'équations déterminées ou indéterminées, et que nous ayons l'intention de reprendre ce sujet plus généralement dans une autre occasion, cependant nous ne terminerons pas ce Mémoire sans indiquer quelques formules assez générales propres à déterminer les valeurs des intégrales définies aux différences, et nous reserverons les détails et les développemens pour un travail spécial.

On sait que tant que $x < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\tfrac{1}{2}x = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \tfrac{1}{4}\sin 4x + \text{etc.}$$

et par suite

$$\frac{u\pi}{4n} = \sin\frac{u\pi}{2n} - \tfrac{1}{2}\sin\frac{2u\pi}{2n} + \tfrac{1}{3}\sin\frac{3u\pi}{2n} - \tfrac{1}{4}\sin\frac{4u\pi}{2n} + \text{etc.}$$

et cette équation sera vraie en donnant à u toutes les valeurs 1, 2, 3, ... $n-1$.

D'où l'on déduira

$$\sum_{u=0}^{u=n}\frac{u\pi}{4n} = \sum_{u=0}^{u=n}\sin\frac{u\pi}{2n} - \tfrac{1}{2}\sum_{u=0}^{u=n}\sin\frac{2u\pi}{2n} + \tfrac{1}{3}\sum_{u=0}^{u=n}\sin\frac{3u\pi}{2n} - \tfrac{1}{4}\sum_{u=0}^{u=n}\sin\frac{4u\pi}{2n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pm \frac{1}{p}\sum_{u=1}^{u=n}\sin\frac{pu\pi}{2n} \mp \text{etc.}$$

Maintenant il faut remarquer d'abord que lorsque $p = 2sn$, on aura toujours $\sum_{u=0}^{u=n}\sin\frac{2su\pi}{2n} = 0$; puis on aura toujours

$$\frac{1}{p}\sum_{u=0}^{u=n}\sin\frac{pu\pi}{2n} = \frac{1}{p}\left(\frac{-\cos\left(\frac{pu}{2n} - \frac{1}{2}\frac{p\pi}{2n}\right)\pi + \cos\frac{p\pi}{4n}}{2\sin\left(\frac{p\pi}{4n}\right)}\right) = A.$$

Et comme le dénominateur de A ne devient zéro que lorsque $p=2su$; et que dans ce cas $A=0$, on fera abstraction de ce cas.

A présent $p=4m$, donne $A=0$; $p=4m+2$, donne $A=\frac{1}{p}\cot\frac{p\pi}{4n}$; $p=4m+1$ donne $A=\frac{1}{2p}\cot\frac{p\pi}{4n}-\frac{1}{2p}$; $p=4m-1$, donne $A=\frac{1}{2q}\cot\frac{p\pi}{4n}+\frac{1}{2q}$: d'où enfin on tire

$$\frac{n(n-1)}{2.4.n}\pi=-\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{(4p+2)}\cot\frac{(4p+2)}{4}\pi+\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{2(4p+1)}\cot\frac{(4p+1)}{4n}\pi$$

$$+\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{2(4p+1)}+\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{2(4p+3)}\cot(4p+3)\frac{\pi}{4n}-\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{2(4p+3)}$$

$$=-\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{(4p+2)}\cot\frac{(4p+2)}{4n}\pi+\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{2(2p+1)}\cot\frac{(2p+1)}{4n}\pi$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\dots\right)=\frac{\pi}{8}\right\}.$$

La théorème de *Parseval* peut se réduire aux intégrales définies aux différences chaquefois que les deux séries sur lesquelles on opère sont composées d'un nombre fini de termes. En effet soient données les deux series

$$a^0+a_1x+a_2x^2\dots\dots+a_na^n=\varphi(x),$$

$$b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}\dots\dots\dots+\frac{b^n}{x^n}=F\left(\frac{1}{x}\right),$$

On sait que $A=\sum_{y=0}^{y=p}\left(\cos\frac{2cy\pi}{p}+\sqrt{-1}\sin\frac{2cy\pi}{p}\right)=0$, tant que $c<p$; et que lorsque $c=0$ on a $A=p$; si l'on substitue donc $\cos\frac{2y\pi}{p}+\sqrt{-1}\sin\frac{2y\pi}{p}$ pour x dans les produits $\varphi(x)F\left(\frac{1}{x}\right)$, on aura des termes de la forme $a_0b_0+a_1b_1\dots+$ etc. puis des termes de la forme $\alpha\left(\cos\frac{2y\pi}{p}+\sqrt{-1}\sin\frac{2y\pi}{p}\right)^t$, et enfin des termes de la forme:

$$\beta\left(\cos\frac{2y\pi}{p}+\sqrt{-1}\sin\frac{2y\pi}{p}\right)^{-t};$$

et si l'on fait $p=n+m+1$ il est clair que t sera toujours moindre que $m+n+1$; et parsuite en prenant l'intégrale finie dans les deux membres depuis $y=0$, jusqu'à $y=n+m+1$, on aura

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \text{etc.}$$
$$= \frac{1}{(1+n+m)} \sum_{y=0}^{y=n+m+1} \varphi\left(\cos\frac{2y\pi}{n+m+1} + \sqrt{-1}\sin\frac{2y\pi}{n+m+1}\right)$$
$$\times F\left(\cos\frac{2y\pi}{n+m+1} - \sqrt{-1}\sin\frac{2y\pi}{n+m+1}\right).$$

On pourrait donner à ce théorème la même forme qu'au théorème de *Parceval* en écrivant

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \text{etc.}$$
$$= \frac{1}{2(n+m+1)} \sum_{y=0}^{y=n+m+1} \left\{\varphi\left(\cos\frac{2y\pi}{n+m+1} + \sqrt{-1}\sin\frac{2y\pi}{n+m+1}\right)\right.$$
$$\times F\left(\cos\frac{2y\pi}{n+m+1} - \sqrt{-1}\sin\frac{2y\pi}{n+m+1}\right)$$
$$\left. + \varphi\left(\cos\frac{2y\pi}{n+m+1} - \sqrt{-1}\sin\frac{2y\pi}{n+m+1}\right).F\left(\cos\frac{2y\pi}{n+m+1} + \sqrt{-1}\sin\frac{2y\pi}{n+m+1}\right)\right\}.$$

Il résulte de là ce théorème (qui est vrai même lorsque les fonctions $\varphi(x)$ et $F\left(\frac{1}{x}\right)$ sont composées d'un nombre infini de termes) „que „l'on a toujours, quelle que soit la valeur de n,

$$„\sum_{y=0}^{y=n} \varphi\left(\cos\frac{2y\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2y\pi}{n}\right).F\left(\cos\frac{2y\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{2y\pi}{n}\right)$$
$$= \sum_{y=0}^{y=n} \varphi\left(\cos\frac{2y\pi}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{2y\pi}{n}\right).F\left(\cos\frac{2y\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2y\pi}{n}\right)."$$

Il est clair que dans l'analyse précédente on pourrait arriver à la limite par rapport à n et m et qu'en passant des différences aux différentielles on obtiendra le théorème de *Parseval.* En effet faisant $\frac{2\pi}{n+m+1} = \varepsilon$; $n+m+1 = \frac{2\pi}{\varepsilon}$, $y\varepsilon = u$; $y = \frac{u}{\varepsilon}$ les limites $y=0$, $y=n+m+1$ deviennent $\frac{u}{\varepsilon}=0$, $\frac{u}{\varepsilon} = n+m+1 = \frac{2\pi}{\varepsilon}$, et passant des différences aux différentielles on aura $\varepsilon = du$, et partant

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \text{etc.} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} [\varphi(\cos u + \sqrt{-1}\sin u).F(\cos u - \sqrt{-1}\sin u)$$
$$+ \varphi(\cos u - \sqrt{-1}\sin u).F(\cos u + \sqrt{-1}\sin u)]\,du.$$

On pourrait de même par ces formules trouver des expressions analogues au théorème de *Fourier*, exprimées seulement en intégrales aux différences. En effet étant données les deux séries

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + y\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{y^2}{2}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \text{etc.}$$

$$\frac{1-\frac{t^{n+1}}{y^{n+1}}}{1-\frac{t}{y}} = 1+\frac{t}{y}+\frac{t^2}{y^2}+\text{etc.}$$

que l'on suppose toutes deux composées d'un nombre n fini de termes, on aura par la formule que nous avons trouvée précédemment

$$\varphi(x+t) = \frac{1}{2n+1}\sum_{y=0}^{y=2n+1}\frac{1-t^{n+1}\left(\cos\frac{2y\pi}{2n+1}-\sqrt{-1}\sin\frac{2y\pi}{2n+1}\right)^{n+1}}{1-t\left(\cos\frac{2y\pi}{2n+1}-\sqrt{-1}\sin\frac{2y\pi}{2n+1}\right)}$$
$$\times\,\varphi\left(x+\cos\frac{2y\pi}{2n+1}+\sqrt{-1}\sin\frac{2y\pi}{2n+1}\right)$$

et par suite (en faisant $x=0$)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2n+1}\sum_{y=0}^{y=2n+1}\left(\frac{1-t^{n+1}e^{\frac{-2y(n+1)}{2n+1}\pi\sqrt{-1}}}{1-te^{\frac{-2y\pi\sqrt{-1}}{2n+1}}}\right)\varphi\left(e^{\frac{2y\pi\sqrt{-1}}{2n+1}}\right),$$

Si dans cette expression on fait $n=\infty$ et que l'on passe des différences aux différentielles, on trouvera la formule

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(e^{u\sqrt{-1}})\,du}{1-te^{u\sqrt{-1}}}$$

que nous avions déjà donnée dans le Tome XXVIII. des *Mémoires de l'Académie de Turin.*

Enfin il est clair qu'on aura aussi l'équation

$$\varphi(t) = \frac{1}{2n+1}\sum_{y=0}^{y=2n+1}\sum_{s=0}^{s=\infty}\left\{\left(1-t^{n+1}e^{\frac{-2y(n+1)}{2n+1}\pi\sqrt{-1}}\right)e^{\frac{-2sy\pi\sqrt{-1}}{2n+1}}t^s\varphi\left(e^{\frac{2y\pi\sqrt{-1}}{2n+1}}\right)\right\},$$

qui se pretera facilement aux applications.

19.

Théorie mathématique de la Chaleur.

(Par M. *Poisson*, à Paris.)

(Cet article est le préambule d'un ouvrage actuellement sous presse, et qui paraîtra incessamment.)

La *Pyrométrie* de *Lambert* contient les premières applications que l'on a faites du calcul à la thèorie de la chaleur; elles ont pour objet la distribution de la chaleur dans une barre, et la comparaison des quantités de chaleur rayonnante que le Soleil envoie à la Terre et aux planètes pendant leurs révolutions entières ou des parties de chaque révolution. L'auteur fait voir que ces quantités sont liées à la première loi de *Kèpler*, suivant laquelle les aires décrites autour du soleil, par le rayon vecteur de chaque planète, sont proportionnelles au temps employé à les décrire. Relativement aux températures des points d'une barre soumise à des sources constantes de chaleur, il montre comment elles peuvent être exprimées par des formules qui satisfont aux expériences. Mais *Lambert* n'a pas cherché à déduire ces formules de l'equation différentielle d'où dépend la température d'un point quelconque, quand la barre est parvenue à un état permanent. La forme de cette équation, et celle de l'équation aux différences partielles qui a lieu pendant que la barre s'échauffe ou se refroidit, ont été indiquées par M. *Biot*, en 1804, dans l'extrait d'un mémoire sur la Propagation de la chaleur*). M. *Biot* les a déduites du principe de *Newton*, sur la communication de la chaleur entre des corps juxtaposés, qu'il a étendu aux tranches contiguës et infiniment minces de la barre. Il intègre l'équation relative à l'état permanent, puis il vérifie, sur ses propres expériences et sur celles de *Rumford*, la loi des températures qui resulte de cette intégrale.

Ces premiers essais, et l'ingénieuse théorie des échanges de chaleur rayonnante qu'on doit à M. *Pierre Prevost*, de Genève, constituaient toute la théorie mathématique de la chaleur, lorsque *Fourier* s'en est occuppé dans un mémoire envoyé à l'Institut en 1807, et ensuite, dans la pièce

---

*) *Bibliothéque britannique, tome* XXVII.

couronnée par ce corps savant au commencement de 1812 *). Par le nombre et la variété des question que l'auteur a considerées, cette théorie est devenue alors une branche nouvelle de la Physique mathématique. *Fourier* a traité de nouveau une partie de ces question dans sa *Theorie analytique de la Chaleur*. Les volumes de l'Académie des Sciences et ceux des *Annales de Physique et de Chimie*, qui ont paru depuis cet ouvrage, contiennent aussi d'autres recherches de l'auteur sur le même sujet, relatives principalement à la chaleur rayonnante et à la chaleur de la Terre.

Laplace s'est occupé de la théorie de la chaleur peu de temps après *Fourier*. Dans une note imprimée en 1810 **), il considère la propagation de la chaleur dans l'intérieur des corps comme le résultat d'un rayonnement moléculaire qui s'étend au-delà des molécules les plus voisines, á des distances finies, mais insensibles; et il montre comment cette manière nouvelle d'envisager la question peut conduire à l'équation aux différences partielles d'où dépend la loi des températures dans l'intérieur des corps. Il indique aussi, mais fort incomplètement, un moyen de former l'équation générale relative à leur surface, que *Fourier* avait précédemment donnée sans démonstration. Dans la *Connaissance des Tems* de 1823, et ensuite dans le livre XI. de la *Mécanique céleste*, *Laplace* s'est occupé de la résolution de ces deux équations, appliquées au cas d'une sphère homogène et dont la superficie est partout la même, qui a été primitivement échauffée d'une manière quelconque. La solution générale qu'il a donnée de ce problème comprend celle de *Fourier*, qui se rapporte au cas particulier où la température des points de la sphère ne dépend que de leur distance à son centre; elle est fondée sur l'analyse que l'auteur avait employée autrefois dans la question du flux et du reflux do la mer, et présente une nouvelle application de cette analyse, dont le caractère spécial est d'exprimer la valeur générale de l'inconnue de chaque problème, par la somme d'un nombre indéfini de valeurs particulières. Je suis parvenu au même résultate, dans mon second mémoire sur la *Distribution de la Chaleur dans les corps solides* ***), par une analyse différente et moins simple, mais qui avait cependent quelque avantage, et que *Laplace* a re-

---

*) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tomes IV. et V.

**) *Mémoires de la première classe de l'Institut*, année 1809, page 332.

***) *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 19. cahier.

gardée comme une confirmation de la sienne. En appliquant cette solution générale au globe terrestre, il a été conduit à partager l'opinion de *Fourier,* qui attribue à la chaleur primitive de la terre l'accroissement de temperature qu'on observe à mesure qu'on s'enfonce au-dessous de sa surface, et dont la grandeur n'est pas la même dans toutes les localités. Mais pour qu'on soit obligé de recourir à une pareille explication de ce phénomène, il faut qu'on ait prouvé, d'une manière complète, que si la Terre était parvenue à son état final, un tel acroissement n'aurait pas lieu en vertu des causes permanentes qui influent sur les températures de ces différens points; c'est pourquoi je me suis livré, comme on le vera dans la suite de cet ouvrage, à un examen approfondi de ces diverses causes, parmi les quelles il y en a qu'on n'avait pas encore considérées, et dont les effets ne pourront être appréciés qu'après de très longs intervalles de temps.

Dans cette indication succincte des principales recherches des géomètres sur la théorie de la chaleur, je ne dois pas oublier de faire mention d'un mémoire présenté récemment à l'Institut par M. *Lamé,* professeur de Physique à l'Ecole Polytechnique. L'auteur a déterminé, dans ce mémoire *), la loi des températures de tous les points d'un ellipsoïde homogène parvenu à un état permanent; et il a trouvé que l'expression de cette loi dépend des fonctions elliptiques; ce qui ne s'était présenté jusque là dans aucun problème relatif à la distributiou de la chaleur dans un corps de forme donnée.

Je me bornerai, dans ce préambule, à ces citations; elles suffiront pour qu'on puisse connaître la première origine de la partie de la science que je vais traiter, l'extension et l'importance qu'elle a acquises dans ces derniers temps, et son état actuel. Je laisserai au lecteur à comparer les principes d'où l'on était parti jusqu'à présent et les résultats qu'on avait obtenus, aux principes et aux résultats qui seront exposés dans cet ouvrage. En lui donnant le titre de *Théorie mathématique de la Chaleur,* j'ai voulu indiquer qu'il s'agira de déduire, par un calcul rigoureux, toutes les conséquences d'une hypothèse générale sur la communication de la chaleur, fondée sur l'expérience et l'analogie. Ces conséquences seront alors une transformation de l'hypothèse même, à laquelle le calcul n'ôte et n'ajoute rien; et leur parfaite conformité avec les phénomènes obser-

*) Tome V. des *Mémoires présentés à l'Académie des Sciences.*

vés ne pourra laisser aucun doute sur la véritié de la théorie. Toutefois, pour que cette théorie fût complète, il faudrait qu'elle comprit la détermination des mouvemens produits par la chaleur dans les fluides aériformes, dans les liquides, et même dans les corps solides, mais les géomètres n'ont point encore abordé cet ordre de question, d'une grande difficulté, auquel se rattachent le phénomène des vents alisés, celui de certains courans qu'on observe dans la mer, et les variations diurnes du baromètre. Dans l'état actuel de la science, la théorie mathématique de la chaleur a seulement pour objet la communication de la chaleur de proche en proche dans l'intérieur les corps solides et des liquides, et à distance entre des corps différens: sous ce double rapport, je n'ai rien negligé pour que cet ouvrage fût aussi complet qu'on pourra le désirer.

Les données nécessaires pour réduire, dans chaque cas, les formules en nombres, sont la chaleur spécifique, la mesure de la conductibilité dans l'intérieur des corps, et celle du pouvoir rayonnant à leur surface. La chaleur spécifique a été déterminée pour un grand nombre de corps solides, liquides ou gazeux, par différens procédés qui sont exposés dans les traités de Physique; les notions qu'on a jusqu'à présent sur la conductibilité et sur le pouvoir rayonnant sont beaucoup moins précises. Indépendemment de ces données physiques, relatives à chaque corps en particulier, la théorie emprunte encore à l'expérience la loi de l'émmission de la chaleur à travers les surfaces des corps. Sur ce point, j'ai adopté la loi générale en fonction des températures, que MM. *Dulong* et *Petit* ont donnée dans le mémoire qui a remporté le prix de l'Académie des Sciences en 1818 *); ouvrage que l'on regarde, à juste titre, comme un des plus remarquables de la Physique expérimentale, soit à raison de l'importance et de l'ensemble des résultats, soit à cause de la précision des observations et des difficultés que les auteurs ont surmontées. En vertu de cette loi, la communication de la chaleur entre des corps ne dépend pas simplement de leur température relative, comme on l'avait admis pendant long-temps, d'après le principe de *Newton*, suffisamment exact dans le cas des températures ordinaires, mais qui s'écarte de plus en plus de l'observation à mesure que les températures sont plus élevées. L'analogie porte à croire, et j'ai supposé, en effet, qu'il en est de même dans l'intérieur des corps; et quoique la communication de la chaleur n'y ait lieu qu'entre des

*) *Journal de l'Ecole Politechnique,* 18. cahier.

molécules très voisines, dont les températures sont très peu différentes, la considération des carrés de leurs différences donne naissance, néanmoins, à des termes que j'ai déterminés, et dont l'omission rendait incomplète l'équation des températures intérieures, telle qu'on l'avait donnée jusqu'ici pour les corps homogènes.

Cette *Théorie mathématique de la Chaleur* formera la seconde partie d'un *Traité de Physique mathématique,* où je me propose de considérer successivement, sans m'astreindre à aucun ordre arrêté d'avance, les diverses questions de la Physique auxquelles je pourrai appliquer l'analyse. La première partie de ce Traité est la *Nouvelle théorie de l'Action capillaire,* publiée en 1831.

20.

De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae *).

(Auct. Dr. *C. G. J. Jacobi,* prof. ord. math. Regiom.)

1.

Series semiconvergentes, quibus Geometrae ante hos centum annos computare docuerunt summas, quae magno vel infinito numero terminorum constant, eo maxime se commendant, quod signis alternantibus procedere soleant; ita ut serie usque ad $n$tum et usque ad $(n+1)$tum terminum computata, alter eius valor maior, alter minor sit valore summae quaesito. Unde cognoscuntur limites, quos excedere non potest error commissus, si in certo termino seriei summatoriae computationem sistis. Frequentur illud observatum, tantum casibus specialibus, ni fallor, demonstratum est. Quod quoties locum habet, tutuo ac legitime ad calculandum summae valorem numericum seriae uti licet, quamvis constet post certum terminorum numerum eam fieri divergentem. Hinc operae pretium videtur, paucis demonstrare, quomodo est observatio precaria, ad certam et accuratam regulam revocetur.

Nota est formula

$$1.\quad \psi(x+h) = \psi(x)+\psi'(x)h+\psi''(x)\frac{h^2}{1.2}\cdots+\psi^{(x)}(x)\frac{h^n}{\Pi_n} +\int_0^h \frac{(h-t)^n}{\Pi_n}\psi^{(n+1)}(x+t)\,\partial t,$$

in qua positum est

$$\Pi_n = 1.2.3\ldots.n,\quad \psi^{(m)}(x) = \frac{\partial^m \psi(x)}{\partial x^m}.$$

Posito $-h$ loco h, simulque $-t$ loco t, formula illa abit in hanc,

$$2.\quad \psi(x-h) = \psi(x)-\psi'(x)h+\psi''(x)\frac{h^2}{1.2}\cdots(-1)^n\psi^{(n)}(x)\frac{h^n}{\Pi_n} +(-1)^{n+1}\int_0^h \frac{(h-t)^n}{\Pi_n}\psi^{(n+1)}(x-t)\,\partial t.$$

Sit

$$\psi(x) = \int_a^x f(x)\,\partial x,\quad \psi(x)-\psi(x-h) = \varphi(x),$$

*) *C. Maclaurin* treatise on fluxions pg. 672. §. 828.

ac supponamus, esse $x-a$ multiplum ipsius h, quod sequentibus semper positivum accipimus, erit

$$3.\quad \varphi(a+h)+\varphi(a+2h)+\cdots+\varphi(x) = \psi(x)-\psi(a) = \psi(x),$$

quam summam generaliter designemus per

$$\Sigma_a^x \varphi(x) = \varphi(a+h)+\varphi(a+2h)+\varphi(a+3h)+\cdots+\varphi(x),$$

excluso valore infimo $\varphi(a)$, incluso extremo $\varphi(x)$. Qua adhibita notatione, est e (3.):

$$4.\quad \sum_a^x \varphi(x) = \psi(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Habetur autem e (2):

$$5.\quad \varphi(x) = \psi(x)-\psi(x-h) =$$

$$\psi'(x)h-\psi''(x)\frac{h^2}{2}\cdots(-1)^{n-1}\psi^{(n)}(x)\frac{h^n}{\Pi_n}+(-1)^n\int_0^h \frac{(h-t)^n}{\Pi_n}\psi^{(n+1)}(x-t)\,dt,$$

sive cum sit

$$\psi'(x) = f(x), \text{ ac generaliter } \psi^{(m+1)}(x) = f^{(m)}(x),$$

erit, divisione simul per h facta,

$$6.\quad \frac{\varphi(x)}{h} = f(x)-f'(x)\frac{h}{2}+f''(x)\frac{h^2}{2.3}\cdots(-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)\frac{h^{n-1}}{\Pi_{(n-1)}}$$
$$+(-1)^n\int_0^h \frac{(h-t)^n}{h\Pi_n}f^{(n)}(x-t)\,dt.$$

Si in hac formula loco x ponimus $a+h$, $a+2h$, $a+3h$, ... x, atque summationem instituimus, obtinemus e (4.):

$$7.\quad \sum_a^x \frac{\varphi(x)}{h} = \int_a^x \frac{f(x)}{h}\,dx$$

$$= \sum_a^x \left\{f(x)-f'(x)\frac{h}{2}+f''(x)\frac{h^2}{2.3}\cdots+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)\frac{h^{n-1}}{\Pi_{(n-1)}}\right\}$$
$$+(-1)^n\int_0^h \frac{(h-t)^n}{h\Pi_n}\sum_a^x f^{(n)}(x-t)\,dt.$$

2.

Sit iam, evolutione facta,

$$8.\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{h}{2}}+e^{-\frac{h}{2}}}{e^{\frac{h}{2}}-e^{-\frac{h}{2}}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{e^h-1} = \frac{1}{h}+\alpha_1 h-\alpha_2 h^3+\alpha_3 h^5-\cdots;$$

multiplicatione facta per

$$e^h-1 = h+\frac{h^2}{\Pi_2}+\frac{h^3}{\Pi_3}+\frac{h^4}{\Pi_4}\cdots,$$

nanciscimur relationes sequentes, quibus coëfficientes α_m aliae post alias determinantur, et singulae quidem ex antecedentibus binis modis diversis,

$$9.\quad\begin{cases}\frac{1}{\Pi_3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\Pi_2}+\alpha_1 = 0,\\ \frac{1}{\Pi_4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\Pi_3}+\frac{\alpha_1}{\Pi_2} = 0,\\ \frac{1}{\Pi_5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\Pi_4}+\frac{1}{\Pi_3}-\alpha_2 = 0,\\ \frac{1}{\Pi_6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\Pi_5}+\frac{1}{\Pi_4}-\frac{\alpha_2}{\Pi_2} = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{1}{\Pi_{(2m+1)}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\Pi_{2m}}+\frac{\alpha_1}{\Pi_{(2m-1)}}-\frac{\alpha_2}{\Pi_{(2m-3)}}\cdots(-1)^m\alpha_m = 0,\\ \frac{1}{\Pi_{(2m+2)}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\Pi_{(2m+1)}}+\frac{\alpha_1}{\Pi_{2m}}-\frac{\alpha_2}{\Pi_{(2m-2)}}\cdots(-1)^{m+1}\frac{\alpha_m}{\Pi_2} = 0.\end{cases}$$

Harum relationum beneficio fit, ut si in formula (7.) loco $f(x)$ ponimus

$$f(x),\quad \tfrac{1}{2}f'(x)h,\quad \alpha_1 f''(x)h^2,\quad -\alpha_2 f^{\text{IV}}(x)h^4,\quad \ldots\ldots\quad (-1)^{m+1}\alpha_m f^{(2m)}(x)h^{2m},$$

atque simul loco n ponimus

$$n,\quad n-1,\quad n-2,\quad n-4,\quad \ldots\ldots\quad n-2m:$$

instituta additione, in altera aequationis parte sub signo summatorio, quod extra signum integrationis invenitur, abeant termini ducti in

$$f'(x)h,\quad f''(x)h^2,\quad f'''(x)h^3,\quad \ldots\ldots\quad f^{(2m+1)}(x)h^{2m+1}.$$

Unde si statuimus

$$n = 2m+2,$$

post factam additionem indicatam evanescit summa integra, quae in altera parte aequationis (7.) extra signum integrationis invenitur, excepto termino primo $\underset{a}{\Sigma}^x f(x)$, atque prodit formula memorabilis:

$$10.\quad \int_a^x \partial x\left[\frac{fx}{h}+\tfrac{1}{2}f'(x)+\alpha_1 f''h-\alpha_2 f^{\text{IV}}(x)h^3\ldots\ldots(-1)^{m+1}\alpha_m f^{(2m)}(x)h^{2m-1}\right]$$
$$= \underset{a}{\Sigma}^x f(x)+\int_a^h T_m \underset{a}{\Sigma}^x f^{(2m+2)}(x-t)\,\partial t,$$

posito

$$11.\quad T_m = \frac{(h-t)^{2m+2}}{h\Pi_{(2m+2)}}-\tfrac{1}{2}\frac{(h-t)^{2m+1}}{\Pi_{(2m+1)}}+\alpha_1\frac{(h-t)^{2m}h}{\Pi_{2m}}-\alpha_2\frac{(h-t)^{2m-2}h^3}{\Pi_{(2m-2)}}$$
$$+\alpha_3\frac{(h-t)^{2m-4}h^5}{\Pi_{(2m-4)}}\cdots\cdots(-1)^{m+1}\alpha_m\frac{(h-t)^2h^{2m-1}}{\Pi_2}.$$

Seriem ad laevam aequationis (10.) Cl. ***Maclaurin*** olim ad valorem summae $\underset{a}{\Sigma}^x f(x)$ computandum proposuit. Aequatio nostra insuper errorem assignant commissum, si in certo termino seriem sistis. Qui error cum per integrale definitum exprimatur, plerisque casibus de magnitudine eius indicare licet.

Numeros α_m notum est omnes esse positivos. Facta enim integratione sequitur e (8.):

$$12.\quad \log\left(e^{\frac{h}{2}}-e^{-\frac{h}{2}}\right) = \log h+\tfrac{1}{2}\alpha_1 h^2-\tfrac{1}{4}\alpha_2 h^4+\tfrac{1}{6}\alpha_3 h^6-\cdots$$
$$= \log h+\log\left[1+\frac{1}{\Pi_3}\left(\frac{h}{2}\right)^2+\frac{1}{\Pi_5}\left(\frac{h}{2}\right)^4+\cdots\right],$$

sive, expressione $e^{\frac{h}{2}}-e^{-\frac{h}{2}}$ in factores infinitos resoluta,

$$13.\quad \tfrac{1}{2}\alpha_1 h^2-\tfrac{1}{4}\alpha_2 h^4+\tfrac{1}{6}\alpha_3 h^6-\cdots = \Sigma_0^\infty \log\left(1+\frac{h^2}{4p^2\pi^2}\right),$$

ipsi p tributis valoribus 1, 2, 3 usque ad infinitum. Hinc habetur

$$14.\quad \tfrac{1}{2}\alpha_m = \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\Sigma_0^\infty \frac{1}{p^{2m}} = \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\left[1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{4^{2m}}+\cdots\right].$$

Unde facile etiam assignas limites, quibus quantitates α_m includuntur. Habetur enim

$$\Sigma_0^\infty \frac{1}{p^{2m+2}} < 1+\frac{1}{2^{2m}}\left(\Sigma_0^\infty \frac{1}{p^2}-1\right),$$

sive cum sit

$$\Sigma_0^\infty \frac{1}{p^2} = \tfrac{1}{6}\pi^2,$$

erit

$$\Sigma_0^\infty \frac{1}{p^{2m+2}} < 1+\frac{1}{2^{2m}}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right),$$

unde

$$15.\quad \frac{1}{(2\pi)^{2m}} < \tfrac{1}{2}\alpha_m < \frac{1}{(2\pi)^{2m}}\left[1+\frac{1}{2^{2m-2}}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)\right].$$

Qui limites facile, quantum placet, arctiores redduntur.

3.

Accuratius examinemus expressionem T_m. Qui posito

$$16.\quad \chi_{2m+1}^{(x)} = \frac{x^{2m+2}}{\Pi_{(2m+2)}}+\frac{1}{2}\frac{x^{2m+1}}{\Pi_{(2m+2)}}+\alpha_1\frac{x^{2m}}{\Pi_{2m}}-\alpha_2\frac{x^{2m-2}}{\Pi_{(2m-2)}}\cdots(-1)^{m+1}\alpha_m\frac{x^2}{2},$$

fit

$$17.\quad T_m = h^{2m+1}\chi_{2m+1}\left(\frac{t-h}{h}\right).$$

Notum est, et facile e (10.) demonstratur, designante x quemlibet numerum integrum, esse

$$18.\quad \chi_{2m+1}(x) = \Sigma_0^x \frac{x^{2m+1}}{\Pi_{(2m+1)}},$$

siquidem argumenti x incremetum $h=1$ statuimus. Casu vero nostro, quo

$$x = \frac{t-h}{h},$$

atque per integrationem t valores omnes a 0 usque ad h induit, erit x

quantitas fracta negativa, inter 0 et -1 posita. Quo casu non amplius definire licet expressionem $\chi_{2m+1}(x)$ ut summam. Nihilo tamen minus valet aequatio

$$19.\quad \chi_{2m+1}(x+1) = \chi_{2m+1}^{(x)} + \frac{(x+1)^{2m+1}}{\Pi_{(2m+1)}},$$

quicunque sit valor ipsius x. Nam cum aequatio illa, designante x integrum, e (18.) sponte pateat, ideoque pro diversis ipsius x valoribus innumeris valeat, identica illa esse debet. Statuto autem $x = \frac{t-h}{h}$, et multiplicatione per h^{2m+1} facta, fit ea e (17.):

$$20.\quad h^{2m+1}\chi_{2m+1}\left(\frac{t}{h}\right) = T_m + \frac{t^{2m+1}}{\Pi_{(2m+1)}},$$

unde

$$21.\quad T_m = \frac{t^{2m+2}}{h\Pi_{(2m+2)}} - \frac{1}{2}\frac{t^{2m+1}}{\Pi_{(2m+1)}} + \alpha_1\frac{t^{2m}h}{\Pi_{2m}} - \alpha_2\frac{t^{2m-2}h^3}{\Pi_{(2m-2)}} \dots (-1)^{m+1}\alpha_m\frac{t^2h^{2m-1}}{2}.$$

Qua expressione ipsius T_m collata cum superiore (11.), videmus, ita comparatam esse ipsam T_m, ut posito $h-t$ loco t immutata maneat. Habetur igitur

$$22.\quad T_m = h^{2m+1}\chi_{2m+1}\left(\frac{t-h}{h}\right) = h^{2m+1}\chi_{2m+1}\left(-\frac{t}{h}\right),$$

sive

$$\chi_{2m+1}(x-1) = \chi_{2m+1}(-x).$$

Quae abunde nota sunt. Et constat facile exprimi ipsum T_m per solas dignitates pares ipsius $t-\frac{h}{2}$, quae posito $h-t$ loco t non mutantur. Quam obtinent expressionem per formulam, que sponte patet,

$$23.\quad \sum_a^x [f(x), h] = \sum_a^x \left\{f\left(x+\frac{h}{2}\right), \frac{h}{2}\right\} - \sum_a^x \left\{f\left(x+\frac{h}{2}\right), h\right\};$$

ubi per signum $\Sigma[f(x), h]$ intelligo, argumenti x accipiendum esse h incrementum. De qua formula, posito

$$f(x) = \frac{x^{2m+1}}{\Pi^{(2m+1)}},\quad a = 0,\quad x = \frac{t-h}{h},$$

obtines:

$$T_m = \frac{\left(t-\frac{h}{2}\right)^{2m+2}}{h\Pi_{(2m+2)}} - \frac{\alpha_1}{2}\frac{\left(t-\frac{h}{2}\right)^{2m}h}{\Pi_{2m}} + \frac{\alpha_2}{8}\frac{\left(t-\frac{h}{2}\right)^{2m-2}h^3}{\Pi_{(2m-2)}} \dots$$

$$\dots (-1)^m\left(1-\frac{1}{2^{2m-1}}\right)\alpha\frac{\left(t-\frac{h}{2}\right)^2 h^{2m-1}}{\Pi_2} + h^{2m+1}\,\text{Const.}$$

Addo, cum T_m posito $h-t$ loco t non mutetur, theorema nostrum (10.)

etiam ita exhiberi posse:

$$25.\quad \int_a^x \partial x \left\{ \frac{f}{h} x + \frac{1}{2} f'(x) + \alpha_1 f''(x) h - \alpha_2 f^{\text{IV}}(x) h^3 \ldots (-1)^{m+1} \alpha_m f^{(2m)}(x) h^{2m-1} \right\}$$
$$= \mathop{\Sigma}_a^x f(x) + \int_0^h T_m \mathop{\Sigma}_a^x f^{(2m+2)}(x-h+t)\,dt$$
$$= \mathop{\Sigma}_a^x f(x) + \int_0^{\frac{h}{2}} T_m \mathop{\Sigma}_a^x [f^{(2m+2)}(x-t) + f^{(2m+2)}(x-h+t)]\,dt.$$

4.

In theoremate nostro (10.) seu (25.) cum valores ipsius t tantum inter 0 et h positi considerentur, iam demonstrabimus, in quo cardo rei nostrae vertitur, pro omnibus illis valoribus ipsius t ipsum T_m signum non mutare. Quam ita adornare licet demonstrationem.

Habetur

$$26.\quad \frac{1}{2}\left\{ \frac{1-e^{xz}}{1-e^z} - \frac{1-e^{-xz}}{1-e^{-z}} \right\} = z\chi_1(x-1) + z^3\chi_3(x-1) + z^5\chi_5(x-1) + \cdots$$

Quae, designante x integrum, sponte patet evolutio e (18.), cum sit

$$\frac{1-e^{xz}}{1-e^z} = \mathop{\Sigma}_0^x e^{z(x-1)},$$

ipsius x incremento $=1$ posito. Unde cum aequatio (26.) pro innumeris ipsius x valoribus valeat, pro natura functionum $\chi(x)$, quae sunt rationales. integrae, finitae, eadem pro quolibet ipsius x valore valet. Sit iam

$$x' = 1-x,$$

erit

$$27.\quad \frac{1-e^{xz}}{1-e^z} - \frac{1-e^{-xz}}{1-e^{-z}} = \frac{1-e^{xz}}{1-e^z} + \frac{e^z - e^{x'z}}{1-e^z} = \frac{(1-e^{xz})(1-e^{x'z})}{1-e^z}$$
$$= -\frac{\left(e^{\frac{x}{2}z} - e^{-\frac{x}{2}z}\right)\left(e^{\frac{x'}{2}z} - e^{-\frac{x'}{2}z}\right)}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}}.$$

Unde fit e (26.), si expressionem hanc in factores infinitos resolvis:

$$28.\quad -zxx'\,\Pi \frac{\left(1+\frac{x^2z^2}{4p^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{x'^2z^2}{4p^2\pi^2}\right)}{\left(1+\frac{4}{4p^2\pi^2}\right)} = 2[z\chi_1(x-1) + z^3\chi_3(x-1) + \cdots].$$

siquidem in producto praefixo Π denotato ipsi p valores 1, 2, 3, ... ∞ tribuis.

Ponamus

$$y = \frac{-z^2}{4p^2\pi^2},$$

erit expressio sub signo multiplicatorio in (28.),

$$29.\quad \frac{(1-x^2y)(1-x'^2y)}{(1-y)} = 1+(1-x^2-x'^2)y+\frac{(1-x^2)(1-x'^2)y^2}{1-y}$$
$$= 1+2xx'y+xx'(2+xx')\frac{y^2}{1-y}.$$

Quae expressio evoluta in seriem secundum dignitates ascendentes ipsius y seu $(-z^2)$, coëfficientes omnes habet positivos, si xx' positivum est. Quo casu igitur etiam productum Π, e factoribus (29.) conflatum, si ad dignitates ipsius $(-z^2)$ evolvitur, coëfficientes omnes habebit positivos; sive cum in expressione (28.) productum Π adhuc ducatur in $-xx'z$, coëfficientes expressionis illius evolutae, $2\chi_{2m+1}(x-1)$, erunt positivi, si m est impar, negativi, si m est numerus par.

Fit autem $xx' = x(1-x)$ positivum pro iis valoribus ipsius x omnibus, qui sunt inter 0 et 1 positi, neque pro illis aliis. Unde

„*erit* $\chi_{2m+1}(x-1)$ *pro valoribus ipsius* x *omnibus inter* 0 *et* 1 *po-*
„*sitis positivum, si* m *est numerus impar, negativum, si* m *est par.*"

Unde, cum posito $x=\frac{t}{h}$, sit t inter 0 et h, si x inter 0 et 1, sequitur e (17.) incremento h semper positivo accepto,

„*pro omnibus ipsius* t *valoribus inter* 0 *et* h *positis, esse* T_m *posi-*
„*tivum, si* m *sit numerus impar, negativum, si* m *sit par.*"

5.

Et hinc profecti sine ulla negotio iam de formula nostra (10.) deducimus hoc theorema.

Theorema.

„*Proposita summa*

$$„\sum_a^x f(x) = f(a+h)+f(a+2h)+f(a+3h)\;\ldots\;+f(x),$$

„*quoties expressio*

$$„\sum_a^x f^{(2m+2)}(x-t) = \sum_a^x \frac{\partial^{2m+2}f(x-t)}{\partial x^{2m+2}},$$

„*pro valoribus omnibus ipsius* t *inter* 0 *et* h *positis neque in infinitum*
„*abit, neque signum mutat: excessus seriei summatoriae usque ad*
„$(m+2)^{\text{tum}}$ *terminum productae super valorem summae propositae,*

$$„\int_a^x dx\left\{\frac{f(x)}{h}+\tfrac{1}{2}f'(x)+\alpha_1 f''(x)h-\alpha_2 f^{\text{IV}}(x)h^3\;\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\;(-1)^{m+1}\alpha_m f^{(2m)}(x)h^{2m-1}\right\}-\sum_a^x f(x)$$

„idem signum habet atque $\sum\limits_a^x f^{(2m+2)}(x-t)$, *si m est numerus impar,*
„signum contrarium, si m est numerus par."

Quod est de re, quae satis vagis ratiociniis tractari solet, theorema rigorosum et accuratum.

Vocemus S_m valorem seriei Maclaurinianae usque ad $(m+2)$tum terminum productae,

$$S_m = \int_u^x \partial x \left[\frac{f(x)}{h} + \tfrac{1}{2} f'(x) + \alpha_1 f''(x) h - \alpha_2 f^{\text{IV}}(x) h^3 \dots (-1)^{m+1} \alpha_m f^{(2m)}(x) h^{2m-1}\right]:$$

Sequitur e theoremate invento hoc:

„Si utraque expressio

$$„\sum_a^x f^{(2m)}(x-t), \quad \sum_a^x f^{(2m+2)}(x-t)$$

„pro valoribus omnibus ipsius t inter 0 et h positis neque in infi-
„nitum abit neque signum mutat, idemque utrique signum suppetit,
„summae propositae $\sum\limits_a^x f(x)$ *valor inclusus est inter valores* G_{m-1}
„et G_m."

Idem extenditur ad casum generaliorem, quo indicum m differentia est numerus quilibet impar.

Facile patet, esse generaliter

$$30. \quad \int_a^x \varphi(x) \partial x = \int_0^h \sum_a^x \varphi(x-t) \partial t.$$

Unde si $\sum\limits_a^x f^{(2m+2)}(x-t)$, si t inter 0 et h, neque signum mutat neque in infinitum abit, idem etiam signum erit integrali

$$\int_a^x f^{(2m+2)}(x) \partial x;$$

porro e theoremate invento idem signum est expressioni

$$(-1)^{m+1} [G_m - \sum_a^x f(x)].$$

Hinc habemus theorema:

„Si $\sum\limits_a^x f^{(2m+2)}(x-t)$, *quoties t inter 0 et h, neque signum mutat*
„neque in infinitum abit, excessus $G_m - \sum\limits_a^x f(x)$ *signum contrarium*
„habet atque terminus seriei Maclaurinianae, qui ipsam G_m *proxime*
„continuat,

$$„(-1)^m \alpha_m \int_a^x f^{(2m+2)}(x) \partial x."$$

Casibus, quibus prae ceteris applicatur series summatoria Maclauriniana, conditionibus antecedentibus stabilitis satisfieri solet. Quibus igitur casibus de erroris limitibus tibi constabit, atque seriei tutus et legitimus usus erit.

Corollarium.

Apponam summas dignitatum imparium numerorum naturalium sive functionum $\Pi_{(2m+1)}\chi_{2m+1}(x)$, expressas per quantitatem

$$u = x(x+1).$$

Fit

$$\sum_0^x x^3 = \tfrac{1}{4}.u^2$$
$$\sum_0^x x^5 = \tfrac{1}{6}u^2(u-\tfrac{1}{2})$$
$$\sum_0^x x^7 = \tfrac{1}{8}u^2(u^2-\tfrac{4}{3}u+\tfrac{2}{3})$$
$$\sum_0^x x^9 = \tfrac{1}{10}u^2(u^3-\tfrac{5}{2}u^2+3u-\tfrac{3}{2})$$
$$\sum_0^x x^{11} = \tfrac{1}{12}u^2(u^4-4u^3+\tfrac{17}{2}u^2-10u+5)$$
$$\sum_0^x x^{13} = \tfrac{1}{14}u^2(u^5-\tfrac{35}{6}u^4+\tfrac{287}{15}u^3-\tfrac{118}{3}u^2+\tfrac{691}{15}u-\tfrac{691}{30})$$

etc. etc.

Quae expressiones maxime in inferiorum dignitatum summis eo se commendant, quod earum terminorum numerus duobus minor sit atque vulgarium formularum.

Ad continuandas expressiones observo, si

$$\sum_0^x x^{2p-3} = \frac{1}{2p-2}[u^{p-1}-a_1u^{p-2}+a_2u^{p-3}\dots(-1)^{p-1}a_{p-3}u^2],$$
$$\sum_0^x x^{2p-1} = \frac{1}{2p}[u^p-b_1u^{p-1}+b_2u^{p-2}\dots(-1)^p b_{p-2}u^2],$$

haberi:

$$2p(2p-1)a_1 = (2p-2)(2p-3)b_1-p(p-1)$$
$$2p(2p-1)a_2 = (2p-4)(2p-5)b_2-(p-1)(p-2)b_1$$
$$2p(2p-1)a_3 = (2p-6)(2p-7)b_3-(p-2)(p-3)b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$2p(2p-1)a_{p-3} = 5.6b_{p-3}-3.4b_{p-4}$$
$$0 = 3.4b_{p-2}-2.3b_{p-3}.$$

Harum relationum ope, cognitis a_m, coefficientes b_m aliae post alias computantur. Calculus et retro institui potest, cum coëfficientem postremum eandem habeas atque in forma vulgari, quae secundum dignitates ipsius x procedit.

Expressiones similes summarum parium dignitatum obtines ex antecedentibus differentiando, cum sit

$$\sum_0^x x^{2p} = \frac{1}{2p+1} \frac{\partial \sum_0^x x^{2p+1}}{\partial x}.$$

Relationes antecc. inter quantitates a et b facile e noto theoremate inveniuntur, quod summa numerorum naturalium ad dignitatem imparem elatorum bis differentiata, reiectaque constante et per constantem divisione facta, prodeat summa numerorum naturalium ad dignitatem imparem proxime minorem elatorum.

Ex iisdem relationibus ipso conspectu demonstratur, expressiones propositas, sicuti in exemplis appositis videre est, alternantibus signis procedere. Quippe quod, ubi in ulla valet, e natura relationum istarum etiam de subsequentibus omnibus valebit. Unde quoties u est quantitas negativa, expressionum termini omnes signum idem habent, quod e signo dignitatis supremae determinatur. Hinc petitur demonstratio nova magis elementaris theorematis supra propositi, expressionem T_m pro ipsius t valoribus omnibus inter 0 et h positis signum idem servare.

Residui seriei summatoriae Maclaurinianae expressionem a nostra diversam dedit ill. *Poisson* in commentatione egregia *„Sur le calcul numérique des Intégrales définies"* (Acad. des Sciences Vol. VI. pag. 571 sqq.).

D. 2. Junii 1834.

21.

Mémoire sur une formule d'analyse.

(Par Mr. *Joseph Liouville* à Paris.)

I.

1. Dans mon mémoire *sur quelques questions de Géométrie et de Mécanique,* j'ai donné la formule

$$A.\quad \int_0^\infty \varphi(x+\alpha)\alpha^{\mu-1}d\alpha = (-1)^\mu\Gamma(\mu)\int^\mu \varphi(x)dx^\mu$$

dans laquelle μ est >0 et où $\Gamma(\mu)$ représente, suivant la notation de *Legendre,* l'intégrale Eulérienne de seconde espèce $\int^\infty e^{-\theta}.\theta^{\mu-1}d\theta$. Cette rélation entre les dérivées à indices quelconques et les intégrales définies est une conséquence presque immédiate de notre définition des différentielles. On sait qu'après avoir remplacé la fonction $\varphi(x)$ par un certain développement en série de la forme $\Sigma A_m e^{mx}$, nous régardons l'intégrale $\int^\mu \varphi(x)dx^\mu$ comme la représentation abrégée de la série nouvelle $\Sigma A_m \frac{e^{mx}}{m^\mu}$, qui se déduit de la première, à l'aide d'une opération très simple. D'après la démonstration développée au 21ème cahier du journal de l'Ecole plytechnique, page 8., diverses conditions doivent être remplies pour que la formule ($A.$) soit exacte.

1°. Il faut que dans le développement exponentiel $\Sigma A_m e^{mx}$ de la fonction $\varphi(x)$, les exposants m soient tous de la forme $m = -p + q\sqrt{-1}$, c'est-à-dire que la partie réelle de ces exposants doit être négative: quant à la partie imaginaire de m, son signe et sa grandeur importent peu.

2°. Il faut en outre que se développement conserve la même forme si l'on change x en $x+\alpha$ et que l'on attribue ensuite à α une valeur réelle et positive quelconque. En d'autres termes, il faut que l'égalité:

$$\varphi(x+\alpha) = \Sigma A_m e^{m(x+\alpha)}$$

subsiste pour toutes les valeurs de α comprises entre 0 et $\frac{1}{0}$.

2. Il y a plusieurs manières de parvenir à la formule ($A.$): elles conduisent en général à des résultats semblables. Celle que j'ai adoptée, dans le mémoire cité plus haut, me parait la plus simple et la plus directe

de toutes. On peut encore démontrer notre théorème en regardant l'intégrale $\int^\mu \varphi(x)\,dx^\mu$ comme la vraie valeur d'une expression réduite à la forme $\frac{0}{0}$, conformément à la théorie que j'ai exposée dans un autre endroit. En effet si la fonction $\varphi(x)$ ne contient dans son développement exponentiel $\Sigma A_m e^{mx}$ que des exposants de la forme $m = -p + q\sqrt{-1}$, on soit que la valeur de l'intégrale $\int^\mu \varphi(x)\,dx^\mu$ coïncide avec celle que l'on obtient en faisant $h = 0$ dans la suite infinie

$$P_h = \frac{h^\mu}{(-1)^\mu}\left(\varphi(x) + \frac{\mu}{1}\varphi(x+h) + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}\varphi(x+2h) + \dots\right)$$

en sorte que si la quantité h est supposée infiniment petite, on a rigoureusement

$$\int^\mu \varphi(x)\,dx^\mu = \frac{h^\mu}{(-1)^\mu}\left(\varphi(x) + \frac{\mu}{1}\varphi(x+h) + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}\varphi(x+2h) + \dots\right).$$

En désignant par T_n le terme général de la série

$$\varphi(x) + \frac{\mu}{1}\varphi(x+h) + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2}\varphi(x+2h) + \dots,$$

on aura

$$T_n = \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+n-1)}{1.2.3\dots n},$$

et l'égalité précédente deviendra

$$\int^x \varphi(x)\,dx^\mu = \frac{h^\mu}{(-1)^\mu}(T_0 + T_1 + T_2 + \dots + T_n + \dots).$$

Maintenant il faut observer que h^μ est une quantité infiniment petite puisque μ est >0. Il résulte de là qu'on peut, sans erreur sensible, faire abstraction d'un nombre quelconque des premiers termes du second membre de notre équation, et tenir compte seulement des derniers termes qui, étant en nombre infini, donnent un produit fini lorsqu'on multiplie leur somme par h^μ. Soit donc p un nombre entier aussi grand qu'on voudra, et il sera permis d'écrire

$$\int^\mu \varphi(x)\,dx^\mu = \frac{h^\mu}{(-1)^\mu}(T_p + T_{p+1} + \dots + T_n + \dots).$$

Mais lorsque n est une quantité très considérable, l'expression de T_n se simplifie à l'aide des formules connues pour le calcul des produits composés d'un grand nombre de facteurs, et devient à peu près

$$T_n = \frac{n^{\mu-1}\varphi(x+nh)}{\Gamma(\mu)}.$$

En y faisant successivement $n = p$, $n = p+1$, etc., on formera les divers termes T_p, T_{p+1}, etc., et on trouvera

$$\int^{\mu}\varphi(x)\,dx^{\mu} = \frac{h^{\mu}}{(-1)^{\mu}\Gamma(\mu)}(p^{\mu-1}\varphi(x+ph)+(p+1)^{\mu-1}\varphi(x+(p+1)h)+\ldots).$$

Cette égalité prend une forme plus commode, en ajoutant au second membre la quantité

$$\frac{h^{\mu}}{(-1)^{\mu}\Gamma(\mu)}(\varphi(x+h)+2^{\mu-1}\varphi(x+2h)+\ldots+(p-1)^{\mu-1}\varphi(x+(p-1)h)),$$

dont la valeur est négligeable à cause du facteur évanouissant h^{μ}. Le résultat qu'on obtient alors peut être écrit ainsi:

$$\int^{\mu}\varphi(x)\,dx^{\mu} = \frac{1}{(-1)^{\mu}\Gamma(\mu)}\sum_{n=1}^{n=\infty} h^{\mu}n^{\mu-1}\varphi(x+nh)$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières de n, comprises entre $n=0$ et $n=\infty$.

Ainsi en attribuant à n les valeurs successives $n=1$, $n=2$, $n=3$,.... jusqu'à $n=\infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} h^{\mu}n^{\mu-1}\varphi(x+nh) = (-1)^{\mu}\Gamma(\mu)\int^{\mu}\varphi(x)\,dx^{\mu}.$$

Actuellement posez $nh=\alpha$, et, parceque h est infiniment petit, regardez l'accroissement h de α comme égal à $d\alpha$, vous transformerez le premier membre en une intégrale définie, et cette intégrale sera précisément $\int_0^{\infty}\varphi(x+\alpha)\alpha^{\mu-1}d\alpha$. Donc, en remplaçant la somme Σ par l'intégrale que je viens d'écrire, l'équation précédente deviendra l'équation (A.) qu'il s'agissait de démontrer.

II.

3. Dans le journal de l'Ecole polytechnique, je me suis servi de formule (A.) pour résoudre plusieurs problêmes dans lesquels il s'agissait, au fond, de déterminer la fonction $\varphi(x)$ à l'aide de l'équation:

$$\int_0^{\infty}\varphi(x+\alpha)\alpha^{\mu-1}d\alpha = F(x),$$

$F(x)$ étant une quantité connue, assujéttie en général à devenir nulle quand $x=+\infty$.

Pour fixer les idées, et indiquer par un exemple la manière de procéder, supposons que $\mu=\frac{1}{2}$, et proposons nous de déterminer $\varphi(x)$ par la condition

$$1.\quad \int_0^{\infty}\varphi(x+\alpha)\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = F(x).$$

Comme la formule (A.) nous donne

$$\int_0^\infty \varphi(x+\alpha)\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{-1}\sqrt{\pi}\int^{\frac{1}{2}} \varphi(x)\,dx^{\frac{1}{2}},$$

nous transformerons l'équation du problème, dans celle-ci:

$$\sqrt{-1}\sqrt{\pi}\int^{\frac{1}{2}} \varphi(x)\,dx^{\frac{1}{2}} = F(x)$$

d'où nous tirerons:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d^{\frac{1}{2}}F(x)}{dx^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette valeur de $\varphi(x)$ contient implicitement un nombre illimité de constantes arbitraires, à cause de la fonction complémentaire qu'on doit ajouter aux différentielles à indices quelconques, pour leur donner toute la généralité qu'elles comportent. Mais parmi les valeurs de $\varphi(x)$, il y en a une et une seule qui possède la propriété de diminuer jusqu'à zéro quand x augmente jusquà l'infini positif; et c'est celle là dont nous devons faire choix, puisque la fonction $F(x)$ étant, par hypothèse, de telle nature que l'on ait $F\left(\frac{1}{0}\right) = 0$, l'intégrale $\int^\infty \varphi(x+\alpha)\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}$, et *à fortiori* la fonction $\varphi(x)$ doivent s'annuller aussi lorsque $x = \frac{1}{0}$.

Maintenant si l'on observe que

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}F(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} = \int^{\frac{1}{2}} F'(x)\,dx^{\frac{1}{2}},$$

$F'(x)$ étant l'expression abrégée de $\frac{dF(x)}{dx}$, on trouvera par le secours de la formule (A.):

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}F(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}\int_0^\infty F'(x+\beta)\frac{d\beta}{\sqrt{\beta}}$$

et on en conclura:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty F'(x+\beta)\frac{d\beta}{\sqrt{\beta}}$$

valeur qui satisfait à la condition $\varphi\left(\frac{1}{0}\right) = 0$, et au moyen de laquelle l'égalité (1.) aura lieu.

4. En changeant x en $x+\alpha$ et reportant ensuite dans l'équation (1.) la valeur de $\varphi(x+\alpha)$ qui en résulte, il vient:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty F'(x+\alpha+\beta)\frac{d\alpha\,d\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = -\pi F(x),$$

résultat singulier qui nous fait connaître la valeur d'une intégrale double assez remarquable, et qu'il nous sera facile de démontrer directement de la manière suivante.

Changeont α en α^2 et β en β^2: désignons en outre par ζ l'intégrale double en question, et nous aurons

$$\zeta = 4\int_0^\infty\int_0^\infty F'(x+\alpha^2+\beta^2)\,d\alpha\,d\beta.$$

Considérant donc α et β comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point M appartenant à un plan, nous voyons que l'intégrale est relative à tous les points de ce plan, situés dans l'angle des coordonnées positives. Mais rien n'empêche de substituer aux coordonnées rectangulaires α, β des coordonnées polaires ayant la même origine, et consistant dans un rayon vecteur r et un angle ω compris entre ce rayon vecteur et l'axe des α. Nous aurons de la sorte

$$\alpha^2+\beta^2 = r^2, \qquad d\alpha\,d\beta = r\,dr\,d\omega,$$

et

$$\zeta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega\int_0^\infty F'(x+r^2)\,r\,dr.$$

Les deux intégrations s'éffectuent de suite, et si l'on suppose la fonction $F(x+r^2)$ telle qu'elle se réduise à zéro quand $r=\infty$, on trouve $\zeta = -\pi F(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

5. On obtiendra des résultats semblables, en considerant l'équation générale

$$2.\quad \int_0^\infty \varphi(x+\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = F(x).$$

C'est ce que nous allons prouver. Toutefois dans la vue de simplifier les calculs, nous supposerons $\mu<1$, ce qui au fond n'altérera en rien la généralité de notre analyse.

En remplaçant, dans l'équation (2.), l'intégrale définie par sa valeur en intégrale indéfinie, il vient:

$$(-1)^\mu\Gamma(\mu)\int^\mu \varphi(x)\,dx^\mu = F(x)$$

d'où l'on tire:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(-1)^\mu\Gamma(\mu)}\cdot\frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu},$$

ou:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(-1)^\mu\Gamma(\mu)}\int^{1-\mu} F'(x)\,dx^{1-\mu}.$$

Donc en exprimant à son tour en quadrature définie, l'intégrale du second membre, nous aurons:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)}\int_0^\infty F'(x+\beta)\frac{d\beta}{\beta^\mu}.$$

Cette valeur de $\varphi(x)$ est la seule qui puisse satisfaire à l'équation (2.), puisque nulle autre ne s'accorde avec la condition $F\left(\frac{1}{0}\right)=0$, laquelle exige qu'on ait $\varphi\left(\frac{1}{0}\right)=0$. Changeons donc x en $x+\alpha$, et substituons dans l'équation (2.) la valeur de $\varphi(x+\alpha)$ ainsi obtenue; nous tomberons sur l'égalité

$$\int_0^\infty \int_0^\infty F'(x+\alpha+\beta)\frac{\alpha^{\mu-1}}{\beta^\mu}\,d\alpha\,d\beta = -\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)F(x),$$

qui doit être satisfaite identiquement, et qu'il s'agit de vérifier par une méthode indépendante de la considération des différentielles à indices quelconques. Pour cela je désigne par ζ la quadrature double qui s'y trouve; je remplace α par α^2, β par β^2, et j'ai:

$$\zeta = 4\int_0^\infty \int_0^\infty F'(x+\alpha^2+\beta^2)\frac{\alpha^{2\mu-1}}{\beta^{2\mu-1}}\,d\alpha\,d\beta.$$

On transformera les coordonnées rectangulaires α, β en coordonnées polaires, si l'on pose

$$\alpha = r\cos\omega, \qquad \beta = r\sin\omega$$

et on en déduira

$$\zeta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\partial\omega\int_0^\infty F'(x+r^2).\cot^{2\mu-1}\omega.r\,dr.$$

On effectue aisément l'intégration par rapport à r; et puisque l'on suppose $F(x+r^2)=0$ quand $r=\infty$, il vient

$$\zeta = -2F(x)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cot^{2\mu-1}\omega.d\omega.$$

Je pose $\cot\omega=\sqrt{z}$, et j'ai ainsi:

$$\zeta = -F(x)\int_0^\infty \frac{z^{\mu-1}\,dz}{1+z}.$$

Or ce dernier résultat, d'après les propriétés des fonctions Γ (Voyez le 19ième cahier du journal de l'Ecole polytechnique, page 479.) ne diffère pas de l'équation qu'il s'agissait de vérifier.

III.

6. La formule (*A.*) doit être regardée comme très importante dans la théorie des différentielles á indices quelconques. C'est en effet à l'aide de la relation qu'elle établit entre ces différentielles et les quadratures définies, qu'on parvient à ramener aux dérivées fractionnaires et à résoudre d'une manière directe un grand nombre de questions difficiles. Parmi ces questions, les unes sont relatives à la Géométrie et à

la Mécanique; et ce que nous avons écrit à ce sujet dans le journal de l'Ecole polytechnique suffit pour en donner une idée, quoique nous n'ayons proposé que des exemples extrêmement simples. Mais c'est principalement par ses applications à la théorie des intégrales définies que le calcul des différentielles à indices quelconques peut être utile ainsi que nous espérons le montrer par la suite.

Il existe un grand nombre de formules semblables à la formule ($A.$) et qui peuvent aisément s'en déduire par diverses transformations. Nous allons en indiquer quelques unes.

7. Dans la formule ($A.$), je change x en x^2: elle devient

$$\int_0^\infty \varphi(x^2+\alpha)\alpha^{\mu-1}d\alpha = (-1)^\mu\Gamma(\mu)\int^\mu \varphi(x^2)\,d(x^2)^\mu.$$

Soit $F(x)$ une fonction nouvelle telle que l'on ait:

$$\varphi(x^2) = \frac{F(x)}{x^2},$$

et par conséquent:

$$\varphi(x^2+\alpha) = \frac{F(\sqrt{(x^2+\alpha)}}{x^2+\alpha}.$$

En remplaçant partout la fonction $\varphi(x)$ par la fonction $F(x)$, nous obtiendrons:

$$\int_0^\infty \frac{F(\sqrt{(x^2+\alpha)})}{x^2+\alpha}\alpha^{\mu-1}d\alpha = (-1)^\mu\Gamma(\mu)\int^\mu \frac{F(x)}{x^2}\,d(x^2)^\mu.$$

Si maintenant nous substituons à la lettre α une autre lettre β liée à la première par l'égalité.

$$\alpha = \frac{x^2}{\operatorname{tang}^2\beta},$$

les limites de l'intégrale deviendront $\beta=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$; et nous trouverons, tout calcul fait:

$$(B.)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{x}{\sin\beta}\right)\frac{d\beta}{\operatorname{tang}^{2\mu-1}\beta} = (-1)^\mu.\frac{\Gamma(\mu)}{2\,x^{2\mu-2}}.\int^\mu \frac{F(x)}{x^2}\,d(x^2)^\mu.$$

C'est la formule à laquelle je voulais parvenir. En y posant $\mu=\frac{1}{2}$, elle se réduit à:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{x}{\sin\beta}\right)d\beta = \frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}{2}.x.\int^{\frac{1}{2}} \frac{F(x)}{x^2}\,d(x^2)^{\frac{1}{2}},$$

égalité déjà démontrée dans 21[ème] cahier du journal de l'Ecole polytechnique, page 42.

En changeant dans cette égalité $F(x)$ en $F(x^2)$, puis (x) en $\sqrt{x}$, elle deviendra plus simplement:

$$\int^{\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{x}{\sin^2\beta}\right) d\beta = \frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}\sqrt{x}}{2} \int^{\frac{1}{2}} \frac{F(x)}{x} dx^{\frac{1}{2}}:$$

si donc on pose successivement

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}} \quad \text{et} \quad F(x) = \sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)},$$

on tombera sur ces deux résultats remarquables:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{\left(1-\frac{\sin^2\beta}{x}\right)}} = \frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}\sqrt{x}}{2} \int^{\frac{1}{2}} \frac{dx^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(x^2-x)}}$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta \sqrt{\left(1-\frac{\sin^2\beta}{x}\right)} = \frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}\sqrt{x}}{2} \int^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{(x-1)}}{x\sqrt{x}}\, dx^{\frac{1}{2}},$$

qui nous montrent que les fonctions elliptiques complètes de première et de seconde espèce, considérées comme fonctions du module, peuvent toujours se transformer en intégrales indéfinies à indices fractionnaires prises par rapport à ce module. Ce théorême s'ètend aux fonctions complètes de troisième espèce, et on trouverait de la même manière:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\left(1+\frac{a\sin^2\beta}{x}\right)\sqrt{\left(1-\frac{\sin^2\beta}{x}\right)}} = \frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}\sqrt{x}}{2} \int^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}\,.\,dx^{\frac{1}{2}}}{(x+a)\sqrt{(x-1)}}.$$

8. Par des transformations très simples, la formule (*B.*) en fournira deux autres que je rapporterai ici parcequ'elles trouvent leur application dans des problèmes physico-mathématiques. Ces formules sont

$$(C.) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x\cos\omega)\, d\omega = \frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}{2\pi} \int^{\frac{1}{2}} F(x)\, x^2 d\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$(D.) \quad \int^{\pi} F(x\cos\omega)\, d\omega = \frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}{2x} \int^{\frac{1}{2}} (F(x)+F(-x))\, x^2 d\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Mais au lieu de m'arrêter à les démontrer, j'indiquerai en peu de mots une manière nouvelle de parvenir au théorême que j'ai donné dans le 21[ième] cahier du journal de l'Ecole polytechnique, page 47., et qut m'a servi à généraliser le problême des tautochrones. La formule à laquelle je fais allusion est la suivante:

$$(E.) \quad \int_0^1 \varphi\left(\frac{\theta}{x}\right)(1-\theta)^p d\theta = (-1)^{p+1}.x.\Gamma(p+1) \int^{p+1} \frac{\varphi\left(\frac{1}{x}\right) dx^{p+1}}{x^{p+2}}.$$

Or, pour la déduire de l'équation (*B.*), changez d'abord x en $\sqrt{x}$, et fai-

tes $\sin\beta = \sqrt{\theta}$; cela vous donnera:

$$\int_0^1 F\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\theta}}\right)\frac{(1-\theta)^{\mu-1}\,d\theta}{\theta^\mu} = (-1)^\mu\,\frac{\Gamma(\mu)}{x^{\mu-1}}\int^\mu \frac{F(\sqrt{x})}{x}\,dx^\mu.$$

Maintenant posez $F(\sqrt{x}).x^\mu = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, $\mu = p+1$: vous trouverez tout de de suite:

$$\int_0^1 \varphi\left(\frac{\theta}{x}\right)(1-\theta)^p\,d\theta = (-1)^{p+1}.x.\Gamma(p+1)\int^{p+1}\frac{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)dx^{p+1}}{x^{p+2}}$$

ce qui est précisément la formule (*E.*). Dans le journal de l'Ecole polytechnique déjà cité, nous avons démontré cette formule en développant la fonction $\varphi\left(\frac{\theta}{x}\right)$ en série ordonnée suivant les puissances de x, et en partant de la relation connue

$$\int_0^1 \theta^m(1-\theta)^p\,d\theta = \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+p+2)}$$

qui existe entre les intégrales Eulériennes de première et de seconde espèce. Réciproquement notre formule (*E.*) qui vient à l'instant même d'être établie d'une manière directe, tout à fait indépendante de cette relation, pourrait à son tour servir à la démontrer. Il suffirait pour cela de poser $\varphi(x) = x^m$ dans les deux membres de l'équation et d'observer qu'on a

$$\int^{p+1}\frac{dx^{p+1}}{x^{m+p+2}} = \frac{1}{(-1)^{p+1}}.\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+p+2)\,x^{m+1}}.$$

IV.

9. J'ai déja eu occasion de montrer l'usage de la formule (*E.*) pour résoudre le problème si connu de la tautochrone dans le vide et pour le généraliser. On peut aussi par la même méthode déterminer la tautochrone dans un milieu résistant comme le carré de la vitesse.

Pour cela soit AmM la courbe tautochrone dont A est le point le plus bas: la nature de cette courbe consiste, comme on sait, en ce que si l'on place en M, sans vitesse initiale, un mobile soumis à la fois à l'action de la pesanteur et à celle d'un milieu résistant, ce mobile emploiera toujours le même temps T pour aller de M en A, quel que soit le point de départ M.

Supposons donc qu'au bout du temps t, le mobile soit descendu de M en m et désignons l'arc Am par s. L'équation du mouvement sera de la forme:

$$(\alpha.) \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -g\frac{dx}{ds} + n\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

g étant l'intensité de la pesenteur, n le coëfficient de la résistance du milieu, et x l'ordonnée verticale du point m comptée à partir du plan horizontal mené par l'origine A. Soit en outre $x = h$ la valeur de x qui répond à $t = 0$, ou, si l'on veut, l'ordonnée verticale du point M; et désignons par b l'intégrale définie $\int_0^h e^{-2ns} dx$. Enfin observons que, pour $t = 0$, on a $\frac{ds}{dt} = 0$; et que pour $x = 0$, on a $t = T$ quel que soit h.

Cela posé, en intégrant l'équation (α.), nous trouverons:

$$T = \frac{1}{\sqrt{(2g)}}\int_0^h \frac{e^{-ns}.\frac{ds}{dx}.dx}{\sqrt{\left(b - \int_0^x e^{-2ns} dx\right)}}.$$

Je change actuellement de variable indépendante et pour cela je fais:

$$\int_0^x e^{-2ns} dx = u.$$

Les limites de l'intégrale deviennent $u = 0$, $u = b$: de plus on a:

$$e^{-ns}\frac{ds}{dx}dx = e^{ns}\frac{ds}{dx}du.$$

Il vient donc:

$$T = \frac{1}{\sqrt{(2g)}}\int_0^b \frac{e^{ns}\frac{ds}{dx}du}{\sqrt{(b-u)}}.$$

J'observe que la quantité $e^{ns}\frac{ds}{dx}$ est implicitement une fonction de u: en la remplaçant par $\psi(u)$, j'obtiens:

$$T = \frac{1}{\sqrt{(2g)}}\int_0^b \frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{(b-u)}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(2g)}}.\int_0^1 \frac{\psi(b\theta)\,d\theta}{\sqrt{(1-\theta)}}.$$

Cette valeur, en vertu de la formule (E.), se transforme dans la suivante:

$$T = \frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}{\sqrt{(2g)}\sqrt{b}}\int^{\frac{1}{2}} b\sqrt{b}\,\psi(b)\,d\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}},$$

de laquelle on déduit:

$$\psi(b) = \frac{T}{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}.\frac{\sqrt{(2g)}}{b\sqrt{b}}.\frac{d^{\frac{1}{2}}\sqrt{b}}{d\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

ou, plus simplement:

$$\psi(b) = \frac{T\sqrt{(2g)}}{\pi\sqrt{b}}.$$

Comme cette dernière égalité subsiste quel que soit b, on peut y changer

b en u, et on a:

$$\psi(u) \quad \text{ou} \quad e^{ns}\frac{ds}{dx} = \frac{T\sqrt{(2g)}}{\pi\sqrt{u}}.$$

L'arc s étant en outre lié à u par la relation:

$$u = \int_0^x e^{-2ns}\,dx,$$

on trouve, en la combinant avec la précédente pour éliminer u:

$$\int_0^x e^{-2ns}\,dx = \frac{2gT^2}{\pi^2}\,e^{-2ns}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2$$

équation d'où l'on tirera la valeur de x en s. Pour y parvenir, différencions en les deux membres et posons en même temps $\frac{dx}{ds} = p$. Il nous viendra

$$1 = \frac{4gT^2}{\pi^2}\left(\frac{dp}{ds} - np\right)$$

équation linéaire dont je déduis

$$p \quad \text{ou} \quad \frac{\partial x}{\partial s} = Ce^{ns} - \frac{\pi^2}{4ngT^2}.$$

Si l'on exige, comme cela est naturel, que pour $x = 0$, on ait $\frac{\partial x}{\partial s} = 0$, la constante arbitraire C doit être prise $= \frac{\pi^2}{4ngT^2}$ et l'on en conclut

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\pi^2}{4ngT^2}\,(e^{ns} - 1).$$

Intégrant de nouveau et observant que les deux variables x et s doivent s'évanouir ensemble, on a donc finalement

$$x = \frac{\pi^2}{4n^2gT^2}\,(e^{ns} - ns - 1)$$

pour l'équation de la courbe tautochrone; et on peut vérifier qu'en y posant $n = 0$, cette équation se réduit à $x = \frac{\pi^2 s^2}{8gT^2}$ et redonne la cycloïde.

10. Pour le cas particulier où $n = 0$, cette analyse s'accorde avec celle que nous avons développée dans le journal de l'Ecole polytechnique. Mais là nous avions moins pour but de résoudre le problême des tautochrones dans le vide que de chercher à généraliser ce problême, en assujettissant le temps T non plus à rester indépendant de h, mais au contraire à varier proportionellement à une fonction donnée $f(h)$. Cette extension élégante d'une question si connue dérive de nos formules avec une extrême facilité; mais nous devons dire qu'*Abel* en a eu la première idée, et qu'il y a été conduit par des considérations ingénieuses, quoique un peu indirectes. Voyez le journal de Mr. *Crelle*, tome 1er, page 154.

Considéré analytiquement, le problème dont nous parlons pourrait être énoncé de la manière suivante:

Déterminer la fonction $\varphi(x)$ de telle sorte que l'on ait $\varphi(x)=0$ et

$$\beta. \quad \int_0^x \frac{\varphi'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{(x-\theta)}} = f(x)$$

$f(x)$ étant une quantité connue, et $\varphi'(\theta)$ désignant la dérivée $\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}$. Il est clair que l'on suppose implicitement $f(0)=0$.

Abel a trouvé que la valeur de $\varphi(x)$ cherchée est fournie par cette formule très simple

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{f(\theta)\,d\theta}{\sqrt{(x-\theta)}}.$$

Pour obtenir cette valeur par notre méthode, observons d'abord que de la formule (F) on déduit aisément:

$$\int_0^x \frac{\varphi'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{(x-\theta)}} = \frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}\int^{\frac{1}{2}} \varphi'(x)\,x\sqrt{x}\,d\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}};$$

moyennant quoi, l'équation $(\beta.)$ devient:

$$\frac{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}\int^{\frac{1}{2}} \varphi'(x)\,x\sqrt{x}\,d\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = f(x)$$

et donne

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}.\,x\sqrt{x}}\cdot\frac{d^{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}f(x))}{d\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

c'est-à-dire

$$\varphi'(x) = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}.\,x\sqrt{x}}\int^{\frac{1}{2}} x^2\,\frac{d(\sqrt{x}f(x))}{dx}\,d\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais, en vertu de la formule $(E.)$, on a:

$$\int^{\frac{1}{2}} x^2\,\frac{d(\sqrt{x}f(x))}{dx}\,d\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{-1}\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{d(\sqrt{(\alpha x)}f(\alpha x))}{\alpha\,dx}\cdot\frac{\sqrt{\alpha}\,d\alpha}{\sqrt{1-\alpha}}.$$

Donc on a aussi:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{d(\sqrt{(\alpha x)}f(\alpha x))}{\alpha\,dx}\cdot\frac{\sqrt{\alpha}\,d\alpha}{\sqrt{(1-\alpha)}}.$$

Integrant donc, et déterminant la constante de telle sorte que x et $\varphi(x)$ s'évanouissent ensemble, puis posant $\alpha x \equiv \theta$, on obtient définitivement:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{f(\theta)\,d\theta}{\sqrt{(x-\theta)}};$$

ce qui est le résultat découvert par *Abel*. Cet illustre Géomètre a présenté sa solution sous une forme un peu plus générale qu'il nous aurait été également aisé de déduire de nos formules; c'est uniquement pour abréger que nous avons considéré le cas le plus simple.

V.

11. Les recherches précédentes appartiennent à la partie élémentaire du calcul des dérivées à indices quelconques, puisqu'en désignant par y la quantité dont on démandait la valeur et par $f(x)$ une fonction donnée de x, on est toujours tombé, après quelques transformations, sur une équations à deux termes de la forme

$$\int^{\mu} y\, dx^{\mu} = f(x),$$

d'où l'on a conclu par la définition même des différentielles:

$$y = \frac{d^{\mu} f(x)}{dx^{\mu}}.$$

Mais la question deviendra très vaste et très épineuse si la nature des problêmes qu'on veut résoudre mène à de véritables équations différentielles à indices fractionaires, dans lesquelles les variables ne se séparent pas immédiatement. C'est ce qui arrivera, par exemple, si vous cherchez à déterminer la fonction inconnue $\varphi(x)$ en l'assujétissant à la condition:

$$\int_0^{\infty} \varphi(x+\alpha)\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} + \varphi(x) = f(x).$$

En effet, puisque l'on a:

$$\int_0^{\infty} \varphi(x+\alpha)\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{-1}\sqrt{\pi}\int^{\frac{1}{2}} \varphi(x)\, dx^{\frac{1}{2}},$$

cette équation de condition deviendra:

$$\sqrt{-1}\sqrt{\pi}\int^{\frac{1}{2}} \varphi(x)\, dx^{\frac{1}{2}} + \varphi(x) = f(x).$$

Pour intégrer cette équation, vous prendrez l'intégrale à indice $\frac{1}{2}$ des deux membres, et vous obtiendrez:

$$\sqrt{-1}\sqrt{\pi}\int \varphi(x)\, dx + \int^{\frac{1}{2}} \varphi(x)\, dx^{\frac{1}{2}} = \int^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx^{\frac{1}{2}}.$$

Eliminant donc $\int^{\frac{1}{2}} \varphi(x)\, dx^{\frac{1}{2}}$ entre ces deux équations, vous trouverez:

$$\pi\int \varphi(x)\, dx + \varphi(x) = f(x) - \sqrt{-1}\sqrt{\pi}\int^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx^{\frac{1}{2}}$$

égalité qui, par les méthodes du calcul ordinaire, vous servira à déterminer $\varphi(x)$. Le moyen d'intégration que je viens d'appliquer à un exemple est assez général: il comprend en effet toutes les équations linéaires à dérivées fractionnaires, quelle que soit la fonction connue placée dans leur second membre, pourvu que les coëfficients des divers termes du premier membre puissent se réduire soit à des constantes, soit à des fonctions algébriques rationnelles et entières de la variable x.

12. Quelquefois on est conduit à des équations dans lesquelles les différenciations ne sont pas toutes relatives à la même variable indépendante. Telle est par exemple l'équation différentielle:

$$(\gamma.) \qquad \frac{d^{\frac{1}{2}} y}{d(\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}} + \frac{d^{\frac{1}{4}} y}{d x^{\frac{1}{4}}} = F(x).$$

Ici vous rencontrer évidemment un degré de difficulté de plus; car il faut, avant de songer à intégrer l'équation $(\gamma.)$, trouver le moyen d'exprimer la différentielle $\frac{\partial^{\frac{1}{2}} y}{\partial(\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}$, sous forme finie, à l'aide d'autres différentielles prises par rapport à la variable indépendante x; ce qui n'est encore qu'un cas singulier de ce qu'on peut nommer le problême général *du changement de la variable indépendante.* Je vais indiquer en peu de mots comment j'opère ici le changement demandé, et comment j'en déduis l'intégrale de l'équation $(\gamma.)$.

Une des formules que trouve d'abord pour exprimer $\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{d(\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}$ en dérivées relatives à la variable x, est la suivante:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{d(\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2} \int^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}} \frac{d^{\frac{1}{2}} y}{d x^{\frac{1}{2}}} d x^{\frac{1}{4}}.$$

Je ne m'arrêterai pas à démontrer cette formule, laissant au lecteur le soin d'en constater l'exactitude, ce qui peut se faire de plusieurs manières. Maintenant si je porte dans l'équation $(\gamma.)$ la valeur de $\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{d(\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}$, je trouve;

$$\sqrt{2} \int^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}} \frac{d^{\frac{1}{2}} y}{d x^{\frac{1}{2}}} d x^{\frac{1}{4}} + \frac{d^{\frac{1}{4}} y}{d x^{\frac{1}{4}}} = F(x).$$

Différenciant donc par rapport à l'indice $\frac{1}{4}$, puis tirant la valeur de $\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{d x^{\frac{1}{2}}}$, j'obtiens:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{d x^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{d^{\frac{1}{4}} F(x)}{d x^{\frac{1}{4}}}}{1 + \sqrt{2}.\, x^{\frac{1}{4}}},$$

d'où je conclus:

$$y = \int^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{d^{\frac{1}{4}} F(x)}{d x^{\frac{1}{4}}} d x^{\frac{1}{2}}}{1 + \sqrt{2}.\, x^{\frac{1}{4}}}.$$

Telle est la valeur de y qui satisfait à l'équation $(\gamma.)$.

13. Si quelque lecteur voulait s'exercer sur des questions conduisant à des équations différentielles à indices fractionnaires, je proposerais de déterminer la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'une des égalités suivantes:

$$\int_0^\infty \varphi(\sqrt{(x^2 + \alpha^2)})\, d\alpha + \int_0^\infty \varphi(x + \alpha) \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = F(x)$$

$$x\int_0^\infty \varphi(\sqrt{(x^2+\alpha^2)})\,d\alpha + \int_0^\infty \varphi(x+\alpha)\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = F(x)$$

$$\int_0^\infty \varphi(x+\alpha)\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt[4]{x}.\varphi(x) = F(x)$$

lesquelles égalités se résolvent toutes trois immédiatement par les méthodes dont je viens de donner une idée, et conduisent à une valeur de $\varphi(x)$ exprimée sous forme finie, en intégrales définies. Il sera bon de comparer aussi la marche tracée par notre analyse avec celle dont on pourrait faire usage, en se bornant à l'analyse ordinaire.

Je regrette de ne pouvoir m'étendre davantage sur ce sujet; mais n'ayant pas, pour le moment, le loisir nécessaire, j'ai du réduire ce petit mémoire à n'être qu'une espèce de commentaire de ceux que j'ai publiés dans le Journal de l'Ecole polytechnique. Peut-être cela suffira-t-il pour engager quelques géomètres à marcher dans le même voie. Je terminerai cet article en rappelant que si le calcul des dérivées fractionnaires s'applique d'une manière commode à la solution de divers problêmes, il le doit à sa définition fondée sur le développement exponentiel des fonctions. La considération de ce développement nous parait d'autant mieux puisée dans la nature des choses, qu'elle seule fournit l'explication complète de ce qu'on a nommé l'analogie des puissances et des différences. Au reste comme une fonction donnée $f(x)$ peut être réduite de plusieurs manières en série de la forme $\Sigma A_m e^{mx}$, on doit avoir soin, pour ne pas se contredire, d'employer toujours le même développement dans le cours du même calcul. A bien parler, dans cette analyse, on ne considère pas proprement la fonction $f(x)$, mais plutôt un certain développement exponentiel qui lui est équivalent ou qu'on lui substitue avec avantage; et c'est à ce développement qu'on applique les raisonnements et les calculs. En thèse générale il est naturel de choisir la série $\Sigma A_m e^{mx}$ de telle sorte qu'elle représente identiquement la valeur de $f(x)$ (sauf la condition de convergence). Il faut entendre dans ce sens là les réflexions contenues dans le 21ème cahier du journal de l'Ecole polytechnique page 5 et page 77. Mais, dans quelques circonstances, on peut employer aussi les développements analogues à ceux de *Fourier*: seulement on doit opérer alors avec précaution, afin d'éviter certaines difficultés que nous avons signalées à la page 124 de l'ouvrage cité, et sur lesquelles nous aurons sans doute lieu de revenir un jour.

Paris, le 18. Juin 1833.

22.

Démonstration de quelques théorèmes sur les nombres.

(Par Mr. *Stern* doct. en phil. à Goettingue.)

Dans un mémoire sur la théorie des nombres, inséré dans le T. 9. cah. 1. de ce journal, Mr. *Libri* a donné les deux congruences suivantes qu'il regarde comme renfermant un théorème exclusif et assez curieux sur les nombres premiers de la forme $6p+1$, savoir:

$$19.\quad 6p - \frac{6p.6p-1.6p-2}{1.2.3}3 + \frac{6p.6p-1.6p-2.6p-3.6-4}{1.2.3.4.5}3^2 - \dots$$
$$\dots \equiv 0 \pmod{6p+1},$$

$$20.\quad 6p-1 - \frac{6p-1.6p-2.6p-3}{1.2.3}3 + \frac{6p-1.6p-2.6p-3.6p-4.6p-5}{1.2.3.4.5}3^2 - \dots$$
$$\dots + 2^{6p-2} \equiv 0\,^{*)} \pmod{6p+1}.$$

On peut démontrer ces théorèmes sans avoir recours à la théorie des nombres et montrer en même temps qu'ils sont contenus dans deux autres propositions plus générales et purement algébriques.

En effet, les deux racines imaginaires de l'équation

$$x^3 - 1 = 0$$

étant

$$= \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \text{ et } = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

on a

$$a.\quad \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{3m} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3m}.(1-\sqrt{-3})^{3m}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{3m}\left[1 - 3m\sqrt{-3} - \frac{3m.3m-1}{1.2}3 + \frac{3m.3m-1.3m-2}{1.2.3}3\sqrt{-3}\dots\right] = 1,$$

$$b.\quad \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{3m} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3m}(1+\sqrt{-3})^{3m}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{3m}\left[1 + 3m\sqrt{-3} - \frac{3m.3m-1}{1.2}3 - \frac{3m.3m-1.3m-2}{1.2.3}3\sqrt{-3}\dots\right] = 1,$$

en désignant par m un nombre entier quelconque.

En ajoutant les deux équations ($a.$) et ($b.$) on trouve

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{3m}\left[2 - 2.\frac{3m.3m-1}{1.2}3 + 2.\frac{3m.3m-1.3m-2}{1.2.3}3^2\dots\right] = 2,$$

---

*) Dans le mémoire cité on trouve -2^{6p-2}, mais c'est une erreur typographique.

ou bien

$$c.\quad 1-\frac{3m.3m-1}{1.2}3+\frac{3m.3m-1.3m-2.3m-3}{1.2.3.4}3^2\ldots\ldots = 2^{3m}.(-1)^{3m}.$$

En soustrayant l'équation ($b.$) de l'équation ($a.$) on obtiendra, après les réductions convenables, l'équation

$$d.\quad 3m-\frac{3m.3m-1.3m-2}{1.2.3}3+\ldots\ldots = 0.$$

On a aussi

$$e.\quad \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{3m-1}=\frac{-2}{1-\sqrt{-3}}=$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{3m-1}\left[1-(3m-1)\sqrt{-3}-\frac{3m-1.3m-2}{1.2}3+\frac{3m-1.3m-2.3m-3}{1.2.3}3\sqrt{-3}\ldots\right],$$

$$f.\quad \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{3m-1}=\frac{-2}{1+\sqrt{-3}}=$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{3m-1}\left[1+(3m-1)\sqrt{-3}-\frac{3m-1.3m-2}{1.2}3-\frac{3m-1.3m-2.3m-3}{1.2.3}3\sqrt{-3}\ldots\right].$$

En ajoutant les équations ($e.$) et ($f.$) on trouve

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{3m-1}.2\left[1-\frac{3m-1.3m-2}{1.2}3\ldots\right]=-1,$$

ou bien

$$g.\quad 1-\frac{3m-1.3m-2}{1.2}3\ldots = (-1)^{3m}.2^{3m-2}.$$

En soustrayant l'équation ($e.$) de l'équation ($f.$), on trouve

$$h.\quad 3m-1-\frac{3m-1.3m-2.3m-3}{1.2.3}3\ldots = (-1)^{3m-1}.2^{3m-2}.$$

En substituant dans les équations ($d.$) et ($h.$), $2p$ au lieu de m, on aura

$$i.\quad 6p-\frac{6p.6p-1.6p-2}{1.2.3}3+\ldots = 0,$$

$$k.\quad 6p-1-\frac{6p-1.6p-2.6p-3}{1.2.3}3\ldots+2^{6p-2}=0$$

et l'on voit que ces équations contiennent les deux congruences citées comme des cas spéciaux.

Mr. *Libri* a déduit de la congruence (19.) le théorème connu que la congruence $x^2-3\equiv 0$ (mod. p) est toujours résoluble lorsque p est un nombre premier de la forme $12n+1$. En ayant égard à la forme des racines de l'équation

$$x^3-1=0,$$

on peut en déduire tous les cas dans lesquels les congruences

$$x-3\equiv 0 \text{ (mod. } p),\quad x+3\equiv 0 \text{ (mod. } p)$$

sont résolubles, p désignant un nombre premier.

En effet parceque les racines de l'équation $x^4 - 1 = 0$ sont

$$= +1, \quad = -1, \quad = +\sqrt{-1}, \quad = -\sqrt{-1}$$

il faut que les racines de la congruence

$$x^4 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

soient $= +1$, $= -1$, $= +\sqrt{(mp-1)}$, $= -\sqrt{(mp-1)}$.

Maintenant on sait que la congruence $x^4 - 1 \equiv 0$ a quatre racines réelles ou seulement deux, selon que le nombre p est de la forme $4n+1$ ou de la forme $4n+3$. Ainsi il faut que dans le premier cas on ait

$$\sqrt{(mp-1)} = z$$

z désignant un nombre entier, ou

$$z^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Dans le second cas on ne peut jamais trouver un tel nombre. De là il suit *que le nombre -1 est un résidu ou un non-résidu quadratique du nombre premier p selon que ce nombre est de la forme $4n+1$* ou de la forme $4n+3$.

Parceque l'équation $x^3 - 1 = 0$ a les trois racines

$$1, \quad \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

il faut que la congruence

$$x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ait les trois racines

$$-1, \quad \frac{-1+\sqrt{(mp-3)}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{(mp-3)}}{2}.$$

Mais cette congruence a trois racines réelles ou elle en a seulement une, selon que le nombre premier p est de la forme $3n+1$ ou de la forme $3n+2$. Ainsi dans le premier cas il faut qu'on ait

$$\sqrt{(mp-3)} = z$$

z désignant un nombre entier, ou bien

$$z^2 \equiv -3 \pmod{p}.$$

Dans le second cas on ne peut jamais trouver un tel nombre, c'est-à-dire: *le nombre -3 est un résidu ou un non-résidu quadratique du nombre premier p selon que ce nombre est de la forme $3n+1$ ou de la forme $3n+2$.*

Maintenant on n'a qu'à combiner ce théorème avec le théorème précédent pour trouver toutes les propriétés des congruen

$$x^2 - 3 \equiv 0 \pmod{p}, \qquad x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Si le nombre p est de la forme $3n+1$ et que l'on désigne par f une

racine de l'équation

$$x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

on a

$$f \equiv \frac{-1 \pm \sqrt{(mp-3)}}{2},$$

ou

$$(2f+1)^2 \equiv -3 \pmod{p}$$

c'est-à-dire, que si l'on connait déjà le nombre f, on peut en déduire le nombre x qui satisfait à la congruence

$$x^2 \equiv -3 \pmod{p}$$

qu'on a déjà trouvé par d'autres voies (Voy. ce journ. T. 8. cah. 2, et T. 9. cah. I.).

Goettingue le 12. Decembre 1833.

23.

Bemerkungen zu dem Aufsatze überschrieben „Beweis der Gleichung $0^0 = 1$ nach J. F. Pfaff," im zweiten Hefte dieses Bandes, S. 134.

I.

(Von einem Ungenannten.)

Die Wichtigkeit der Gleichung $0^0 = 1$, in so fern man ihre erste Seite als den Grenzwerth des Ausdrucks x^x betrachtet, scheint durch den mitgetheilten Beweis von Pfaff und durch andere nicht weniger einfache Betrachtungen *) unbestreitbar dargethan. Dafs aber auch der allgemeinere Ausdruck $f(x)^{F(x)}$, sobald $f(x)$ in $F(x)$ Functionen von x bezeichnen, die mit dieser Veränderlichen verschwinden, für abnehmende Werthe von x sich ebenfalls immer der Einheit nähere, kann nach unserer Ansicht nicht behauptet werden; und wenn die von Hrn. Möbius an den Pfaff'schen Beweis geknüpften Bemerkungen diese Verallgemeinerung zu ergeben scheinen, so liegt dies nur in der Annahme, dafs jede mit x verschwindende Function $f(x)$ in die Form $x^a \varphi(x)$ gebracht werden könne, wo a eine positive Constante bezeichnet und $\varphi(x)$ für $x = 0$ einen bestimmten, von 0 und ∞ verschiedenen Werth annimmt.

Die Unzulässigkeit dieser Voraussetzung, welche, um es beiläufig zu bemerken, nicht selten gemacht wird, zeigt sich aber z. B. bei dem ganz einfachen Ausdruck $\frac{1}{\log(x)}$. Könnte derselbe die obige Form annehmen, so würde daraus die Gleichung

$$\frac{1}{\varphi(x)} = x^a \log(x) = \log\left(x^{x^a}\right)$$

folgen, deren erste Seite für $x = 0$ den von Null verschiedenen Werth $\frac{1}{\varphi(0)}$ annimmt, während die zweite Seite verschwindet, indem nämlich x^{x^a}, auf welchen Ausdruck der Beweis des Herrn Möbius anwendbar ist, sich für abnehmende Werthe von x der Grenze nähert.

*) *Traité élémentaire de calcul diff. et int. par* Lacroix, 4me *édit. page* 136 *etc.*

Nach der eben gemachten Bemerkung wird es nicht befremden, wenn man auf Exponentialgröfsen stöfst, die nicht den Grenzwerth 1 annehmen, während Exponent und Basis gleichzeitig verschwinden, wie es z. B. bei den folgenden der Fall ist,

$$x^{\frac{a+x}{\log x}}, \quad x^{\frac{a}{\log x + \log\left(\log\frac{1}{x}\right)}}$$

die sich beide für $x = 0$ auf e^a reduciren.

Im April 1834.

II.

(Von dem Verfasser des Aufsatzes No. 25. Bd. 11. d. Journ.)

Die Zweifel gegen die gewöhnliche Annahme, dafs $0^0 = 1$ sei, welche in einem, früher in diesem Journale abgedruckten Aufsatze erhoben worden sind, hat Herr Prof. Moebius im zwölften Bande S. 134 ff. durch einen dem berühmten Pfaff angehörenden Beweis zu beseitigen gesucht. Es scheint also wenigstens, dafs auch dieser scharfsinnige Mathematiker die früher üblichen Beweise für unzulänglich hält. Es ist aber auch wirklich in jenem Aufsatze nicht geläugnet worden, dafs der Ausdruck x^x in die Einheit übergeht, wenn $x = 0$ gesetzt wird. Dagegen kann man wohl nicht zugeben, dafs die Gleichung $0^0 = 1$ nichts Anderes sagen will, als dafs der Werth von x^x bei fortwährender Abnahme von x sich der Einheit über jede angebbare Gränze nähere. Vielmehr müfste, wie in jenem Aufsatze verlangt wurde, bewiesen werden, dafs allgemein der Ausdruck $[F(x)]^{f(y)}$, wenn $F(x)$ und $f(y)$ Null werden, oder, wie Herr Prof. Moebius will, $[F(x)]^{f(x)}$, wenn $F(x)$ und $f(x)$ Null werden, der Einheit gleich sei, da 0^0, im Allgemeinen betrachtet, nicht nothwendig aus x^x entsteht, so wenig wie $\frac{0}{0}$ immer aus $\frac{x}{x}$ entspringt. Nach der Ansicht des Herrn Moebius ist dies freilich nicht nothwendig, da der Ausdruck 0^0, wenn er auch aus $[F(x)]^{f(x)}$ entspringt sich unmittelbar auf einen anderen zurückführen läfst, der aus x^x entsteht. Da es indessen, wie ich glaube, leicht ist, das Gegentheil dieser Behauptung durch ein einfaches Beispiel zu erweisen, so halte ich es nicht für nöthig, den Beweis, den Herr Prof. Moebius gegeben hat, genauer zu erörtern, und will nur bemerken, dafs er auf einem Principe beruht, dessen Zulässigkeit erst vor einiger Zeit von einem bedeutenden Mathematiker ge-

läugnet worden ist, ich meine das Princip, nach welchem, wenn X eine Function von x ist, und mit x verschwindet, alsdann $X = Px^m$ gesetzt werden kann, welches Hamilton in den *Transact of the Roy. Irish. Society* (T. 4. 1830.) widerlegt hat. Das erwähnte Beispiel ist folgendes. Es sei $X = e^{-\frac{1}{x}}$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, $Y = x$: so wird sowohl X als Y für den Werth $x = 0$ auf Null reducirt; es müfste also in diesem Falle $\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)^x$ der Einheit gleich sein. Gleichwohl wird aber Niemand leugnen, dafs für jeden endlichen Werth von x dieser Ausdruck $= \frac{1}{e}$ ist. Hier hätten wir also ein Beispiel, wo 0^0 nicht $= 1$ ist.

Ferner ist der Ausdruck $\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)^{2x} = \frac{1}{e^2}$; und so liefse sich durch noch andere Beispiele zeigen, dafs der Ausdruck 0^0 allerdings sehr verschiedene Werthe haben kann. Vielleicht theilt uns Herr Prof. Moebius seine Ansicht über die eben gemachten Bemerkungen in diesem Journale mit.

Im Mai 1834.

24.
Unterschiede der einfachen Functionen.

(Von dem Herrn Prof. Oettinger zu Heidelberg.)

(Fortsetzung von No. 6. und 14. Band II.)

§. 22.

Die zweite Idee, die zu weitern Untersuchungen führt, besteht darin, dafs man eine Function um eine Zunahme wachsen läfst und dann von der so veränderten Function die ursprüngliche Function abzieht. Die Ausführung dieses Geschäftes erzeugt den Unterschied der genannten Function, und hierauf beruht bekanntlich die Differenzen und Differenzial-Rechnung. Zu welchen interessanten Folgerungen diese Idee führt, zeigen die Resultate, die wir dieser Rechnung verdanken, und die in den Werken von Euler, Lacroix und Andern aufgezeichnet sind.

Einzelne Theile dieser Rechnung finden wir selbst in unserm Differenzen-Calcul (Mainz, in der Simon-Müllerschen Buchhandlung) behandelt, und wir verweisen den Leser auf dieses Buch. Da aber im Folgenden die Resultate dieser Rechnung häufig nöthig werden, und der Zusammenhang die Grundzüge dieses Calculs verlangt, so stellen wir sie im Folgenden zusammen, um so mehr, da die Bedürfnisse der spätern Untersuchungen manche neue Darstellungen erheischen. Zugleich verweisen wir auf unsere „Forschungen in dem Gebiete der Analysis (Heidelberg, bei A. Oswald)."

§. 23.

Legt man die in §. 1. angegebene Functionenreihe

$$\ldots.\ X_{-3},\ X_{-2},\ X_{-1},\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots.$$

zu Grunde, zieht das vorhergehende Glied von dem nachfolgenden ab, und deutet dieses Geschäft durch das Zeichen Δ an, so hat man folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lll}
\Delta X_0 = X_1 - X_0 & \text{und} & \Delta X_{-1} = X_0 - X_{-1}, \\
\Delta X_1 = X_2 - X_1 & - & \Delta X_{-2} = X_{-1} - X_{-2}, \\
\Delta X_2 = X_3 - X_2 & - & \Delta X_{-3} = X_{-1} - X_{-3}, \\
\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\
\Delta X_n = X_{n+1} - X_n & - & \Delta X_n = X_{-n-1} - X_{-n},
\end{array}$$

welche die Unterschiede der Functionen bezeichnen.

Betrachtet man die erhaltenen Unterschiede als Glieder einer Reihe und nennt die hiedurch entstandene Reihe die erste Unterschieds-Reihe, so kann man von ihr, durch wiederholte Anwendung des genannten Geschäfts auf die zweite Unterschieds-Reihe, von dieser auf die dritte, von der dritten auf die vierte u. s. w. übergehen, wie dies auf eine ähnliche Weise in §. 2. mit den Aufstufungs-Reihen geschehen ist. Durch diese Bemerkung werden wir auf folgende Zusammenstellung der Unterschieds-Reihen geführt:

$$117.\quad \begin{cases} \quad X_{-2}, \quad X_{-1}, \quad X_0, \quad X_1, \quad X_2, \quad X_3, \;\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \; \Delta X_{-2}, \; \Delta X_{-1}, \; \Delta X_0, \; \Delta X_1, \; \Delta X_2, \; \Delta X_3, \;\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \; \Delta^2 X_{-2}, \; \Delta^2 X_{-1}, \; \Delta^2 X_0, \; \Delta X_1, \; \Delta^2 X_2, \; \Delta^2 X_3, \;\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \; \Delta^3 X_{-2}, \; \Delta^3 X_{-1}, \; \Delta^3 X_0, \; \Delta^3 X_1, \; \Delta^3 X_2, \; \Delta^3 X_3, \;\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Auf gleiche Weise werden wir durch das Herabsteigen von den spätern Unterschieds-Reihen auf die vorhergehenden, auf Reihen geführt, die vor der Grundreihe liegen und die sich im Einklange mit dem eben gegebenen Schema durch folgendes darstellen lassen:

$$118.\quad \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \; \Delta^{-3} X_{-2}, \; \Delta^{-3} X_{-1}, \; \Delta^{-3} X_0, \; \Delta^{-3} X_1, \; \Delta^{-3} X_2, \;\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \; \Delta^{-2} X_{-2}, \; \Delta^{-2} X_{-1}, \; \Delta^{-2} X_0, \; \Delta^{-2} X_1, \; \Delta^{-2} X_2, \;\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \; \Delta^{-1} X_{-2}, \; \Delta^{-1} X_{-1}, \; \Delta^{-1} X_0, \; \Delta^{-1} X_1, \; \Delta^{-1} X_2, \;\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \quad X_{-2}, \quad X_{-1}, \quad X_0, \quad X_1, \quad X_2, \;\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Grundgleichungen, die sich auf diesen Darstellungen entnehmen, sind

$$119.\quad \begin{cases} \Delta^m X_{\pm n} = \Delta^{m-1} X_{\pm n+1} - \Delta^{m-1} X_{\pm n}, \\ \Delta^{-m} X_{\pm n} = \Delta^{-m-1} X_{\pm n+1} - \Delta^{-m-1} X_{\pm n}. \end{cases}$$

§. 24.

Die im vorigen §. angegebenen Gleichungen führen zur Ableitung der höhern Unterschiede einfacher Functionen. Um von dem ersten Unterschiede einer Function auf den zweiten überzugehen, nimmt man den Unterschied vom ersten Unterschiede, oder man vervielfacht die Gleichung des ersten Unterschiedes mit Δ. Dadurch wird

$$\Delta(\Delta X_0) = \Delta^2 X_0 = \Delta X_1 - \Delta X_0.$$

Führt man ΔX_1 und ΔX_0 auf die Glieder der Grundreihe zurück, so wird

$$\begin{aligned} \Delta^2 X_0 &= X_2 - X_1 \\ &\quad\; - X_1 + X_0 \\ &= X_2 - 2X_1 + X_0. \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise geht man von dem zweiten Unterschiede zum dritten über; es wird

$$\Delta(\Delta^2 X_0) = \Delta^3 X_0 = \Delta X_2 - 2\Delta X_1 + \Delta X_0,$$

und hieraus, wenn man ΔX_2, ΔX_1, ΔX_0 auf Glieder der Grundreihe zurückführt:

$$\begin{aligned}\Delta^3 X &= X_3 - X_2 \\ &\quad -2X_2 + 2X_1 \\ &\quad\quad + X_1 - X_0 \\ &= X_3 - 3X_2 + 3X_1 - X_0;\end{aligned}$$

der vierte Unterschied erzeugt folgende Darstellung:

$$\Delta^4 X_0 = X_4 - 4X_3 + 6X_2 - 4X_1 + X_0.$$

Auch hier erkennt man leicht, wie §. 3., daſs die Vorzahlen der Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens mit denen des Binomiums übereinstimmen. Hieraus ergiebt sich folgende allgemeine Darstellung:

$$120.\quad \Delta^m X = X_m - \frac{m}{1} X_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} X_{m-2} - \ldots (-1)^m X_0.$$

Bedient man sich in dieser Gleichung auch des Zeichens Θ, um die Stellenzahlen von X zu bezeichnen, so hat man, im Einklange mit den Darstellungen (11.) und (12.) §. 3., folgende abgekürzte Gleichung:

$$121.\quad \Delta^m X = (\Theta - 1)^m X_0.$$

§. 25.

Obgleich die Gleichung (121.) auch für ein negatives m gilt, so soll dennoch für die Darstellung von $\Delta^{-m} X_0$, was wir mit dem negativen Unterschiede einer Function bezeichnen wollen, folgende Entwicklung gegeben werden, insbesondere auch deswegen, weil wir durch diese auf eine Darstellung durch eine endliche und unendliche Glieder-Anzahl geführt werden. Die Gleichung, die zur Ableitung dient, ergiebt sich aus (119.), wenn in der zweiten Darstellung $m = 0$ und $n = 1$ gesetzt wird. Es entsteht durch Umstellung

$$122.\quad \Delta^{-1} X_0 = X_{-1} + \Delta^{-1} X_{-1}.$$

Nach Analogie dieser Gleichung erhält man durch Erniedrigung der Stellenzahlen folgende Zusammenstellung

$$\begin{aligned}\Delta^{-1} X_{-1} &= X_{-2} + \Delta^{-1} X_{-2}, \\ \Delta^{-1} X_{-2} &= X_{-3} + \Delta^{-1} X_{-3}, \\ \Delta^{-1} X_{-3} &= X_{-4} + \Delta^{-1} X_{-4}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^{-1} X_{-n} &= X_{-n-1} + \Delta^{-1} X_{-n-1}.\end{aligned}$$

Substituirt man in der Gleichung (122.) zuerst statt $\Delta^{-1} X_{-1}$ seinen Werth, dann in der hiedurch entstandenen Gleichung den Werth statt $\Delta^{-1} X_{-2}$ u. s. f., und führt mit dieser Substitution bis zum $(n+1)$ten Gliede der Grundreihe fort, so gewinnt man folgende Darstellung für den ersten negativen Unterschied aus $(n+1)$ Gliedern der Grundreihe

$$123. \quad \Delta^{-1} X_0 = X_{-1} + X_{-2} + X_{-3} + \ldots + X_{-n-1} + \Delta^{-1} X_{-n-1}.$$

Setzt man aber die Substitution bis ins Unendliche fort, so entsteht für die Darstellung des ersten negativen Unterschiedes aus einer unendlichen Glieder-Anzahl der Grundreihe:

$$124. \quad \Delta^{-1} X_{-1} + X_{-2} + X_{-3} + X_{-4} + \ldots$$

Um den zweiten negativen Unterschied einer Function aus $(n+1)$ Gliedern der Grundreihe zu gewinnen, vervielfachen wir die Darstellung (123.) mit Δ^{-1}. Dadurch entsteht

$$\Delta^{-1}(\Delta^{-1} X_0) = \Delta_{-2} X_0 = \Delta^{-1} X_{-1} + \Delta^{-1} X_{-2} + \ldots + \Delta^{-1} X_{-n-1} + \Delta^{-2} X_{-n-1}.$$

Hierin sind die Ausdrücke auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens $\Delta^{-1} X_{-1}$, $\Delta^{-1} X_{-2}$, ... nach Vorschrift der Gleichung (123.) so zu behandeln, dafs die Zahl der Glieder $n+1$ sei. Dadurch wird die Stellenzahl der beiden letzten Glieder auf $-n-2$ herunter geführt, und wir erhalten folgende Entwicklungen:

$$\Delta^{-1} X_{-1} = X_{-2} + X_{-3} + X_{-4} + \ldots + X_{-n-2} + \Delta^{-1} X_{-n-2},$$
$$\Delta^{-1} X_{-2} = X_{-3} + X_{-4} + \ldots\ldots\ldots + X_{-n-2} + \Delta^{-1} X_{-n-2},$$

u. s. w.,

die zu folgender Darstellung sich vereinigen

$$\begin{aligned}
\Delta^{-2} X_0 = X_{-2} + X_{-3} + X_{-4} + X_{-5} + \ldots + X_{-n-2} + \Delta^{-1} X_{-n-2} + \Delta^{-2} X_{-n-1} \\
+ X_{-3} + X_{-4} + X_{-5} + \ldots + X_{-n-2} + \Delta^{-1} X_{-n-2} \\
+ X_{-4} + X_{-5} + \ldots + X_{-n-2} + \Delta^{-1} X_{-n-2} \\
+ X_{-5} + \ldots + X_{-n-2} + \Delta^{-1} X_{-n-2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ X_{-n-2} + \Delta^{-1} X_{-n-2}.
\end{aligned}$$

Die hier gewonnene Darstellung läfst sich nach den Scheitelreihen kurz darstellen, ganz auf dieselbe Weise wie es schon §. 4. geschehen ist, und diese Darstellung unterscheidet sich von jener nur durch Zeichen und Bezeichnungen; daher ist

$$\Delta^{-2} X_0 = X_{-2} + 2X_{-3} + 3X_{-4} + 4X_{-5} \ldots + (n+1)X_{-n-2} + (n+1)\Delta^{-1} X_{-n-2} + \Delta^{-2} X_{-n-1}.$$

Heben wir die Beschränkung der Endlichkeit in dieser Darstellung auf, so ziehen wir hieraus unmittelbar eine Darstellung des zweiten negativen

Unterschiedes einer Function durch eine unendliche Glieder-Anzahl der Grundreihe

$$\Delta^{-2}X_0 = X_{-2} + 2X_{-3} + 3X_{-4} + 4X_{-5} + \dots.$$

Ein Vervielfachen des zweiten negativen Unterschieds mit dem ersten negativen Unterschiede, führt auf die Darstellung des dritten, und wir erhalten

$$\Delta^{-3}X_0 = \Delta^{-1}X_{-2} + 2\Delta^{-1}X_{-3} + 3\Delta^{-1}X_{-4} + \dots$$
$$\dots + (n+1)\Delta^{-1}X_{-n-2} + (n+1)\Delta^{-2}X_{-n-2} + \Delta^{-3}X_{-n-1}.$$

Die Entwickelung der Glieder $\Delta^{-1}X_{-2}$, $2\Delta^{-1}X_{-3}$, ... nach der Vorschrift von (123.) in Reihen, wobei auf die Übereinstimmung der Stellenzahlen Rücksicht zu nehmen ist, erzeugt

$$\begin{aligned}\Delta^{-3}X_0 = X_{-3} + X_{-4} + X_{-5} + \dots + X_{-n-3} + \Delta^{-1}X_{-n-3}\\ + 2.X_{-4} + 2.X_{-5} + \dots + 2.X_{-n-3} + 2.\Delta^{-1}X_{-n-3}\\ + 3.X_{-5} + \dots + 3.X_{-n-3} + 3.\Delta^{-1}X_{-n-3}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ + (n+1)X_{-n-3} + (n+1)\Delta^{-1}X_{-n-3}\\ + (n+1)\Delta^{-2}X_{-n-2} + \Delta^{-3}X_{-n-1}.\end{aligned}$$

Die Scheitelreihen lassen sich nach der Gleichung

$$1 + 2 + 3 + 3 + \dots + x + 1 = \frac{(x+1)(x+2)}{1.2}$$

in Ein Glied zusammenziehen; dies erzeugt folgende Darstellung:

$$\Delta^{-3}X_0 = \frac{1.2}{1.2}X_{-3} + \frac{2.3}{1.2}X_{-4} + \frac{3.4}{1.2}X_{-5} + \dots + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}X_{-n-3}$$
$$+ \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\Delta^{-1}X_{-n-3} + \frac{n+1}{1}\Delta^{-2}X_{-n-2} + \Delta^{-3}X_{-n-1}.$$

Die Darstellung des dritten negativen Unterschiedes durch eine unbeschränkte Glieder-Anzahl ist:

$$\Delta^{-3}X_0 = X_{-3} + \frac{2.3}{1.2}X_{-4} + \frac{3.4}{1.2}X_{-5} + \dots + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}X_{-n-3}.$$

Der bisher beobachtete Entwicklungsgang ist allgemein. Er führt zu folgender Darstellung

$$125.\quad \Delta^{-m}X_0 = X_{-m} + \frac{2.3\dots m}{1.2.(m-1)}X_{-m-1} + \dots + \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m-1)}{1.2\dots(m-1)}X_{-m-n}$$
$$+ \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m-1)}{1.2\dots(m-1)}\Delta^{-1}X_{-n-m} + \frac{(n+1)\dots(n+m-2)}{1.2\dots(m-2)}\Delta^{-2}X_{-n-m+1}\dots + \Delta^{-m}X_{-n-1},$$

oder in Zeichen:

$$126. \quad \Delta^{-m} X_0 = X_{-m} + \frac{2^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} X_{-m-1} + \frac{3^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} X_{-m-2} + \ldots + \frac{(n+1)^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} X_{-m-n}$$
$$+ \frac{(n+1)^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} \Delta^{-1} X_{-n-m} + \frac{(n+1)^{m-2|1}}{1^{m-1|1}} \Delta^{-2} X_{-n-m+1} + \ldots + \Delta^{-m} X_{-n-1}.$$

Die Darstellung des $m$ten negativen Unterschiedes einer Function durch eine unendliche Glieder-Anzahl giebt folgende Darstellung:

$$127. \quad \Delta^{-m} X_0 = X_{-m} + \frac{2^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} X_{-m-1} + \frac{3^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} X_{-m-2} + \ldots$$

Diese Darstellung stimmt vollkommen mit

$$128. \quad \Delta^{-m} X_0 = (\Theta - 1)^{-m} X_0$$

überein, wenn man berücksichtigt, daſs

$$m = \frac{2^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} = \frac{2.3 \ldots (m-1).m}{1.2 \ldots (m-1)} = \frac{m}{1},$$
$$\frac{m(m+1)}{1.2} = \frac{3^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} = \frac{3.4.5 \ldots (m-1).m(m+1)}{1.2 \ldots (m-1)} = \frac{m(m+1)}{1.2},$$

u. s. w. ist.

§. 26.

Der Gang der Entwickelung führt nun zur Darstellung des Gesetzes, wie ein Glied der Grundreihe aus denen der Unterschieds-Reihen abgeleitet wird. Die Gleichung $\Delta X_0 = X_1 - X_0$, ordnen wir auf folgende Art:

$$129. \quad X_1 = X_0 + \Delta X_0 = (1 + \Delta) X_0$$

und erhöhen hierin die Stellenzahlen der Gleichung, wodurch entsteht:

$$X_2 = (1 + \Delta) X_1.$$

Wird nun hierin statt X sein Werth nach (129.) gesetzt, so folgt

$$X_2 = (1 + \Delta)(1 + \Delta) X_0 = (1 + \Delta)^2 X_0.$$

Auch wird hierin die Stellenzahl erhöht, und dann nach (129.) verfahren; dies führt zu

$$X_3 = (1 + \Delta)^2 X_1 = (1 + \Delta)^2 (1 + \Delta) X_0 = (1 + \Delta)^3 X_0.$$

Eben so erhalten wir auf gleiche Weise

$$X_4 = (1 + \Delta)^3 X_1 = (1 + \Delta)^3 (1 + \Delta) X = (1 + \Delta)^4 X_0.$$

Der Entwicklungsgang bewegt sich in den angegebenen Grenzen und es erschlieſst sich hieraus das allgemeine Gesetz:

$$130. \quad X_m = (1 + \Delta)^m X_0 = X + \frac{m}{1} \Delta X_0 + \frac{m(m+1)}{1.2} \Delta^2 X_0 + \ldots + \Delta^m X_0.$$

Daſs auch diese Gleichung für ein negatives m gilt, flieſst aus der bisher aufgestellten Behauptung, wonach für alle Glieder, die rechts oder links vom Mittelgliede liegen, das nämliche Bildungsgesetz zu Grund liegt. Darnach ist:

$$131.\quad X_{-m} = (1+\Delta)^{-m} X_0 = X - \frac{m}{1}\Delta X_0 + \frac{m(m+1)}{1.2}\Delta^2 X_0 \ldots,$$

oder bei anderer Anordnung,

$$132.\quad X_{-m} = (\Delta+1)^{-m} = \Delta^{-m} X_0 - \frac{m}{1}\Delta^{-m-1} X_0 + \frac{m(m+1)}{1.2}\Delta^{-m-1} X_0 + \ldots.$$

Diese Gleichungen ergeben sich auch aus (130.), wenn $m = r-p$ gesetzt wird, nemlich:

$$X_{r-p} = (1+\Delta)^{r-p} X_0 = X_{r-p} + \frac{r-p}{1}\Delta X_0 + \frac{(r-p)(r-p-1)}{1.2}\Delta^2 X_0 + \ldots,$$

wenn dann $r = 0$ angenommen wird.

Wir wenden uns nun nach den angegebenen allgemeinen Entwickelungsgesetzen zu der Darstellung der Unterschiede der einzelnen Functionen selbst, und gehen von folgender Grund-Gleichung aus:

$$133.\quad \Delta fx = f(x+\Delta x) - fx.$$

Die Vorschrift dieser Gleichung ist: Um den Unterschied einer Function zu gewinnen, lasse man in ihr die veränderliche Gröſse um Δx wachsen, und ziehe von der so veränderten Function die ursprüngliche ab.

I. Darstellung der Unterschiede der einfachen Functionen, wenn die Entwickelungsweise auf eine endliche Zunahme gegründet ist.

A. Darstellung der positiven Unterschiede der einfachen Functionen.

§. 27.

Unterschiede der Potenzialfunctionen.

Der erste Unterschied einer Potenzialfunction, die selbst durch y^p, deren Zunahme aber durch Δx bezeichnet werde, ist nach Gleichung (133.)

$$134. \quad \Delta y^p = (y+\Delta x)^p - y^p = \frac{p}{1} y^{p-1}\Delta x + \frac{p(p-1)}{1.2} y^{p-2}(\Delta x)^2 \ldots.$$

Diese Gleichung gilt auch für ein negatives oder gebrochenes p, der Unterschied von $\frac{1}{p^y}$ läfst sich aber auch auf folgende Weise darstellen

$$\Delta \frac{1}{y^p} = \frac{1}{(y+\Delta x)^p} - \frac{1}{y^p} = \frac{y^p - (y+\Delta x)^p}{y^p(y+\Delta x)^p}$$

$$= -\frac{\Delta y^p}{y^p(y+\Delta x)^p} = \frac{\Delta y^p}{(y^2 \mid \Delta x)^p}.$$

Der *m*te Unterschied der Function y^p folgt unmittelbar aus der Gleichung (120.) $\quad 135. \quad \Delta^m y^p =$

$$(y+m\Delta x)^p - \frac{m}{1}(y+(m-1)\Delta x)^p + \frac{m(m-1)}{1.2}(y+(m-2)\Delta x)^p + \ldots (-1)y^p.$$

Entwickelt man die Binomien auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, und ordnet sie nach den Potenzen von der Zunahme, so gewinnt man folgende Darstellung:

$$136. \quad \Delta^m y^p =$$

$$\left(m^m - \frac{m}{1}(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m + \ldots\right)\frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{1.2\ldots m} y^{p-m}(\Delta x)^m$$

$$\left(m^{m+1} - \frac{m}{1}(m-1)^{m+1} + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^{m+1} + \ldots\right)\frac{p(p-1)\ldots(p-m)}{1.2\ldots(m+1)} y^{p-m-1}(\Delta x)^{m+1}$$

$$\left(m^{m+2} - \frac{m}{1}(m-1)^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^{m+2} + \ldots\right)\frac{p(p-1)\ldots(p-m-1)}{1.2\ldots(m+2)} y^{p-m-2}(\Delta x)^{m+2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(m^p - \frac{m}{1}(m-1)^p + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^{m+2} + \ldots\right)\frac{p(p-1)\ldots 3.2.1}{1.2\ldots p}(\Delta x)^p.$$

Diese Darstellung gründet sich auf die Behauptung, dafs

$$m^r - \frac{m}{1}(m-1)^r + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^r + \ldots = 0$$

ist, so lange r kleiner als m ist, die wir als bekannt voraussetzen, und deswegen auf Differenzial-Calcul p. 223., p. 471. verweisen.

Eine andere Darstellung für die höhern Unterschiede von y^p erhalten wir, wenn die Gleichung (134.) mit Δ vervielfacht und alle Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens von

$$\Delta^2 y^p = p\,\Delta x.\Delta y^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2}(\Delta x)^2.\Delta y^{p-2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(\Delta x)^3\,\Delta y^{p-3} + \ldots.$$

nach Vorschrift der Gleichung (134.) in Reihen entwickelt und dann zusammengezählt werden. Die Möglichkeit einer Zusammenzählung beruht auf der Uebereinstimmung der Facultäten, welche die Vorzahlen dieser Darstellung bilden werden. Die Ausführung der angedeuteten Geschäfte führt zu folgender Gleichung:

$$\Delta^2 y^p =$$

$$\frac{1.2}{1.2}\frac{p(p-1)}{1.2}y^{p-2}(\Delta x)^2 + \begin{array}{c|}\frac{1.2.3}{1.1.2}\\ \frac{1.2.3}{1.2.1}\end{array}\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}y^{p-3}(\Delta x)^3 + \begin{array}{c|}\frac{1.2.3.4}{1.1.2.3}\\ \frac{1.2.3.4}{1.2.1.2}\\ \frac{1.2.3.4}{1.2.3.1}\end{array}\frac{p\ldots(p-3)}{1.2.3.4}y^{p-4}(\Delta x)^4 + \ldots.$$

Werden die Glieder dieser Gleichung mit Δ vervielfacht und dann die vorhin angedeuteten Geschäfte ausgeführt, so gewinnt man die Darstellung des dritten Unterschiedes auf folgende Art:

$$\Delta^3 y^p = \frac{1.2.3}{1.1.1}\frac{p\ldots(p-2)}{1.2.3}y^{p-3}(\Delta x)^3 + \begin{array}{c|}\frac{1.2.3.4}{1.1.1.2}\\ \frac{1.2.3.4}{1.1.2.1}\\ \frac{1.2.3.4}{1.2.1.1}\end{array}\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}y^{p-4}(\Delta x)^4$$

$$+ \begin{array}{c|}\frac{1.2.3.4.5}{1.1.1.2.3}\\ \frac{1.2.3.4.5}{1.1.2.1.2}\\ \frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.1.2}\\ \frac{1.2.3.4.5}{1.1.2.3.1}\\ \frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2.1}\\ \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.4.5}\end{array}\frac{p(p-1)\ldots(p-4)}{1.2\ldots.5}y^{p-5}(\Delta x)^5 + \ldots.$$

Die entwickelten Reihen der Unterschiede von y^p mögen sich ihrer Gestalt nach aus den gegebenen Darstellungen erkennen lassen, und bestehen ihrer Wesenheit nach in folgendem.

Die entwickelte Darstellung eines höhern Unterschiedes der Function y^p ist geordnet nach den steigenden Potenzen der Zunahme Δx und den fallenden von y^p. Die vorderste Potenz von Δx kommt mit dem Exponenten des Unterschiedszeichens überein. Die Exponenten von y und Δx ergänzen sich zur Summe p. Diese Glieder sind mit den fallenden Bruchfacultäten von p verbunden, deren Factoren-Anzahl mit dem Exponenten der Zunahme Δx übereinstimmt. Zu diesen Facultäten kommt nun bei jedem Gliede ein Aggregat von Bruch-Facultäten von folgenden Eigenthümlichkeiten. Die Zahl der Factoren stimmt mit den Potenzen der Zunahme überein. Die Zähler aller Facultäten, die einem und demselben Gliede zugehören, sind gleich, beginnen mit der Einheit und erheben sich bis zu dem Exponenten von Δx. Die Nenner haben die Eigenthümlichkeit, daſs sie aus mehreren Facultäten bestehen, wovon jede mit der Einheit beginnt und deren höchste Factoren unter sich die Summe bilden, welche der Exponent der Zunahme angiebt, und zwar zu der Anzahl von Facultäten, welche der Exponent des Unterschiedszeichens auf der linken Seite der Gleichung angiebt. Die Nenner in den Facultäten des zweiten Unterschiedes bilden die Summen zu 2, 3, 4, ... aus zwei Facultäten, die des dritten Unterschiedes aus 3, 4, 5, 6, ... zu drei Facultäten, u. s. w. Nach diesen Bemerkungen läſst sich im Allgemeinen die Vorzahl des $k$ten Gliedes der entwickelten Darstellung des $m$ten Unterschiedes so andeuten:

$$M_k = S\left(\frac{1.2.3\ldots.(m+k-1)}{{}^{m+k-1}P'_{(m;\,1,2,3,\ldots.\,k)!}}\right),$$

wobei zu berücksichtigen ist, daſs der Zähler 1, 2, 3, ... $(m+k-1)$ nicht durch die Summe aller im Nenner angedeuteten Facultäten-Producte, sondern durch jedes neu erzeugte Facultäten-Product insbesondere gemessen werden soll, unter

$${}^{m+k-1}P'_{(m;\,1,\,2,\,3,\,4,\,\ldots.\,k)!}$$

aber zu verstehen ist, daſs alle zur Anzahl m mögliche Facultäten gebildet werden sollen, deren höchste Factoren die Summe $m+k-1$ erzeugen.

Hiernach ergiebt sich folgendes allgemeine Bildungsgesetz für die Darstellung des $m$ten Unterschiedes

$$137.\quad \Delta^m y^p = S\left(\frac{1.2\ldots.m}{{}^mP'_{(m;\,1)}!}\right)\frac{p(p-1)\ldots.(p-m+1)}{1.2\ldots.m}y^{p-m}(\Delta x)^m$$
$$+S\left(\frac{1.2\ldots.(m+1)}{{}^{m+1}P'_{(m;\,1,\,2)}!}\right)\frac{p(p-1)\ldots.(p-m)}{1.2\ldots.(m+1)}y^{p-m-1}(\Delta x)^{m+1}$$
$$+S\left(\frac{1.2.3\ldots.(m+2)}{{}^{m+2}P'_{(m;\,1,\,2,\,3)}!}\right)\frac{p(p-1)\ldots.(p-m-1)}{1.2\ldots.(m+2)}y^{p-m-2}(\Delta x)^{m+2}$$
$$+S\left(\frac{1.2.3\ldots.(m+3)}{{}^{m+3}P'_{(m;\,1,2,3,4)}!}\right)\frac{p(p-1)\ldots.(p-m-2)}{1.2\ldots.(m+3)}y^{p-m-3}(\Delta x)^{m+3}.$$

§. 28.

Bestimmt man nun nach Fortsetzung der Gleichung (137.) die numerischen Werthe der Vorzahlen, so führt dies zu folgender Zusammenstellung:

$$138.\quad \begin{cases} \Delta^2 y^p = \;\;2\,\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}y^{p-2}(\Delta x)^2 + \;\;6\,\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}y^{p-3}(\Delta x)^3 + \;\;14\,\frac{p^{4|-1}}{1^{4|1}}y^{p-4}(\Delta x)^4 + \ldots. \\ \Delta^3 y^p = \;\;6\,\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}y^{p-3}(\Delta x) + \;\;36\,\frac{p^{4|-1}}{1^{4|1}}y^{p-4}(\Delta x)^4 + \;\;150\,\frac{p^{5|-1}}{1^{5|1}}y^{p-5}(\Delta x)^5 + \ldots. \\ \Delta^4 y^p = \;\;24\,\frac{p^{4|-1}}{1^{3|1}}y^{p-4}(\Delta x) + 240\,\frac{p^{5|-1}}{1^{5|1}}y^{p-5}(\Delta x)^5 + 1560\,\frac{p^{6|-1}}{1^{6|1}}y^{p-6}(\Delta x)^6 + \ldots. \\ \Delta^5 y^p = 120\,\frac{p^{5|-1}}{1^{5|1}}y^{p-5}(\Delta x)^5 + 1800\,\frac{p^{6|-1}}{1^{6|1}}y^{p-6}(\Delta x)^6 + 16800\,\frac{p^{7|-1}}{1^{7|1}}y^{p-7}(\Delta x)^7 + \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Eine einfache Vergleichung der Vorzahlen in den vorliegenden Entwicklungen zeigt ihre Abhängigkeit von einander. Die Vorzahl des $k$ten Gliedes im $m$ten Unterschiede ist aus dem der Vorzahl des $k$ten Gliedes im vorhergehenden oder $(m-1)$ten Unterschiede und der des $(k-1)$ten Gliedes im $m$ten Unterschiede, beide m mal genommen, zusammen gesetzt. Bezeichnen wir die drei genannten Glieder durch Δ^m_k, Δ^m_{k-1} und Δ^{m-1}_k, so ist

$$\Delta^m_k = m(\Delta^m_{k-1} + \Delta^{m-1}_k).$$

Geht man nun mittelst dieser Gleichung von den Vorzahlen des ersten Unterschiedes, die alle der Einheit gleich sind, zu denen des zweiten; von diesen zu denen des dritten über, so erzeugen diese Zahlen Aggregate, an denen man bald erkennt, dafs sie die Producte der Verbindungen mit Wiederholungen sind, die aus den natürlichen Zahlen erzeugt werden. Die Vorzahlen der Glieder des zweiten Unterschiedes sind die Summen der Verbindungen aus den Zahlen 1, 2, der Reihenfolge nach zu 0, 1, 2, 3, ... Elementen; die des dritten sind die Summen der Verbindungen aus den Zahlen 1, 2, 3, zu 0, 1, 2, 3, ... Elementen u. s. w. Dabei ist nicht zu übersehen, dafs diese Summen sämmtlich mit einer Facultät von so viel Fac-

toren verbunden werden müssen, als der Unterschieds-Exponent Einheiten enthält. Die sich hieraus ergebenden Darstellungen sind folgende:

$$\Delta^2 y^p = 1.2\,\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\,y^{p-2}(\Delta x)^2 + 1.2\left|\begin{array}{c}1\\2\end{array}\right|\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}\,y^{p-3}(\Delta x)^3 + 1.2\left|\begin{array}{c}1.1\\1.2\\2.2\end{array}\right|\frac{p^{4|-1}}{1^{p|1}}\,y^{p-4}(\Delta x)^4 + \ldots$$

$$\Delta^3 y^p = 1.2.3\,\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}\,y^{p-3}(\Delta x)^3 + 1.2.3\left|\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}\right|\frac{p^{4|-1}}{1^{4|1}}\,y^{p-4}(\Delta x)^4 + 1.2.3\left|\begin{array}{c}1.1\\1.2\\1.3\\2.2\\2.3\\3.3\end{array}\right|\frac{p^{5|-1}}{1^{p|1}}\,y^{p-5}(\Delta x)^5 + \ldots$$

$$\Delta^4 y^p = 1.2.3.4\,\frac{p^{4|-1}}{1^{4|1}}\,y^{p-4}(\Delta x)^4 + 1.2.3.4\left|\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\right|\frac{p^{5|-1}}{1^{5|1}}\,y^{p-5}(\Delta x)^5 + 1.2.3.4\left|\begin{array}{c}1.1\\1.2\\1.3\\1.4\\2.2\\2.3\\2.4\\3.3\\3.4\\4.4\end{array}\right|\frac{p^{6|-1}}{1^{6|1}}\,y^{p-6}(\Delta x)^6 + \ldots$$

u. s. w.

Bezeichnet man nun die Summe der Verbindungen mit Wieder holungen aus den Elementen 1, 2, 3, ... m zu q Elementen durch

$$SC'(q;\,1,2,3,\ldots m),$$

so fliefst hieraus folgende dritte Darstellung für den $m$ten Unterschied einer Potenzialfunction:

$$139.\quad \Delta^m y^p = 1.2.3\ldots m\,SC'(0;\,1,2,3\ldots m)\,\frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{1.2\ldots m}\,y^{p-m}(\Delta x)^m$$

$$+1.2.3\ldots m\,SC'(1;\,1,2,3\ldots m)\,\frac{p(p-1)\ldots(p-m)}{1.2\ldots(m+1)}\,y^{p-m-1}(\Delta x)^{m+1}$$

$$+1.2.3\ldots m\,SC'(2;\,1,2,3\ldots m)\,\frac{p(p-1)\ldots(p-m-1)}{1.2\ldots(m+2)}\,y^{p-m-2}(\Delta x)^{m+2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+1.2.3\ldots m\,SC'(p-m;\,1,2,\ldots m)\,\frac{p(p-1)\ldots 3.2.1}{1.2\ldots p}\,(\Delta x)^p.$$

Wegen des ausführlichen Ganges zur Aufsuchung der in (134. — 139.) mitgetheilten Resultate ist „Differenzial-Calcul §. 127. u. f. pag. 46." nachzusehen.

§. 29.

Anwendungen.

Eine Anwendung, die sich zunächst aus den Resultaten der beiden vorhergehenden §.§. entgegen stellt, ist die Summirung der Producte, welche durch die Verbindungen mit Wiederholungen aus den Elementen 1, 2, 3, ... entstehen. Berücksichtigt man nämlich, dafs die Vorzahlen der Glieder in den entwickelten Darstellungen (137.) und (139.), wenn auch in Form verschieden, doch einander gleich sind, so hat man folgende Gleichung:

$$140. \quad 1, 2, 3 \dots m \, S C'(q; 1, 2, 3 \dots m) = S\left(\frac{1.2.3 \dots (m+q)}{{}^{m+q}P_{(m;\, 1, 2, 3 \dots q+1)}}\right).$$

Entwickelt man nun die Darstellung auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in Partialproducte und vereinigt sie durch zweckmäfsige Anordnung, so entstehen folgende Gleichungen

$$141. \quad \begin{cases} SC'(0;\, 1,2,3\dots m) = 1, \\ SC'(1;\, 1,2,3\dots m) = \dfrac{m(m+1)}{1.2}, \\ SC'(2;\, 1,2,3\dots m) = \dfrac{3m+1}{4} \cdot \dfrac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}, \\ SC'(3;\, 1,2,3\dots m) = \dfrac{m(m+1)}{1.2} \cdot \dfrac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4}, \\ SC'(4;\, 1,2,3\dots m) = \dfrac{15m^2(m+2)+5m-2}{2.1.2.3.4} \cdot \dfrac{m(m+1)\dots(m+4)}{1.2\dots5}, \\ SC'(5;\, 1,2,3\dots m) = \dfrac{3m^4+10m^3+5m^2-2m}{1.6} \cdot \dfrac{m\dots(m+5)}{1.2\dots6}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Diese Producte werden in der combinatorischen Analysis sehr häufig erzeugt, daher ist eine Summirungsweise für sie erwünscht. Die hier gewonnene Darstellung gilt jedoch nur für den Fall, wenn die erzeugenden Elemente 1, 2, 3 .... m sind. Ist aber ihre Zunahme gröfser als die Einheit und beginnen sie nicht mit der Einheit, so geben die Formeln keine Auskunft. Eine ganz allgemeine Summirungsweise dieser Verbindungen ist in der zweiten Untersuchung meiner analytischen Forschungen (Heidelberg bei Ofswald) gegeben, worauf wir verweisen.

Eine neue Darstellung aber für den $m$ten Unterschied der Potenzialfunctionen gewinnen wir durch Einführung der aufgefundenen Gleichungen in (139.), nämlich:

$$142. \quad \Delta^m y^p = p(p-1)\ldots(p-m+1)y^{p-m}(\Delta x)^m$$
$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{p(p-1)\ldots(p-m)}{1.2}y^{p-m-1}(\Delta x)^{m+1}$$
$$+\frac{(3m+1)m}{4}\cdot\frac{p(p-1)\ldots(p-m-1)}{1.2.3}y^{p-m-2}(\Delta x)^{m+2}$$
$$+\frac{m(m+1)m}{1.2}\cdot\frac{p(p-1)\ldots(p-m-2)}{1.2.3.4}y^{p-m-3}(\Delta x)^{m+3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder auch, wenn man die allen Gliedern gemeinschaftliche Facultät ausscheidet,

$$143. \quad \Delta^m y^p = p(p-1).(p-2)\ldots(p-m+1).m(\Delta x)^m\Big[\frac{y^{p-m}}{m}+\frac{(p-m)\Delta x}{1.2}$$
$$+\frac{3m+1}{4}\frac{(p-m)(p-m-1)(\Delta x)^2}{1.2}+\frac{m(m+1)}{1.2}\frac{(p-m)(p-m-1)(p-m-2)(\Delta x)^3}{1.2.3}+\ldots\Big].$$

Eine andere Anwendung erhalten wir, wenn wir die Gleichung (135.) zu Grunde legen, und sie mit der so eben gewonnenen Entwicklung verbinden. Wir gewinnen dann eine Reihe mit ihrem Summen-Ausdrucke. Beginnen wir mit dem niedrigsten Gliede $(-1)^m y^p$, so wird es positiv, wenn m eine gerade Zahl ist. In diesem Falle gilt, wenn $y^p = x^p$ gesetzt wird:

$$144. \quad x^p - m(x+\Delta x)^p + \frac{m(m-1)}{1.2}(x+2\Delta x)^p - \ldots + (x+m\Delta x)^p =$$
$$p(p-1)(p-2)\ldots(p-m+1)m(\Delta x)^m\Big[\frac{x^{p-m}}{m}+\frac{(p-m)\Delta x}{1.2}+\frac{3m+1}{4}\cdot\frac{(p-m)(p-m-1)}{1.2}(\Delta x)^2+\ldots\Big],$$

Ist aber m eine ungerade Zahl, so wird $(-1)^m y^p = -y^p$. Um auch in diesem Falle mit dem niedrigsten Gliede, als einem positiven, beginnen zu können, verändern wir die Zeichen der Gleichung in die entgegengesetzten. Dadurch entsteht:

$$145. \quad x^p - \frac{m}{1}(x+\Delta x)^p + \frac{m(m-1)}{1.2}(x 2\Delta x)^p - \ldots - (x+m\Delta x)^p =$$
$$-p(p-1)(p-2)\ldots(p-m+1)m(\Delta x)^m\Big[\frac{x^{p-m}}{m}+\frac{p-m}{1.2}\Delta x+\frac{3m+1}{4}\frac{(p-m)(p-m-1)}{1.2}(\Delta x)^2+\ldots\Big],$$

Diese Gleichungen lassen sich besonders zweckmäfsig benutzen, wenn m und p sehr grofse und nahe liegende Zahlen sind; denn alsdann bricht die Reihe auf der Seite des Gleichheitszeichens schnell ab.

Ein Beispiel mag hier stehen. Es sei $p=10$, $m=8$, $x=1$ und $\Delta x=1$, so ist

$$1-8.2^{10}+28.3^{10}-56.4^{10}+70.5^{10}-56.6^{10}+28.7^{10}-8.8^{10}+9^{10} =$$
$$10.9.8.7.6.5.4.3\Big[8+\frac{2.8}{2}+\frac{25.8}{4}\Big] = 119750400.$$

§. 30.

Unterschiede der Facultäten.

Wird eine Facultät durch

$$y^{p|\Delta x} = y(y+\Delta x)(y+2\Delta x)\ldots\ldots(y+(p-1)\Delta x)$$

bezeichnet, so ist nach (133.) der erste Unterschied:

$$\Delta y^{p|\Delta x} = (y+\Delta x)^{p|\Delta x} - y^{p|\Delta x}$$
$$= (y+\Delta x)(y+2\Delta x)\ldots\ldots(y+p\Delta x) - y(y+\Delta x)\ldots\ldots(y+(p-1)\Delta x)$$
$$= (y+\Delta x)(y+2\Delta x)\ldots\ldots(y+(p-1)\Delta x)[y+p\Delta x-y],$$

also

146. $\Delta y^{p|\Delta x} = (y+\Delta x)(y+2\Delta x)\ldots\ldots(y+(p-1)\Delta x)p\Delta x = p(y+\Delta x)^{p-1|\Delta x}\Delta x.$

Wird diese Gleichung festgehalten und nach ihr die Unterschiedsnahme der Facultäten bestimmt, so gewinnen wir aus ihr den zweiten Unterschied, wenn wir sie mit Δ vervielfachen und die Gleichung selbst nach ihr behandeln. Es entsteht alsdann

$$\Delta^2 y^{p|\Delta x} = p\Delta x\,\Delta(y+\Delta x)^{p-1|\Delta x} = p(p-1)(y+2\Delta x)^{p-2|\Delta x}(\Delta x)^2.$$

Auf gleiche Weise erhalten wir den dritten Unterschied, und es wird

$$\Delta^3 y^{p|\Delta x} = p^{2|-1}(\Delta x)^2\,\Delta(y+2\Delta x)^{p-2|\Delta x} = p(p-1)(p-2)(y+2\Delta x)^{p-3|\Delta x}(\Delta x)^3$$

u. s. f. Hieraus erkennt sich leicht folgendes allgemeine Gesetz:

147. $$\Delta^m y^{p|\Delta x} = p^{m-1|1}(y+m\Delta x)^{p-m|\Delta x}(\Delta x)^m,$$

oder, in entwickelte Darstellung:

148. $$\Delta^m y^{p|\Delta x} =$$
$$p(p-1)\ldots\ldots(p-m+1)(y+m\Delta x)(y+(m+1)\Delta x)\ldots\ldots(y+(p-1)\Delta x)(\Delta x)^m.$$

Wird durch die Facultät $1.2.3\ldots\ldots p$ gemessen, und werden die gleichen Gröfsen aus Zähler und Nenner entfernt, so entsteht aus (147.)

149. $$\Delta^m \frac{y^{p|\Delta x}}{1^{p|1}} = \frac{(y+m\Delta x)^{p-m|\Delta x}}{1^{p-m|1}}.$$

Ist die Facultät $\frac{1}{y^{p|\Delta x}}$, die wir durch $y^{-p|\Delta x}$ bezeichnen wollen, gegeben: so ist nach (133.)

$$\Delta y^{-p|\Delta x} = \frac{1}{(y+\Delta x)(y+2\Delta x)\ldots\ldots(y+p\Delta x)} - \frac{1}{y(y+\Delta x)\ldots\ldots(y+p\Delta x)}$$
$$= \frac{-p\Delta x}{y(y+\Delta x)\ldots\ldots(y+p\Delta x)},$$

also

$$\Delta y^{-p|\Delta x} = \frac{-p\Delta x}{y^{p+1|\Delta x}}.$$

Wird diese Gleichung als Vorschrift für die Unterschieds-Ableitung fest-

gehalten, und nach ihr der zweite Unterschied genommen, so wird

$$\Delta^2 y^{-p|\Delta x} = -p\Delta x \Delta \frac{1}{y^{p+1|\Delta x}} = -p\Delta x \frac{-(p+1)\Delta x}{y^{p+2|\Delta x}} = \frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{y^{p+2|\Delta x}}.$$

Auf gleiche Weise erhalten wir den dritten Unterschied

$$\Delta^3 y^{-p|\Delta x} = p(p+1)(\Delta x)^2 . \Delta \frac{1}{y^{p+2|\Delta x}} = p(p+1)(\Delta x)^2 . \frac{-(p+2)(\Delta x)}{y^{p+3|\Delta x}}$$
$$= -\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{y^{p+3|\Delta x}}.$$

Das allgemeine Gesetz erkennt sich leicht, wenn man berücksichtigt:

$$150. \quad \Delta^m y^{-p|\Delta x} = (-1)^m \frac{p^{m|1}.(\Delta x)^m}{y^{p+m|\Delta x}},$$

oder in entwickelter Darstellung:

$$151. \quad \Delta^m \frac{1}{y(y+\Delta x)\ldots\ldots(y+(p-1)\Delta x)} = (-1)^m \frac{p(p+1)\ldots\ldots(p+m-1)(\Delta x)^m}{y^{p+m|\Delta x}}.$$

Die Gleichung (151.) stimmt vollkommen mit (147.), wenn dort $-p$ statt p gesetzt wird, denn man erhält

$$\Delta^m y^{-p|\Delta x} = (-p)^{m|-1} y^{-p-m|\Delta x} (\Delta x)^m.$$

Berücksichtigt man nun, dafs

$$(-p)^{m-|1} = (-p)(-p-1)\ldots\ldots(-p-m+1)$$
$$= (-1)^m p(p+1)\ldots\ldots(p+m-1) = (-1)^m p^{m|1}$$

und

$$y^{-(p+m)|\Delta x} = \frac{1}{y^{p+m|\Delta x}},$$

so bestätigt dies die ausgesprochene Behauptung, und die Übereinstimmung der positiven und negativen Facultäten in ihrer Bildungsweise.

Wird (150.) durch die Facultät $1.2.3\ldots\ldots p = 1^{p|1}$ vervielfacht, so entsteht:

$$152. \quad \Delta^m \frac{1^{p|1}}{y^{p|\Delta x}} = (-1)^m \frac{1.2.3\ldots\ldots p.p(p+1)\ldots\ldots(p+m-1)(\Delta x)^m}{y^{p+m|\Delta x}}$$
$$= (-1)^m \frac{1^{p+m|1}.p(\Delta x)^m}{y^{p+m|\Delta x}}.$$

§. 31.

Anwendungen.

Auch von den im vorigen §. gefundenen Resultaten lassen sich mancherlei Anwendungen auf Facultäten-Reihen machen. Legen wir nämlich die Reihe (120.) zu Grunde, und setzen dort $X = x^{p|\Delta x}$, so wird

$$153. \quad \Delta^m x^{p|\Delta x} =$$
$$(x+m\Delta x)^{p|\Delta x} - \frac{m}{1}(x+(m-1)\Delta x)^{p|\Delta x} + \frac{m(m-1)}{1.2}(x+(m-2)\Delta x)^{p|\Delta x} - \ldots$$
$$\ldots (-1)^m x^{p|\Delta x}$$

Vergleichen wir mit dieser Reihe die Entwicklung (147.) und berücksichtigen, dafs bei geradem m das Glied $(-1)^m x^{p|\Delta x} = x^{p-\Delta x}$, bei ungeradem $(-1)^m x^{p|\Delta x} = -x^{p|\Delta x}$, wodurch im letzten Fall eine Zeichenveränderung nöthig wird; so führt diese Verbindung, wenn auch hier $y=x$ gesetzt wird, zu folgender Gleichung:

$$154. \quad x^{p|\Delta x} - \frac{m}{1}(x+\Delta x)^{p|\Delta x} + \frac{m(m-1)}{1.2}(x+2\Delta x)^{p|\Delta x} - \ldots (-1)^m (x+m\Delta x)^{p|\Delta x}$$
$$= (-1)^m p(p-1)(p-2)\ldots(p-m+1)(x+m\Delta x)^{p|\Delta x}(\Delta x)^m.$$

Setzen wir nun, um einfachere Darstellungen zu gewinnen, $\Delta x = 1$, und messen mit der Facultät $1.2.3\ldots p$, so entsteht

$$155. \quad \frac{x(x+1)\ldots(x+p-1)}{1.2\ldots p} - \frac{m}{1}\frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+p)}{1.2\ldots p} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(x+2)(x+3)\ldots(x+p+1)}{1.2\ldots p}$$
$$\ldots (-1)^m \frac{(x+m)(x+m+1)\ldots(x+p+m-1)}{1.2\ldots p}$$
$$= (-1)^m \frac{(p-m+1)(p-m+2)\ldots p(x+m)\ldots(x+m+p-1)}{1.2.3\ldots p}.$$

Ist $x=1$, so wird

$$156. \quad 1 - \frac{m(p+1)}{1.2} + \frac{(m-1)m(p+1)(p+2)}{1.2.1.2} - \frac{(m-2)(m-1)m(p+1)(p+2)(p+3)}{1.2.3.1.2.3}$$
$$\ldots (-1)^m \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}{1.2\ldots p}$$
$$= (-)^m \frac{(p-m+1)(p-m+2)\ldots p(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}{1.2.3\ldots p}.$$

Ist aber $m=p$, so gewinnt man für ein gerades m:

$$157. \quad 1 - \frac{m(m+1)}{1.1} + \frac{(m-1)m(m+1)(m+2)}{1.2.1.2} - \frac{(m-2)\ldots(m+3)}{1.2.3.1.2.3} \ldots + \frac{1.2\ldots 2m}{1.2^2.3^2\ldots m^2} = 1,$$

und für ein ungerades m:

$$158. \quad 1 - \frac{m(m+1)}{1.1} + \frac{(m-1)\ldots(m+2)}{1^2.2^2} - \frac{(m-2)\ldots(m+3)}{1^2.2^2.3^2} \ldots - \frac{1.2\ldots 2m}{1.2^2.3^2\ldots m^2} = -1.$$

Legen wir aber in der Gleichung (120.) die Function $\frac{1}{x^{p|\Delta x}}$ zu Grunde, so erhalten wir, in Rücksicht auf die Gleichung (151.) und auf die vorzunehmende Zeichen-Veränderung, die auch bei einem ungeraden m einen positiven Summen-Ausdruck erzeugt, folgende neue Darstellung:

$$159.\quad \frac{1}{x^{p|\Delta x}} - \frac{m}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}} + \frac{m(m-1)}{1.2(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}} - \ldots (-1)^m \frac{1}{(x+m\Delta x)^{p|\Delta x}}$$
$$= \frac{p(p+1)\ldots(p+m-1)(\Delta x)^m}{x^{p+m|\Delta x}},$$

oder, wenn mit der Facultät $1.2.3\ldots p$ vervielfacht wird,

$$160.\quad \frac{1.2.3\ldots p}{x^{p|\Delta x}} - \frac{m.1.2\ldots p}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}} + \frac{m(m-1)3.4\ldots p}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}} - \ldots (-1)^m \frac{1.2.3\ldots p}{(x+m\Delta x)^{p|\Delta x}}$$
$$= \frac{1.2.3\ldots(p+m-1).p(\Delta x)^m}{x(x+\Delta x)\ldots(x+(p+m-1)\Delta x)}.$$

Wird hierin $x=1$ und $\Delta x=1$ gesetzt, und werden die gleichen Gröfsen aus den Zählern und Nennern entfernt, so entsteht

$$161.\quad 1 - \frac{m}{p+1} + \frac{m(m-1)}{(p+1)(p+2)} - \frac{m(m-1)(m-2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \ldots$$
$$\ldots (-1)^m \frac{m(m-1)\ldots 3.2.1}{(p+1)(p+2)\ldots(p+m)} = \frac{p}{p+m}.$$

Hieraus folgt, wenn $m=p$ gesetzt wird, eine Reihe von folgender Gestalt:

$$162.\quad 1 - \frac{m}{m+1} + \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)} - \frac{m(m-1)(m-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)} \ldots (-1)^m \frac{m\ldots 3.2.1}{(m+1)\ldots 2m} = \frac{1}{2},$$

die um so merkwürdiger ist, da sie einen beständigen Werth hat, m mag eine gerade oder ungerade Zahl bedeuten.

Aus dem Summen-Ausdruck $\frac{p}{p+m}$ der Reihe (161.) ergeben sich über die Natur der Reihe (151.) folgende Aufschlüsse. Da $\frac{p}{p+m}$ immer ein echter Bruch ist, so ist der Werth der vorliegenden Reihe immer kleiner als die Einheit. Die Glieder der Reihe müssen daher convergiren. So klein nun auch der vorliegende Bruch werden kann, so wird er doch nie verschwinden, daher liegen die Werthe aller möglichen Reihen von der vorliegenden Form zwischen den Grenzwerthen 0 und 1, denen sie sich unendlich nähern, aber nie gleich kommen können. Hieran schliefst sich noch folgende Bemerkung: Je näher die Werthe von p und m sich liegen, desto mehr wird sich der Werth der vorliegenden Reihe der Grenze $\frac{1}{2}$ nähern; je weiter sie auseinander liegen, desto entfernter wird der Werth der Reihe von $\frac{1}{2}$ liegen. Ist m gröfser als p, so werden die Werthe der Reihe zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen, ist p gröfser als m, so werden sie zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 fallen. Setzt man in (162.) $m=\infty$, und berücksichtigt, dafs die endlichen Werthe neben dem Unendlich-Grofsen verschwinden, dafs also

$$\frac{\infty}{\infty+1}=\frac{\infty}{\infty}=1;\quad \frac{\infty(\infty-1)}{(\infty+1)(\infty+2)}=\frac{\infty^2}{\infty^2}=1 \text{ u. s. w.}$$

ist, so geht hieraus die schon bekannte Reihe hervor:

$$163.\quad \tfrac{1}{2}=1-1+1-1+1-1\ldots,$$

die eigentlich ein unendliches Geschäft andeutet.

§. 32.

Unterschiede der Exponentialgröſsen.

Sehr einfach stellen sich die Unterschiede der Exponentialgröſsen dar. Zuerst erhalten wir aus (120.), wenn $X=a^y$ gesetzt wird,

$$164.\quad \Delta^m a^y = a^{y+m\Delta x}-\frac{m}{1}a^{y+(m-1)\Delta x}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{y+(m-2)\Delta x}-\ldots(-)^m a^y.$$

Eine zurücklaufende Bildungsweise wird durch die Fundamental-Gleichung (133.) aufgefunden:

$$\Delta a^y = a^{y+\Delta x}-a^y=(a^{\Delta x}-1)a^y.$$

Sie zeigt das Bildungsgesetz deutlich an. Wird sie mit Δ vervielfacht, so entsteht

$$\Delta^2 a^y=(a^{\Delta x}-1)\Delta a^y=(a^{\Delta x}-1)(a^{\Delta x}-1)a^y=(a^{\Delta x}-1)^2 a^y.$$

Eben so erhalten wir, durch Vervielfachen mit Δ, hieraus:

$$\Delta^3 a^y=(a^{\Delta x}-1)^2\Delta a^y=(a^{\Delta x}-1)^3 a^y.$$

Demnach allgemein

$$165.\quad \Delta^m a^y=(a^{\Delta x}-1)^m a^y.$$

Eine ähnliche Bildungsweise erhalten wir für ein negatives y, und zwar aus (120.)

$$166.\quad \Delta^m\frac{1}{a^y}=\frac{1}{a^{y+m\Delta x}}-\frac{m}{a^{y+(m-1)\Delta x}}+\frac{m(m+1)}{1.2.a^{y+(m-2)\Delta x}}-\ldots(-1)^m\frac{1}{a^y}.$$

Eben so ergiebt sich die zurücklaufende Bildungsweise

$$\Delta\frac{1}{a^y}=\frac{1}{a^{y+\Delta x}}-\frac{1}{a^y}=\frac{1}{a^{y+\Delta x}}-\frac{a^{\Delta x}}{a^{y+\Delta x}}=\frac{1-a^{\Delta x}}{a^{y+\Delta x}}=\frac{1-a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}.\frac{1}{a^y}.$$

Diese Gleichung giebt die Vorschrift für die Ableitung des zweiten Unterschiedes. Wird sie, um den zweiten Unterschied zu gewinnen, mit Δ vervielfacht, so wird

$$\Delta^2\frac{1}{a^y}=\frac{1-a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}\Delta\frac{1}{a^y}=\frac{1-a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}.\frac{1-a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}.\frac{1}{a^y}=\left(\frac{1-a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}\right)^2\frac{1}{a^y}.$$

Eben so entsteht der dritte:

$$\Delta^3\frac{1}{a^y}=\left(\frac{1-a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}\right)^2\Delta\frac{1}{a^y}=\left(\frac{1-a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}\right)^3\frac{1}{a^y}.$$

das allgemeine Gesetz läfst sich durch folgende Gleichung darstellen:

$$167. \quad \Delta^m \frac{1}{a^y} = \left(\frac{1-a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}\right)^m \cdot \frac{1}{a^y}.$$

Die Anwendungen, die wir hieraus ziehen, sind folgende, wenn in (164.) und (165.), $y=x$ gesetzt und die Zeichen berücksichtigt werden:

$$168. \quad a^x - \frac{m}{1} a^{x+\Delta x} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{x+2\Delta x} - \ldots (-1) a^{x+m\Delta x} = (-1)^m (a^{\Delta x}-1)^m a^x,$$

und aus (166.) und (167.):

$$169. \quad \frac{1}{a^x} - \frac{m}{a^{x+\Delta x}} + \frac{m(m-1)}{1.2.a^{x+2\Delta x}} - \ldots (-1)^m \frac{1}{a^{x+m\Delta x}}$$

$$= (-1)^m \left(\frac{1-a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}\right)^m \cdot \frac{1}{a^x} = (-1)^m \frac{(1-a^{\Delta x})^m}{a^{x+m\Delta x}}.$$

Für ein gerades m wird der Summen-Ausdruck positiv, für ein ungerades negativ. Die Summen-Ausdrücke führen bei der Anwendung immer auf sehr kurze Darstellungen.

§. 33.

Unterschiede für Sinus und Cosinus.

Wir wenden uns nun zur Darstellung der Unterschiede von $\sin y$ und $\cos y$.

Aus der Gleichung (120.) gewinnt man folgende Darstellung, wenn $X = \sin x$ gesetzt wird:

$$170. \quad \Delta^m \sin y = \sin(y+m\Delta x) - \frac{m}{1}\sin(y+(m-1)\Delta x)$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(y+(m-2)\Delta x) \ldots (-1)^m \sin y.$$

Da die zurücklaufende Bildungsweise der höhern Unterschiede für den Sinus und Cosinus eines Winkels den ersten Unterschied beider Winkelfunctionen voraussetzt, so haben wir diese vorerst aufzusuchen. Der erste Unterschied von $\sin y$ ist nach der Grundgleichung (133.)

$$\Delta \sin y = \sin(y+\Delta x) - \sin y.$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens lassen sich nach folgender, aus der Trigonometrie entlehnten, Gleichung

$$\sin p - \sin q = \cos\frac{p+q}{2} \cdot \sin\frac{p-q}{2}$$

in folgenden zusammenziehen:

$$\sin(y+\Delta x) - \sin y = 2.\cos\left(y+\frac{\Delta x}{2}\right).\sin\tfrac{1}{2}\Delta x,$$

daher ist

$$172. \quad \Delta \sin y = 2.\cos\left(y+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Hieraus entnehmen wir die Vorschrift: der Unterschied des Sinus eines Winkels wird gefunden, wenn der Sinus in den Cosinus übergeht, der Winkel um die halbe Zunahme wächst, und der so veränderte Cosinus mit dem doppelten Sinus der halben Zunahme vervielfacht wird.

Der erste Unterschied von $\cos y$ ist nach der Grundgleichung (133.)

$$\Delta \cos y = \cos(y + \Delta x) - \cos y.$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens lassen sich nach der Gleichung

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

in folgenden zusammen ziehen:

$$\cos(y + \Delta x) - \cos y = -2 \sin\left(y + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2},$$

also

$$173. \quad \Delta \cos y = -2 \sin\left(y + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \tfrac{1}{2} \Delta x.$$

Die Vorschrift dieser Gleichung ist: der Unterschied des Cosinus wird gefunden, wenn der Winkel um die halbe Zunahme wächst, der Cosinus in den negativen Sinus übergeht und mit dem doppelten Sinus der halben Zunahme vervielfacht wird.

Der zweite Unterschied des Sinus wird durch Vervielfachen der Gleichung (172.) mit Δ gewonnen. Es ist

$$\Delta^2 \cos y = 2 \sin \tfrac{1}{2} \Delta x \, \Delta \cos\left(y + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

und man erkennt, daſs der zweite Unterschied des Sinus den ersten des Cosinus voraussetzt. Wird also $\Delta \cos(y + \frac{1}{2} \Delta x)$ nach (173.) behandelt, und der erhaltene Werth eingeführt, so entsteht

$$\Delta^2 \sin y = -2^2 \sin(y + \Delta x)(\sin \tfrac{1}{2} \Delta x)^2.$$

Eben so erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta^3 \sin y &= -2^2 (\sin \tfrac{1}{2} \Delta x)^2 \Delta \sin(y + \Delta x) \\ &= -2^3 \sin\left(y + \frac{3 \Delta x}{2}\right) (\sin \tfrac{1}{2} \Delta x)^3. \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise

$$\Delta^4 \sin y = 2^4 \cos(y + 2 \Delta x)(\sin \tfrac{1}{2} \Delta x)^4.$$

Hieraus flieſst folgendes Ableitungsgesetz:

$$
174.\quad \left\{\begin{array}{l}
\Delta^{4m}\sin y = (-1)^{2m}\,2^{4m}\sin(y+2m\,\Delta x)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^{4m},\\
\Delta^{4m+1}\sin y = (-1)^{2m}\,2^{4m+1}\cos\left(y+\frac{4m+1}{2}\Delta x\right)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^{4m+1},\\
\Delta^{4m+2}\sin y = (-1)^{2m+1}\,2^{4m+2}\sin(y+(2m+1)\Delta x)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^{4m+2},\\
\Delta^{4m+3}\sin y = (-1)^{2m+1}\,2^{4m+3}\cos\left(y+\frac{4m+3}{2}\Delta x\right)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^{4m+3}.
\end{array}\right.
$$

Der zweite Unterschied des Cosinus wird gefunden, wenn man (173.) mit Δ vervielfacht; alsdann entsteht

$$\Delta^2\cos y = -2\sin\tfrac{1}{2}\Delta x\,\Delta\sin\left(y+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

und nun diese Gleichung nach (172.) behandelt. Es entsteht

$$\Delta^2\cos y = -2^2.\cos(y+\Delta x)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^2.$$

Eben so zieht man aus (173.) den dritten Unterschied, und es wird

$$\Delta^3\cos y = -2^1.(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^2\Delta\cos(y+\Delta x) = 2^3\sin\left(y+\frac{3\Delta x}{2}\right)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^3,$$

und

$$\Delta^4\cos y = 2^4\cos(y+2\Delta x)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^4.$$

Demzufolge ist das allgemeine Gesetz:

$$
175.\quad \left\{\begin{array}{l}
\Delta^{4m}\cos y = (-1)^{2m}\,2^{2m}\cos(y+2m\,\Delta x)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^{2m}\\
\Delta^{4m+1}\cos y = (-1)^{2m+1}\,2^{4m+1}\sin\left(y+\frac{4m+1}{2}\Delta x\right)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^{4m+1},\\
\Delta^{4m+2}\cos y = (-1)^{2m+1}\,2^{4m+2}\cos(y+(2m+1)\Delta x)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^{4m+2},\\
\Delta^{4m+3}\cos y = (-1)^{2m+2}\,2^{4m+3}\sin\left(y+\frac{4m+3}{2}\Delta x\right)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^{4m+3}.
\end{array}\right.
$$

§. 34.

Um nun aus den Resultaten des vorhergehenden §. weitere Folgerungen ziehen zu können, vergleichen wir (170.) mit der Darstellung von (174.). Aus (174.) ist ersichtlich, daſs die Darstellung der Unterschiede von $\sin y$ in den Perioden der Vielfachen der Zahl 4 sich bewegen. Berücksichtigt man bei dem Voraussteilen des Gliedes $(-1)^m\sin y$ in der Darstellung (170.), als einem Positiven, den Zeichen-Wechsel bei einer ungeraden Anzahl, so hat man folgende vier Reihen für die Sinus, mit ihren Summenausdrücken, wenn $y=x$ und $m=4m$, $4m+1$ u. s. w. gesetzt wird:

$$176.\quad \sin x-\frac{4m}{1}\sin(x+\Delta x)+\frac{4m(4m-1)}{1.2}\sin(x+2\Delta x)\ldots+\sin(x+4m\Delta x)$$
$$= -2^{4m}\sin(x+2m\,\Delta x)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^{4m},$$

$$176.\quad\begin{cases}\sin x-\frac{4m+1}{1}\sin(x+\Delta x)+\frac{(4m+1)4m}{1.2}\sin(x+2\Delta x)\ldots(-)\sin(x+(4m+1)\Delta x)\\ \qquad=-2^{4m+1}\cos\left(x+\frac{4m+1}{2}\Delta x\right)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^{4m+1},\\ \sin x-\frac{4m+2}{1}\sin(x+\Delta x)+\frac{(4m+2)(4m+1)}{1.2}\sin(x+2\Delta x)\ldots+\sin(x+(4m+2)\Delta x)\\ \qquad=-2^{4m+2}\sin(x+(2m+1)\Delta x)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^{4m+2},\\ \sin x-\frac{4m+3}{1}\sin(x+\Delta x)+\frac{(4m+3)(4m+2)}{1.2}\sin(x+2\Delta x)\ldots-\sin(x+(4m+3)\Delta x)\\ \qquad=2^{4m+3}\cos\left(x+\frac{4m+3}{2}\Delta x\right)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^{m}.\end{cases}$$

Ähnliche Betrachtungen führen zu folgenden Reihen, und Summenausdrücken für die Cosinus. Es ist:

$$177.\quad\begin{cases}\cos x-\frac{4m}{1}\cos(x+\Delta x)+\frac{4m(4m-1)}{1.2}\cos(x+2\Delta x)\ldots+\cos(x+4m\Delta x)\\ \qquad=2^{4m}\cos(x+2m\Delta x)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^{4m},\\ \cos x-\frac{4m+1}{1}\cos(x+\Delta x)+\frac{(4m+1)4m}{1.2}\cos(x+2\Delta x)\ldots-\cos(x+(4m+1)\Delta x)\\ \qquad=2^{4m+1}\sin\left(x+\frac{4m+1}{2}\Delta x\right)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^{4m+1},\\ \cos x-\frac{4m+2}{1}\cos(x+\Delta x)+\frac{(4m+2)(4m+1)}{1.2}\cos(x+2\Delta x)\ldots\cos(x+(4m+2)\Delta x)\\ \qquad=-2^{4m+2}\cos(x+(2m+1)\Delta x)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^{4m+2},\\ \cos x-\frac{4m+3}{1}\cos(x+\Delta x)+\frac{(4m+3)(4m+2)}{1.2}\cos(x+2\Delta x)\ldots(-)\cos(x+(4m+3)\Delta x)\\ \qquad=-2^{4m+3}\sin\left(x+\frac{4m+3}{2}\Delta x\right)(\sin\tfrac{1}{2}\Delta x)^{4m+3}.\end{cases}$$

§. 35.

Unterschiede der Logarithmen.

Wir beendigen die Darstellung der positiven Unterschiede der Functionen mit denen der Logarithmen. Der erste Unterschied der Logarithmen ist nach der Gleichung (133.)

$$178.\quad \Delta\log y=\log(y+\Delta x)-\log y=\log\frac{y+\Delta x}{y}=\log\left(1+\frac{\Delta x}{y}\right).$$

Nun ist

$$\log(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\ldots;$$

demnach läſst sich der erste Unterschied eines Logarithmen auch durch folgende Reihe darstellen:

$$179.\quad \Delta\log y=\frac{\Delta x}{y}-\frac{(\Delta x)^2}{2y^2}+\frac{(\Delta x)^3}{3y^3}-\frac{(\Delta x)^4}{4y^4}+\ldots$$

Da der Unterschied eines Logarithmen sich auch durch die Gleichung $\log(y+\Delta x)-\log y$ darstellt, so hat man, wenn dieses mit (179.) verbunden wird, auch folgende Gleichung:

$$\log(y+\Delta x)-\log y = \frac{\Delta x}{y}-\frac{(\Delta x^2)}{2y^2}+\frac{(\Delta x)^3}{3y^3}-\frac{(\Delta 4)^4}{4y^4}+\ldots.$$

und hieraus, wenn wir, um eine allgemeinere Gleichung für Logarithmen zu erhalten, $y=u$ und $\Delta x=z$ setzen

$$180.\quad \log(u+z) = \log u+\frac{z}{u}-\frac{z^2}{2u^2}+\frac{z^3}{3u^3}-\frac{z^4}{4u^4}+\ldots..$$

Diese Gleichung halten wir fest, um die höheren Unterschiede der Logarithmen zu gewinnen. Aus der Gleichung (120.) ergiebt sich für den $m$ten Unterschied der Logarithmen

$$181.\quad \Delta^m \log y = \log(y+m\Delta x)-\frac{m}{1}\log(y+(m-1)\Delta x)+\frac{m(m-1)}{1.2}\log(y+(m-2)\Delta x)\ldots.$$
$$\ldots.(-1)^m \log y.$$

Werden nun die Logarithmen-Ausdrücke auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nach (180.) entwickelt, so erhalten wir:

$$\log(y+m\Delta x) = \log y+\frac{m\Delta x}{y}-\frac{m^2(\Delta x)^2}{2y^2}+\frac{m^3(\Delta x)^3}{3y^3}-\ldots.$$
$$-\frac{m}{1}\log(y+(m-1)\Delta x) = -m\log y+m\frac{(m-1)\Delta x}{y}+m\frac{(m-1)^2(\Delta x)^2}{2y^2}-m\frac{(m-1)^3(\Delta x)^3}{3y^3}+\ldots.$$
$$\frac{m(m-1)}{1.2}\log(y+(m-2)\Delta x) = \frac{m(m-1)}{1.2}\log y+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(m-2)\Delta x}{y}-\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(m-2)^2(\Delta x)^2}{2y^2}+\ldots.$$

. . . .

$$(m)^{m-1}m\log(y+\Delta x) = (-1)^{m-1}\left(m\log y+m\frac{1.\Delta x}{y}-\frac{m}{1}\frac{1^2(\Delta x)^2}{2y^2}+\frac{m}{1}\frac{1^3(\Delta x)^3}{3y^3}-\ldots.\right)$$
$$(-1)^m\log y = (-1)^m\log y.$$

Zählen wir die Reihen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in verticaler Richtung zusammen, und bemerken, dafs

$$\log y - m\log y+\frac{m(m-1)}{1.2}\log y - \ldots.(-1)^m\log y$$
$$= \left(1-m+\frac{m(m-1)}{1.2}-\ldots.(-)^m 1\right)\log y = (1-1)^m\log y = 0$$

ist, so haben wir, bei Ausscheidung gleicher Factoren:

$$\Delta^m\log y = \left(m-\frac{m}{1}(m-1)+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)\ldots.\right)\frac{\Delta x}{y}$$
$$-\left(m^2-\frac{m}{1}(m-1)+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^2\ldots.\right)\frac{(\Delta x)^2}{2y^2}$$
$$+\left(m^3-\frac{m}{1}(m-2)+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^3\ldots.\right)\frac{(\Delta x)^3}{3y^3}$$

. . . .

Diese Darstellungfällt mit der (136.) gefundenen zusammen, und es gelten daher von den in Klammern eingeschlossenen Vorzahlen die Bemerkungen, die schon früher gemacht wurden. Die Anzahl der Glieder der Reihe ist unendlich, und die Vorzahlen erzeugen erst dann reelle Werthe, wenn die Exponenten von m entweder so grofs oder gröfser als m werden. Hieraus gewinnt man folgende Darstellung für den $m$ten Unterschied eines Logarithmen:

$$182.\quad \Delta^m \log y = (-1)^{m-1}\left(m^m - \frac{m}{1}(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m \ldots\right)\frac{(\Delta x)^m}{m y^m}$$
$$(-1)^m \left(m^{m+1} - \frac{m}{1}(m-1)^{m+1} + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^{m+1}\ldots\right)\frac{(\Delta x)^{m+1}}{(m+1)y^{m+1}}$$
$$(-1)^{m+1}\left(m^{m+2} - \frac{m}{1}(m-1)^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^{m+2}\ldots\right)\frac{(\Delta x)^{m+2}}{(m+2)y^{m+2}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzen wir statt der gefundenen Vorzahlen die ihnen gleich geltende Werthe aus (137.), so erhalten wir

$$183.\quad \Delta^m \log y = (-1)^{m-1} S\left(\frac{1.2.3\ldots m}{{}^m P_{(m;\,1)}!}\right)\frac{(\Delta x)^m}{m y^m}$$
$$(-1)^m \; S\left(\frac{1.2.3\ldots(m+1)}{{}^{m+1}P_{(m;\,1,\,2)}!}\right)\frac{(\Delta x)^{m+1}}{(m+1)y^{m+1}}$$
$$(-1)^{m+1} S\left(\frac{1.2.3\ldots(m+2)}{{}^{m+2}P_{(m;\,1,\,2,\,3)}!}\right)\frac{(\Delta x)^{m+2}}{(m+1)y^{m+2}}.$$

Eben so aus (139.)

$$184.\quad \Delta^m \log y = (-1)^{m-1} 1.2.3\ldots m\, S\, C'(0;\; 1, 2, \ldots m)\frac{(\Delta x)^m}{m y^m}$$
$$(-1)^m \,.\, 1.2.3\ldots m\, S\, C'(1;\; 1, 2, \ldots m)\frac{(\Delta x)^{m+1}}{(m+1)y^{m+1}}$$
$$(-1)^{m+1} 1.2.3\ldots m\, S\, C'(2;\; 1, 2, \ldots m)\frac{(\Delta x)^{m+2}}{(m+1)y^{m+2}}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Oder hieraus, mit Benutzung der Werthe aus (141.):

$$185.\quad \Delta^m \log y = (-1)^{m-1} 1.2.3\ldots m\left[\frac{(\Delta x)^m}{m y^m} - \frac{m(m+1)}{1.2}\cdot\frac{(\Delta x)^{m+1}}{(m+1)y^{m+1}}\right.$$
$$+ \frac{3m+1}{4}\cdot\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\cdot\frac{(\Delta x)^{m+2}}{(m+2)y^{m+2}}$$
$$- \frac{m(m+1)}{1.2}\cdot\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{(\Delta x)^{m+3}}{(m+3)y^{m+3}}$$
$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right].$$

Die so eben gefundene Reihen erstrecken sich bis ins Unendliche.

§. 36.

Von der Berechnung der Logarithmen durch Unterschiede.

Die Unterschiede der Logarithmen lassen sich zweckmäfsig zur Auffindung der Logarithmen überhaupt, besonders aber sehr grofser Zahlen gebrauchen. Die Convergenz aller im vorhergehenden §. aufgefundenen Gleichungen hängt von der Beschaffenheit der Function y und Δx ab. Ist y sehr grofs und Δx sehr klein, so werden sie sehr brauchbare Ausdrücke liefern. Aus der Gleichnung (180.) hat man, wenn $y = y$ und $\Delta x = 1$ gesetzt wird. z. B.

$$\log(x+1) = \log x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \ldots.$$

Wenden wir diese Gleichung auf die Berechnung des hyperbolischen Logarithmen von 1001 an, so ist

$$\log 1001 = \log 1000 + \frac{1}{1000} - \frac{1}{2000000} + \frac{1}{3000000000} - \ldots.$$

Da das vierte Glied schon nicht mehr auf die 13te Decimalstelle influirt, so ist

$$\log 1001 = 6{,}9077552789 + \frac{1}{1000} - \frac{1}{2000000} + \ldots.$$
$$= 6{,}9087547793\ldots.$$

Ist der Logarithme von 1001 gefunden, so läfst sich der von 1002 u. s. w. finden, wobei die gefundenen Werthe benutzt werden können.

Eine andere, viel kürzere und dabei allgemeinere Methode ist folgende. Aus der Gleichung (130.) ist

$$X_m = X + \frac{m}{1}\Delta X + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 X_0 + \ldots.$$

Wird $X = \log x$ gesetzt, so ist $X_m = \log(x + m\Delta x)$, und hieraus:

$$186. \quad \log(x+m\Delta x) = \log x + \frac{m}{1}\Delta\log x + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2\log x + \ldots.$$

oder, wenn $\Delta x = 1$ gesetzt wird,

$$\log(x+m) = \log x + \frac{m}{1}\Delta\log x + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2\log x + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^3\log x \ldots.$$

Diese Gleichungen haben den Vorzug, dafs man für eine ziemlich grofse Reihenfolge grofser Zahlen nur einmal $\Delta\log x$, $\Delta^2\log x$, ... bis zu jeder beliebigen Genauigkeit zu berechnen nöthig hat. Ihre Berechnung aber giebt sich an (185.) sehr leicht, weil bei grofsen Zahlen die dort gegebene Reihe sehr stark convergirt.

Nehmen wir z. B. an $x = 10000$, $\Delta x = 1$, so ist

$$\Delta \log 10000 = \frac{1}{10000} - \frac{1}{2.10000^2} + \ldots = 0{,}0000\,9999\,5000\,3333\,083\ldots,$$

das 5te Glied influirt erst auf die 21ste Decimalstelle;

$$\Delta^2 \log 10000 = 2\left[-\frac{1}{2.10000^2} + \frac{1}{10000^3} - \frac{7}{4.10000^4} + \frac{15}{5.10000^5} - \ldots\right]$$
$$= -0{,}0000\,0000\,9998\,0003\,50\ldots,$$

das 4te Glied influirt est auf die 21ste Decimalstelle;

$$\Delta^3 \log 10000 = 6\left[\frac{1}{3.10000^3} - \frac{3}{2.10000^4} + \frac{5}{10000^5} - \ldots\right]$$
$$= 0{,}0000\,0000\,0001\,9900\,998\ldots,$$

das 8te Glied influirt erst auf die 21ste Decimalstelle;

$$\Delta^4 \log 10000 = 24\left[-\frac{1}{4.10000^4} + \frac{2}{10000^5} - \frac{65}{6.10000^6} + \ldots\right]$$
$$= -0{,}0000\,0000\,0000\,0005\,995\ldots,$$

das dritte Glied influirt erst auf die 23ste Decimalstelle;

$$\Delta^5 \log 10000 = 120\left[\frac{1}{5.10000^5} - \frac{5}{2.10000^6} + \ldots\right]$$
$$= +0{,}0000\,0000\,0000\,0000\,0024$$

u. s. w. Der sechste und die folgenden Unterschiede influiren erst später als die 20ste Decimalstelle. Man kann sie daher füglich vernachläſsigen, wodurch man für die Berechnung der hyperbolischen Logarithmen der Zahlen von 10000 an, folgende sehr kurze und zweckmäſsige Formel erhält

$$187. \quad \log(10000+m) =$$
$$\log 10000 + m.0{,}0000\,9999\,5000\,3333\,083\ldots$$
$$-\frac{m(m-1)}{1.2}.0{,}0000\,0000\,9998\,0003\,50\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,0{,}0000\,0000\,0001\,9990\,998\ldots$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\,0{,}0000\,0000\,0000\,0005\,995\ldots$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}\,0{,}0000\,0000\,0000\,0000\,0024\ldots$$

Wird hierin m selbst wieder eine groſse Zahl, so wird nur nöthig sein, etwa bis zum 10ten Unterschiede fortzugehen; dann kann m schon bis zu einem Werthe von einigen hunderten steigen, bis das 10te Glied einen Einfluſs auf einige Zahlen von der 20sten Decimalstelle äuſsert.

B. Darstellung der negativen Unterschiede der einfachen Functionen.

§. 37.

Darstellung der negativen Unterschiede der Potenzialfunctionen

Nicht alle der in den §. §. 27. — 34. gefundenen Darstellungen für die höhern Unterschiede sind allgemein, und gelten deswegen auch nicht, wie sich im Folgenden zeigen wird, von den negativen Unterschieden. Daher müssen die negativen Unterschiede der einfachen Functionen auf eigenthümlichen Wegen aufgesucht werden, weil man nicht vorher wissen kann, welche Darstellungen allgemein sind. Die Darstellung der negativen Unterschiede ist oft mühsamer.

Wir theilen im Kurzen die Methoden mit, wie die negativen Unterschiede der Functionen aufgesucht werden, und beginnen mit der Darstellung der negativen Unterschiede der Potenzialfunctionen. Um eine Ableitungsweise zu erhalten, vervielfachen wir den ersten positiven Unterschied (134.) §. 27. mit Δ^{-1} und stellen das erste Glied auf der rechten Seite, worin Δ^{-1} erscheint, auf die linke Seite des Gleichheitszeichens:

$$\frac{p}{1}\Delta^{-1}y^{p-1}\Delta x = y^p - \frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^{-1}y^{p-2}(\Delta x)^2 - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\Delta^{-1}y^{p-3}(\Delta x)^3 - \ldots.$$

Wird hierin, $p+1$ statt p gesetzt, und mit $p\Delta x$ gemessen, so erhalten wir folgende Grundgleichung:

$$188. \quad \Delta^{-1}y^p = \frac{y^{p+1}}{(p+1)\Delta x} - \tfrac{1}{2}\frac{p}{1}\Delta y^{p-1}(\Delta x) - \tfrac{1}{3}\frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^{-1}y^{p-2}(\Delta x)^2 - \ldots.$$

Auf der rechten Seite erscheint ein Glied von Δ^{-1} befreit. Diese Bemerkung zeigt die Methode, wie allmälig jedes Glied auf der rechten Seite von Δ^{-1} befreit, und so eine Gleichung gefunden werden kann, die auf Potenzen von y zurückgeführt ist.

Behandeln wir nun das Glied $-\tfrac{1}{2}\frac{p}{1}y^{p-1}\Delta x$ nach der Vorschrift von (187.), indem wir $p-1$ statt p setzen, alle Glieder verneint nehmen und mit $\tfrac{1}{2}p\Delta x$ vervielfachen, und führen den erhaltenen Werth ein, so entsteht, vom dritten Gliede an, folgende Doppelreihe, wenn statt der Zahlen $1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots.$ die Zeichen A_0, A, A_2, A_3, ... gesetzt werden:

$$\begin{array}{rl} \Delta^{-1} y^p = \dfrac{p^{p+1}}{(p+1)\Delta x} - A_1 y^p - A_2 \dfrac{p(p-1)}{1.2} & \Big| \Delta^{-1} y^{p-2} (\Delta x)^2 \\ + A_1 \dfrac{p(p-1)}{1.2} & \Big| \\ \begin{array}{r} -A_3 \\ +A_1 \end{array} \Big| \dfrac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} \Delta^{-1} y^{p-3} (\Delta x)^3 \ldots . & \end{array}$$

worin zwei Glieder von Δ^{-1} befreit erscheinen. Setzen wir nun, der einfachern Darstellung wegen, die Vorzahlen dieser Glieder:

$$\begin{aligned} -A_2 + A_1 &= B_1, \\ -A_3 + A_1 &= B_2, \\ -A_4 + A_1 &= B_3, \\ \ldots & \ldots \end{aligned}$$

u. s. w., so nimmt das erste Glied der Doppelreihe folgende Gestalt an: $B_1 \frac{p(p-1)}{1.2} \Delta^{-1} y^{p-2} (\Delta x)^2$. Wird der veränderliche Theil $\Delta^{-1} y^{p-2}$ dieses Gliedes nach (188.) in eine Reihe entwickelt und in obige Darstellung eingeführt, so erhält man folgende Reihe:

$$\begin{array}{rl} \Delta^{-1} y^p = \dfrac{y^{p+1}}{(p+1)\Delta x} - A_1 y^p + A_1 B_1 \dfrac{p}{h} y^{p-1} \Delta x + \begin{array}{r} B_2 \\ -\frac{3}{1} B_1 A_2 \end{array} & \Bigg| \dfrac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} \Delta^{-1} y^{p-3} (\Delta x)^3 \\ + \begin{array}{r} B_3 \\ -\frac{3.4}{1.2} B_1 A_2 \end{array} & \Bigg| \dfrac{p \ldots (p-3)}{1.2.3} \Delta^{-1} y^{p-4} (\Delta x)^4 \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

worin drei Glieder von Δ^{-1} befreit erscheinen. Nennt man nun vom dritten Gliede an die Vorzahlen der Reihe, C_1, C_2, C_3. ...., so erhält man folgende Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} B_2 - \frac{3}{1} B_1 A_1 &= C_1, \\ B_3 - \frac{3.4}{1.2} B_1 A_2 &= C_2, \\ B_4 - \frac{3.4.5}{1.2.3} B_1 A_3 &= C_3, \\ \ldots & \ldots \end{aligned}$$

Fahren wir fort, diese Reihe nach der angegebenen Methode zu behandeln, so ergiebt sich hieraus eine Entwicklung von folgender Gestalt, da die Ableitungsweise einen bestimmten Gang angenommen hat:

$$\Delta^{-1} y^p = \frac{y^{p+1}}{(p+1)\Delta x} - A_1 y^p + B_1 A_1 \frac{p}{1} y^{p-1}(\Delta x) + C_1 A_2 \frac{p(p-1)}{1.2} y^{p-2}(\Delta x)^2 + D_1 A_3 \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} y^{p-3}(\Delta x)^3 + \dots$$

oder auch, wenn wir, der bessern Übersicht wegen, $A_1 = Q_1$, $B_1 = Q_2$, $Q_3 = C_1$, $C_4 = D_1$ u. s. w. setzen,

$$189. \quad \Delta^{-1} y^p = \frac{y^{p+1}}{(p+1)\Delta x} - Q_1 y^p + A_1 Q_2 \frac{p}{1} y^{p-1} \Delta x + A_2 Q_3 \frac{p(p-1)}{1.2} y^{p-2}(\Delta x)^2 + A_3 Q_4 \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} y^{p-3}(\Delta x)^3 + A_4 Q_5 \frac{p\dots(p-3)}{1.2.3.4} y^{p-4}(\Delta x)^4 \dots$$

worin folgende Bedingungsgleichungen gelten:

$$190. \begin{cases} B_1 = -A_2 + A_1; \quad B_2 = -A_3 + A_1; \quad B_3 = -A_4 + A_1; \quad \dots \\ C_1 = B_2 - \frac{3}{1} B_1 A_1; \quad C_2 = B_3 - \frac{3.4}{1.2} B_1 A_2; \quad C_3 = B_4 - \frac{3.4.5}{1.2.3} B_1 A_3; \quad \dots \\ D_1 = C_2 - \frac{4}{1} C_1 A_1; \quad D_2 = C_3 - \frac{4.5}{1.2} C_1 A_2; \quad D_3 = C_4 - \frac{4.5.6}{1.2.3} C_1 A_3; \quad \dots \\ E_1 = D_2 - \frac{5}{1} D_1 A_1; \quad E_2 = D_3 - \frac{5.6}{1.2} D_1 A_2; \quad E_3 = D_4 - \frac{5.6.7}{1.2.3} D_1 A_3; \quad \dots \\ \dots \end{cases}$$

Man sieht, dafs die Bildungsweise, welche diesen Gleichungen zu Grunde liegt, zurücklaufend ist. Die Vorzahlen bestimmen sich durch folgende hieraus entnommene Darstellungen:

$$191. \begin{cases} Q_1 = +A_1, \\ Q_2 = -A_2 + Q_1, \\ Q_3 = -A_3 + Q_1 - \frac{3}{1} A_1 Q_2, \\ Q_4 = -A_4 + Q_1 - \frac{3.4}{1.2} A_2 Q_2 - \frac{4}{1} A_1 Q_3, \\ Q_5 = -A_5 + Q_1 - \frac{3.4.5}{1.2.3} A_3 Q_2 - \frac{4.5}{1.2} A_2 Q_3 - \frac{5}{1} A_1 Q_4, \\ \dots \\ Q_m = -\frac{1.2\dots m}{1.2\dots m} A_m + \frac{2.3\dots m}{1.2\dots(m-1)} A_{m-1} Q_1 - \frac{3.4\dots m}{1.2\dots(m-2)} A_{m-2} Q_2 + \dots \\ \qquad \dots - \frac{(m-1)m}{1.2} A_2 Q_{m-2} - \frac{m}{1} A_1 Q_{m-1}. \end{cases}$$

Werden nun hieraus die fraglichen Werthe berechnet, so zeigt sich, dafs die der Glieder, welche die geraden Potenzen der Zunahme Δx enthalten, verschwinden, und dafs also in dieser Darstellung nur die Glieder vorkommen, welche die ungeraden Potenzen von Δx enthalten. Dies führt zu folgender Darstellung für den ersten negativen Unterschied der Potenzialfunction:

$$\text{192.}\quad \Delta^{-1}y^p = \frac{y^{p+1}}{(p+1)\Delta x} - \frac{y^p}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{1}y^{p-1}\Delta x$$
$$- \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}y^{p-3}(\Delta x)^3$$
$$+ \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{p\ldots.(p-4)}{1.2.5}y^{p-5}(\Delta x)^5$$
$$- \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{p\ldots.(p-8)}{1.2\ldots.7}y^{p-7}(\Delta x)^7$$
$$+ \frac{5}{66}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{p\ldots.(p-8)}{1.2\ldots.7}y^{p-9}(\Delta x)^9$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Vorzahlen des ersten negativen Unterschiedes sind die Bernoullischen Zahlen. Eine nähere Erörterung über die Ableitung dieser Zahlen ist in meinem Differenzial-Calcul §. 147. Pag. 269 u. ff. gegeben. Die höhern negativen Unterschiede der Potenzialfunctionen wurden bis jetzt keiner weitern Untersuchung gewürdigt. Ihre Darstellung wird gewonnen, wenn man die Glieder dieser Gleichung mit Δ^{-1} vervielfacht, und dann jedes einzelne Glied selbst nach (192.) in eine Reihe entwickelt, und sümmtliche Entwickelungen zusammenzählt. Man findet

$$\text{193.}\quad \Delta^{-2}y^p = \frac{y^{p+2}}{(p+1)(p+1)(\Delta x)^2} - \frac{y^{p+1}}{(p+1)\Delta x} + \frac{5}{12}y^p - \frac{1}{12}py^{p-1}\Delta x$$
$$+ \frac{1}{120}\cdot\frac{p(p-1)}{1.2}y^{p-2}(\Delta x)^2$$
$$+ \frac{1}{120}\cdot\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}y^{p-3}(\Delta x)^3$$
$$- \frac{1}{252}\cdot\frac{p\ldots.(p-3)}{1\ldots.4}y^{p-4}(\Delta x)^4$$
$$- \frac{1}{252}\cdot\frac{p\ldots.(p-4)}{1\ldots.5}y^{p-5}(\Delta x)^5$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$194. \quad \Delta^{-3} y^p = \frac{p^{p+3}}{(p+1)(p+2)(p+3)(\Delta x)^3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{y^{p+2}}{(p+1)(p+2)(\Delta x)^2} + \frac{y^{p+1}}{(p+1)\Delta x}$$
$$- \frac{3}{8} y^p$$
$$+ \frac{19}{240} p y^{p-1} \Delta x$$
$$- \frac{1}{80} \cdot \frac{p(p-1)}{1.2} y^{p-2} (\Delta x)^2$$
$$- \frac{2}{315} \cdot \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} y^{p-3} (\Delta x)^3$$
$$+ \frac{1}{168} \cdot \frac{p \ldots (p-3)}{1.2.3.4} y^{p-4} (\Delta x)^4.$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

u. s. w. Ähnliche Entwickelungen haben wir bei den Darstellungen der negativen Aufstufungen §. 13., 18., 79. u. ff. erhalten. Die Gleichungen (192.), (193.), (194.) gelten nicht nur für eine positive ganze Potenzialgröfse, sondern auch für eine positive gebrochene und negative ganze und gebrochene Potenzialgröfse, also auch für $y^{-p} = \frac{1}{y^p}$, für $y^{\frac{q}{r}} = \sqrt[r]{y^q}$ und für $y^{-\frac{q}{r}} = \frac{1}{\sqrt[r]{y^q}}$, und es ist

$$195. \quad \Delta^{-1} \frac{1}{y^p} = - \frac{1}{(p-1) y^{p-1} \Delta x} - \frac{1}{2 y^p} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{p \Delta x}{y^{p+1}}$$
$$+ \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3} \cdot \frac{(\Delta x)^3}{y^{p+3}}$$
$$- \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{(\Delta x)^5}{y^{p+5}}$$
$$+ \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{p \ldots (p+6)}{1.2 \ldots 7} \cdot \frac{(\Delta x)^7}{y^{p+1}}$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

Vergleichen wir die Gleichungen (192.—195.) mit der Gleichung (142.), so bemerken wir leicht, dafs beide mit einander übereinstimmen, denn die Gleichungen (192.—195.) lassen sich aus (142.) ableiten, wenn dort allmälig —1, —2, —3, ... statt m gesetzt wird.

§. 38.

Negative Unterschiede der Facultäten.

Wir legen zuerst die Facultät

$$y(y+\Delta y)(y+2\Delta x) \ldots (y+(p-1)\Delta x) = y^{p|\Delta x}$$

zu Grunde, und gehen, um dieselbe darzustellen, von dem positiven Unterschiede (146.) aus, und vervielfachen diesen mit Δ^{-1}; dadurch entsteht:

$$y^{p|\Delta x} = p\,\Delta x\,\Delta^{-1}(y+\Delta x)^{p-1}\,\Delta x.$$

Wird hierin $p+1$ statt p und $y-\Delta x$ statt y gesetzt, so wird die Zahl der Factoren um einen vergröſsert, jeder Factor der Facultät aber um die Zunahme verkleinert, und es entsteht durch Messen von $p.\Delta x$ folgende Darstellung für den ersten negativen Unterschied einer Facultät:

$$169.\quad \Delta^{-1}y^{p|\Delta x} = \frac{(y-\Delta x)^{p+1|\Delta x}}{(p-1)\Delta x}.$$

Die Vorschrift dieser Gleichung ist: der erste negative Unterschied einer Facultät von p Factoren wird gewonnen, wenn man die Zahl der Factoren um einen vergröſsert, den höchsten Factor unverändert läſst, und die so vergröſserte Facultät mit der Zunahme und der vergröſserten Zahl der Factoren theilt. Vervielfacht man (196.) mit Δ^{-1}, so entsteht.

$$\Delta^{-2}y^{p|\Delta x} = \frac{\Delta^{-1}(y-\Delta x)^{p+1|\Delta x}}{(p+1)\Delta x}.$$

Wird nach der gegebenen Vorschrift $\Delta^{-1}(y-\Delta x)^{p+1|\Delta x}$ behandelt, so erhält man

$$\Delta^{-2}y^{p|\Delta x} = \frac{(y-2\Delta x)^{p+2|\Delta x}}{(p+2)(p+1)(\Delta x)^2}.$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$\Delta^{-3}y^{p|\Delta x} = \frac{\Delta^{-1}(y-2\Delta x)^{p+2|\Delta x}}{(p+2)(p+1)(\Delta x)^2} = \frac{(y-3\Delta x)^{p+3|\Delta x}}{(p+3)(p+2)(p+1)(\Delta x)^3},$$

und hieraus allgemein:

$$197.\quad \Delta^{-m}y^{p|\Delta x} = \frac{(y+m\Delta x)^{p+m|\Delta x}}{(p+1)(p+2)\dots(p+m)(\Delta x)^m} = \frac{(y-m\Delta x)^{p+m|\Delta x}}{(p+1)^{m|1}(\Delta x)^m}.$$

Wird mit $1.2.3\dots p$ gemessen, so entsteht

$$198.\quad \Delta^{-m}\frac{y^{p|\Delta x}}{1^{p|1}} = \frac{(y-m\Delta x)^{p+m|\Delta x}}{1^{p+m|1}(\Delta x)^m} = \frac{(y-m\Delta x)(y-(m-1)\Delta x)\dots y(y+\Delta x)\dots(y+(p-1)\Delta x)}{1.2.3\dots p(p+1)\dots(p+m)(\Delta x)^m}.$$

Auf gleiche Weise gewinnt man die negativen Unterschiede der Facultät $\frac{1}{y(y+\Delta x)\dots(y+(p-1)\Delta x)} = \frac{1}{y^{p|\Delta x}} = y^{-p|\Delta x}$. Geht man nämlich von dem ersten positiven Unterschiede §. 30.

$$\Delta y^{-p|\Delta x} = \frac{-p\Delta x}{y^{p+1|\Delta x}}$$

aus, und vervielfacht mit Δ^{-1}, so wird

$$y^{-p|\Delta x} = -p\,\Delta x\,\Delta^{-1}\frac{1}{y^{p+1|\Delta x}};$$

setzt man hierin $p-1$ statt p, und theilt mit $-p\Delta x$, so gewinnt man für den ersten negativen Unterschied folgendes Resultat:

$$\Delta^{-1}\frac{1}{y^{p|\Delta x}} = -\frac{1}{y^{p-1|\Delta x}(p-1)\Delta x}.$$

Die Vorschrift, welche in dieser Gleichung enthalten ist, deutet sich leicht. Das Vervielfachen mit Δ^{-1} führt zu dem zweiten negativen Unterschiede:

$$\Delta^{-2}\frac{1}{y^{p|\Delta x}} = -\frac{1}{(p-1)\Delta x}.\Delta^{-1}\frac{1}{y^{p-1|\Delta x}} = \frac{1}{(p-1)(p-2)(\Delta x)^2}.\frac{1}{y^{p-2|\Delta x}}.$$

Auf gleiche Weise erhält man den dritten negativen Unterschied:

$$\Delta^{-3}\frac{1}{y^{p|\Delta x}} = \frac{1}{(p-1)(p-2)(\Delta x)^2}.\Delta^{-1}\frac{1}{y^{p-2|\Delta x}} = -\frac{1}{(p-1)(p-2)(p-3)y^{p-3|\Delta x}(\Delta x)^3},$$

Hieraus erkennt sich das allgemeine Gesetz leicht. Es ist

$$199. \quad \Delta^{-m}\frac{1}{y^{p|\Delta x}} = (-1)^m\frac{1}{(p-1)^{m|-1}y^{p-m|\Delta x}(\Delta x)^m}.$$

Wird mit der Facultät $1.2.3....p$ vervielfacht, so entsteht

$$200. \quad \Delta^{-m}\frac{1^{p|1}}{y^{p|\Delta x}} = (-1)^m\frac{1^{p|1}}{(p-1)^{m|-1}y^{p-m|\Delta x}} = (-1)^m\frac{1^{p-m-1|1}.p}{y^{p-m|\Delta x}(\Delta x)^m},$$

oder in entwickelter Darstellung:

$$201. \quad \Delta^{-m}\frac{1.2.3....p}{y(y+\Delta x)....(y+(p-1)\Delta x)}$$

$$= (-)^m\frac{1.2.3....p}{(p-1)(p-2)....(p-m)y(y+\Delta x)....(y+(p-m-1)\Delta x)(\Delta x)^m}.$$

§. 39.

Negative Unterschiede der Exponentialgröfsen.

Die negativen Unterschiede der Exponentialgröfsen leiten sich leicht aus den positiven ab. Es ist nach §. 32.:

$$\Delta a^y = (a^{\Delta x}-1)a^y.$$

Wird diese Gleichung mit Δ^{-1} vervielfacht und durch $a^{\Delta x}-1$ gemessen, so entsteht:

$$\Delta^{-1}a^y = \frac{a^y}{a^{\Delta x}-1}.$$

Der zweite Unterschied wird durch Vervielfachen mit Δ^{-1} gewonnen, und es ist:

$$\Delta^{-2}a^y = \frac{1}{a^{\Delta x}-1}\Delta^{-1}a^y = \frac{1}{a^{\Delta x}-1}.\frac{a^y}{a^{\Delta x}-1} = \frac{a^y}{(a^{\Delta x}-1)^2}.$$

Eben so ist

$$\Delta^{-3}a^y = \frac{\Delta^{-1}a^y}{(a^{\Delta x}-1)^2} \quad \frac{a^y}{(a^{\Delta x}-1)^3}$$

u. s. w. Hieraus allgemein:

$$202. \quad \Delta^{-m} a^y = \frac{a^y}{(a^{\Delta x}-1)^m}.$$

Eben so hat man aus §. 32. die Gleichung für die Function

$$\Delta \frac{1}{a^y} = \frac{1-a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}.$$

Wird mit Δ^{-1} vervielfacht, und der hiedurch gewonnene Ausdruck $\Delta^{-1} a^y$ von seinem Factor befreit, so gewinnt man

$$\Delta^{-1} \frac{1}{a^y} = \frac{a^{\Delta x}}{1-a^{\Delta x}} \cdot \frac{1}{a^y}.$$

Wird diese Gleichung mit Δ^{-1} vervielfacht, so gewinnt man den zweiten negativen Unterschied, und es wird

$$\Delta^{-2} \frac{1}{a^y} = \frac{a^{\Delta x}}{1-a^{\Delta x}} \Delta^{-1} \frac{1}{a^y} = \frac{a^{2\Delta x}}{(1-a^{2\Delta x})^2} \cdot \frac{1}{a^y}.$$

Eben so erhält man

$$\Delta^{-3} \frac{1}{a^y} = \frac{a^{3\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^3} \cdot \frac{1}{a^y},$$

u. s. w. Hieraus allgemein

$$203. \quad \Delta^{-m} \frac{1}{a^y} = \frac{a^{m\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^m} \cdot \frac{1}{a^y}.$$

§. 40.

Negative Unterschiede für die Functionen des Sinus und Cosinus.

Die negativen Unterschiede der Functionen des Sinus und Cosinus leiten sich aus ihren positiven Unterschieden und wechselweise von einander ab. Wird die Gleichung (172.) mit Δ^{-1} vervielfacht, so geht sie über in:

$$\sin y = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \Delta^{-1} \cos\left(y + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Wird hierin $y - \frac{\Delta x}{2}$ statt y gesetzt und mit $2 \sin \frac{\Delta x}{1}$ gemessen, so entsteht der erste negative Unterschied des Cosinus, und es ist

$$204. \quad \Delta^{-1} \cos y = \frac{\sin\left(y - \frac{\Delta x}{2}\right)}{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}.$$

Geht man von der Gleichung (173.) §. 33. aus, und behandelt sie auf dieselbe Weise, so erhält man den ersten negativen Unterschied für den Sinus, und es ist

$$205. \qquad \Delta^{-1}\sin y = -\frac{\cos\left(y-\frac{\Delta x}{x}\right)}{2\sin\frac{\Delta x}{2}}.$$

Aus der wechselseitigen Verbindung der vorstehenden Gleichungen mit einander ergeben sich die höhern negativen Unterschiede.

Wird (205.) mit Δ^{-1} vervielfacht, so entsteht

$$\Delta^{-2}\sin y = -\frac{1}{2\sin\frac{\Delta x}{2}}\Delta^{-1}\cos\left(y-\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2^2\left(\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^2}\sin(y-\Delta x).$$

Eben so

$$\Delta^{-3}\sin y = \frac{\cos\left(y-\frac{3\Delta x}{2}\right)}{2^3\sin\frac{\Delta x}{2}},$$

$$\Delta^{-4}\sin y = \frac{\sin(y-2\Delta x)}{2^4\left(y-\frac{\Delta x}{2}\right)^4}.$$

Hieraus allgemein

$$206. \quad \begin{cases} \Delta^{-4m}\sin y = (-1)^{2m}\dfrac{\sin(y-2m\Delta x)}{2^{4m}(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^{4m}}, \\ \Delta^{-4m-1}\sin y = (-1)^{2m+1}\dfrac{\cos\left(y-\frac{2m+1}{2}\Delta x\right)}{2^{4m+1}(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^{4m+1}}, \\ \Delta^{-4m-2}\sin y = (-1)^{2m+1}\dfrac{\sin(y-(2m+1)\Delta x)}{2^{4m+2}(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^{4m+2}}, \\ \Delta^{-4m-3}\sin y = (-1)^{2m+2}\dfrac{\cos\left(y-\frac{4m+3}{2}\Delta x\right)}{2^{4m+3}(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^{4m+3}}. \end{cases}$$

Auf gleiche Weise gewinnen sich die negativen Unterschiede für den Cosinus.

$$\Delta^{-2}\cos y = -\frac{\cos(y-\Delta x)}{2^2\left(\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^2},$$

$$\Delta^{-3}\cos y = -\frac{\sin\left(y-\frac{3\Delta x}{2}\right)}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3},$$

u. s. w. Allgemein:

$$207. \quad \Delta^{-4m}\cos y = (-1)^{2m}\frac{\cos(y-2m\Delta x)}{2^{4m}(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^{4m}},$$

$$207.\quad \begin{cases} \Delta^{-4m-1}\cos y = (-1)^{2m}\dfrac{\sin\left(y-\frac{4m+1}{2}\Delta x\right)}{2^{4m+1}(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^{4m+1}}, \\ \Delta^{-4m-2}\cos y = (-1)^{2m+1}\dfrac{\cos(y-(2m+1)\Delta x)}{2^{4m+2}(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^{4m+2}}, \\ \Delta^{-4m-3}\cos y = (-1)^{2m+1}\dfrac{\sin\left(y-\frac{4m+3}{2}\Delta x\right)}{2^{4m+3}(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^{4m+3}}. \end{cases}$$

Anm. Da die Darstellung der negativen Unterschiede der Logarithmen keine einfache Darstellung zulassen, so übergehen wir sie.

II. Darstellung der Unterschiede der einfachen Functionen durch Differenziale.

A. Darstellung der positiven Unterschiede der einfachen Functionen.

§. 41.

Formelle Darstellung der positiven Unterschiede.

Wie wir die Aufstufungen der einfachen Functionen durch Differenziale mittelst der Taylor'schen Reihe gewonnen haben: so werden wir auch die Darstellung der Unterschiede der Functionen durch sie gewinnen können. Die Taylor'sche Reihe dient bekanntlich dazu, um eine Function, die eine Zunahme erhält, durch die steigenden Potenzen der Zunahme und der Differenziale darzustellen. Bezeichnen wir die ursprüngliche Function durch X, und die durch Zunahme gewonnene durch X_1, so ist

$$X_1 = X + \frac{\Delta x\,\partial X}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2\,\partial^2 X}{1.2.(\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3\,\partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3} + \dots$$

Nun ist der Unterschied einer einfachen Function, nach (133.):

$$\Delta X = X_1 - X,$$

also auch, wenn auf der rechten Seite die Function X abgezogen wird,

$$208.\quad \Delta X = \frac{\Delta x\,\partial X}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2.\partial^2 X}{1.2.(\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3\,\partial^3 X}{1.2,3.(\partial x)^3} + \dots$$

Scheidet in der entwickelten Reihe die Function x, die in jedem Gliede vorkommt, aus, und berücksichtigt man, daſs folgende Entwickelung

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} \dots$$

ganz mit der entwickelten Darstellung für X_1 zusammenfällt, wenn $y = \frac{\Delta x . \partial}{\partial x}$ gesetzt wird, so hat man demnach, als ersten negativen Unterschied, auch folgende Darstellung:

$$209. \quad \Delta X = e^{\frac{\Delta x . \partial}{\partial x}} X - X = \left(e^{\frac{\Delta x . \partial}{\partial x}} - 1\right) X;$$

e ist die bekannte Zahl, deren Logarithme der Einheit gleich ist.

Die Gleichung (209.) ist Vorschrift für die Ableitung der höheren positiven Unterschiede. Vervielfachen wir mit Δ, so ist

$$\Delta^2 X = \left(e^{\frac{\Delta x . \partial}{\partial x}} - 1\right) \Delta X = \left(e^{\frac{\Delta x . \partial}{\partial x}} - 1\right)\left(e^{\frac{\Delta x . \partial}{\partial x}} - 1\right) X = \left(e^{\frac{\Delta x . \partial}{\partial x}} - 1\right)^2 X.$$

Aus dem zweiten Unterschiede erhalten wir den dritten, wenn wir jenen eben so wie den ersten behandeln. Es ist also

$$\Delta^3 X = \left(e^{\frac{\Delta x}{\partial x}} - 1\right)^2 \Delta X = (e^{\Delta x} - 1)^2 (e^{\Delta x} - 1) X = \left(e^{\frac{\Delta x . \partial}{\partial x}} - 1\right)^3 X,$$

$$\Delta^4 X = \left(e^{\frac{\Delta x . \partial}{\partial x}} - 1\right)^4 X, \text{ etc.}$$

und hieraus, da diese Entwickelung einem bestimmten Gesetze unterliegt, welches sich leicht erkennen läfst,

$$210. \quad \Delta^m X = \left(e^{\frac{\Delta x . \partial}{\partial x}} - 1\right)^m X.$$

§. 42.

Reelle oder entwickelte Darstellung der positiven Unterschiede.

Die so eben mitgetheilte Bildungsweise ist nur formell; wir suchen nun auch eine entwickelte Darstellung. Zu dem Ende gehen wir von der Reihe (208.) aus, und geben ihr eine bequemere Gestalt, indem wir die Nenner-Facultäten der Reihe nach A_1, A_2, A_3, ... nennen: danach ist

$$\Delta X = \left(A_1 \frac{\Delta x . \partial}{\partial x} + A_2 \frac{(\Delta x)^2 . \partial^2}{(\partial x)^2} + A_3 \frac{(\Delta x)^3}{(\partial x)^3} + \dots\right) X.$$

Vervielfachen wir mit Δ, und stellen den Ausdruck ΔX, der auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens entsteht, durch eine Reihe dar, so wird

$$\Delta^2 X = \left(A_1 \frac{\Delta x . \partial}{\partial x} + A_2 \frac{(\Delta x)^2 . \partial^2}{(\partial x)^2} + \dots\right)\left(A_1 \frac{\Delta x . \partial}{\partial x} + A_2 \frac{(\Delta x)^2 \partial^2}{(\partial x)^2} + \dots\right) X.$$

Wird die Vervielfachung der in Klammern eingeschlossenen Reihen wirklich ausgeführt, so entsteht

$$\Delta^2 X = A_1 A_1 \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X}{(\partial x)^2} + \begin{matrix} A_1 . A_2 \\ A_2 . A_1 \end{matrix} \Bigg| \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X}{(\partial x)^3} + \begin{matrix} A_1 . A_3 \\ A_2 . A_2 \\ A_3 . A_1 \end{matrix} \Bigg| \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X}{(\partial x)^4} + \ldots .$$

Nennt man die Vorzahlen in dieser Reihe B_1, B_2, B_3, B_4, ..., so unterliegen sie folgendem Bildungsgesetze:

$$B_p = \begin{matrix} A_1 . A_p \\ A_2 . A_{p-1} \\ A_3 . A_{p-2} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ A_p . A_1 . \end{matrix}$$

Jede Vorzahl besteht aber aus Producten von Nenner-Facultäten; der dritte Unterschied wird auf dieselbe Art aus dem zweiten abgeleitet, wie der zweite aus dem ersten abgeleitet wurde. Die vorstehende Gleichung giebt also das Ableitungsgesetz für die Vorzahlen des spätern Unterschiedes aus den hervorgehenden. Bringt man nun die Nenner-Facultäten unter einander in Übereinstimmung, so gewinnt man dieselbe Darstellung für die Vorzahlen der positiven Unterschiede durch Differenziale, wie man sie schon §. 27. u. f. gefunden hat. Es entstehen daher folgende Gleichungen, und zwar aus (137.):

$$211. \quad \Delta_m X = S\left(\frac{1.2.3....m}{{}^m P_{(m;\,1!)}}\right) \frac{(\Delta x)^m \partial^m X}{1.2.3....m(\partial x)^m}$$
$$+ S\left(\frac{1.2.3....(m+1)}{{}^{m+1} P_{(m;\,1,\,2)!}}\right) \frac{(\Delta x)^{m+1} \partial^{m+1} X}{1.2.3....(m+1)\partial x)^{m+1}}$$
$$+ S\left(\frac{1.2.3....(m+2)}{{}^{m+2} P_{(m;\,1,\,2,\,3)!}}\right) \frac{(\Delta x)^{m+2} \partial^{m+2} X}{1.2.3....(m+2)(\partial x)^{m+2}}$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

aus (139.):

$$212. \quad \Delta^m X = 1.2.3....m\, SC'_{(0;\,1,\,2,\,....\,m)} \frac{(\Delta x)^m \partial^m X}{1.2....m(\partial x)^m}$$
$$+ 1.2.3....m\, SC'_{(1;\,1,\,2,\,....\,m)} \frac{(\Delta x)^{m+1} \partial^{m+1} X}{1.2.3....(m+1)(\partial x)^{m+1}}$$
$$+ 1.2.3....m\, SC'_{(2;\,1,\,2,\,....\,m)} \frac{(\Delta x)^{m+2} \partial^{m+2} X}{1.2.3....(m+2)(\partial x)^{m+2}}$$
$$+ 1.2.3....m\, SC'_{(3;\,1,\,2,\,....\,m)} \frac{(\Delta x)^{m+3} \partial^{m+3} X}{1.2.3....(m+3)(\partial x)^{m+3}}$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

aus (142.) endlich:

$$213.\quad \Delta^m X = \frac{(\Delta x)^m\,\partial^m X}{(\partial x)^m} + \frac{m}{1.2}\cdot\frac{(\Delta x)^{m+1}\,\partial^{m+1} X}{(\partial x)^{m+1}}$$
$$+ \frac{m(3m+1)}{1.2.3\,4}\cdot\frac{(\Delta x)^{m+1}\,\partial^{m+2} X}{(\partial x)^{m+2}}$$
$$+ \frac{m(m+1)m}{1.2.1.2.3.4}\cdot\frac{(\Delta x)^{m+3}\,\partial^{m+3} X}{(\partial x)^{m+3}}$$
$$+ \frac{15m^3(m+2)+5m^2-2m}{2.1.2.3.4.1.2.3.4.5}\cdot\frac{(\Delta x)^{m+4}\,\partial^{m+4} X}{(\partial x)^{m+4}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Ableitung einiger speciellen Fälle führt zu folgender Zusammenstellung:

$$254.\quad \left\{\begin{array}{lllll}
\Delta X = & \frac{\Delta x.\partial X}{1.\partial x} + & \frac{(\Delta x)^2\,\partial^2 X}{1.2(\partial x)} + & \frac{(\Delta x)^3\,\partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3} + \cdots \\
\Delta^2 X = & 1.2.\frac{(\Delta x)^2\,\partial^2 X}{1.2(\partial x)^2} + & 6.\frac{(\Delta x)^3\,\partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3} + & 14.\frac{(\Delta x)^4\,\partial^4 X}{1.2\,2.4(\Delta x)^4} + \cdots \\
\Delta^3 X = & 6.\frac{(\Delta x)^3\,\partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3} + & 36.\frac{(\Delta x)^4\,\partial^4 X}{1.2.3.4(\partial x)^4} + & 150.\frac{(\Delta x)^5\,\partial^5 X}{1.2.3.4.5(\partial x)^5} + \cdots \\
\Delta^4 X = & 24.\frac{(\Delta x)^4\,\partial^4 X}{1\ldots4(\partial x^4} + & 200.\frac{(\Delta x)^5\,\partial^5 X}{1.2\ldots5(\partial x)^5} + & 1560.\frac{(\Delta x)^6\,\partial^6 X}{1.2\ldots6(\partial x)^6} + \cdots \\
\Delta^5 X = & 120.\frac{(\Delta x)^5\,\partial^5 X}{1.2\ldots5(\partial x)^5} + & 1800.\frac{(\Delta x)^6\,\partial^6 X}{1.2\ldots6(\partial x)^6} + & 16800.\frac{(\Delta x)^7\,\partial^7 X}{1.2\ldots7(\partial x)^7} + \cdots
\end{array}\right.$$

B. Darstellung der negativen Unterschiede der einfachen Functionen.

§. 43.

Formelle Darstellung der negativen Unterschiede.

Die formelle Darstellung der negativen Unterschiede der einfachen Functionen durch Differenziale leiten sich aus der Gleichung (209.) leicht ab, wenn man mit Δ^{-1} vervielfacht; es entsteht dann

$$X = \left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}} - 1\right)\Delta^{-1}X,$$

und hieraus, wenn der mit $\Delta^{-1}X$ verbundene Factor weggebracht wird,

$$215.\quad \Delta^{-1}X = \frac{X}{\left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}} - 1\right)}.$$

Wird diese Gleichung mit Δ^{-1} vervielfacht und nach der Vorschrift, die in ihr liegt, behandelt, so entsteht der zweite negative Unterschied auf folgende Weise:

$$\Delta^{-2}X = \frac{1}{\left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}-1\right)}\Delta^{-1}X = \frac{1}{\left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}-1\right)}\cdot\frac{1}{\left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}-1\right)}X,$$

also

$$\Delta^{-2}X = \frac{X}{\left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}-1\right)^2}.$$

Eben so gewinnt man den dritten negativen Unterschied, und es wird

$$\Delta^{-3}X = \frac{\Delta^{-1}X}{\left(e^{\frac{\Delta x.\partial x}{\partial x}}-1\right)^2} = \frac{X}{\left(e^{\frac{\Delta x.\partial x}{\partial x}}-1\right)^3}.$$

Der einmal betretene Weg führt zum weitern Ziele und es entsteht:

$$216. \quad \Delta^{-m}X = \frac{X}{\left(e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}-1\right)^m},$$

oder auch, wenn man

$$e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}-1 = \frac{\Delta x.\partial}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2.\partial^2}{1.2(\partial x)^2}+\frac{(\Delta x)^3.\partial^3}{1.2.3(\partial x)^3}+\dots.$$

setzt,

$$217. \quad \Delta^{-m}X = \frac{X}{\left(\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2.\partial^2}{1.2.\partial x}+\frac{(\Delta x)^3.\partial^3}{1.2.3.(\partial x)}+\dots\right)^3}.$$

§. 44.

Entwickelte Darstellung der negativen Unterschiede.

Um eine entwickelte Darstellung für die negativen Unterschiede der einfachen Functionen durch Differenziale zu gewinnen, gehen wir von der Gleichung (208.) aus, und vervielfachen sie mit Δ^{-1}; dadurch entsteht:

$$X = \frac{\Delta x.\partial}{\partial x}\Delta^{-1}X+\frac{(\Delta x)^2\partial^2}{1.2.(\partial x)^2}\Delta^{-1}X+\frac{(\Delta x)^3.\partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3}\Delta^{-1}X+\dots.$$

Um $\Delta^{-1}X$ allein zu erhalten, messen wir mit $\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}$ die Gleichung und bringen Δ^{-1} auf eine Seite, dies führt zu folgender Darstellung:

$$218. \quad \Delta^{-1}X = \frac{(\Delta x)^{-1}\partial^{-1}X}{(\partial x)^{-1}}-\frac{\Delta x.\partial}{1.2.\partial x}\Delta^{-1}X-\frac{(\Delta x)^2\partial^2 X}{1.2.3.(\partial x)^2}\Delta^{-1}X.$$

In dieser Gleichung erscheint ein Glied von Δ^{-1} befreit. Die Gleichung selbst bildet die Vorschrift, nach welcher allmählig alle Glieder von Δ^{-1} befreit werden können.

Wird nämlich in dem Gliede $\frac{\Delta x.\partial}{1.2.\partial x}\Delta^{-1}X$ der Ausdruck Δ^{-1} in eine Reihe entwickelt, so hat man

$$-\frac{\Delta x.\partial\Delta^{-1}X}{1.2.\partial x} = -\frac{1}{1.2}X + \frac{1(\Delta x)^2\partial^2\Delta^{-1}X}{1.2.1.2.(\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3\partial^3\Delta^{-1}X}{1.2.1.2.3.(\partial x)^3} + \dots$$

und dann in (207.) eingeführt, so entsteht

$$\Delta^{-1}X = \frac{(\Delta x).\partial^{-1}}{(\partial x)^{-1}}X - \frac{X_{\prime}}{2} - \left.\begin{matrix}\frac{1}{3}\\ +\frac{1}{2}\end{matrix}\right| \frac{(\Delta x)^2.\partial\Delta^{-1}X}{1.2.(\partial x)} - \left.\begin{matrix}\frac{1}{4}\\ +\frac{1}{12}\end{matrix}\right| \frac{(\Delta x)^3.\partial\Delta^{-1}X}{1.2.3.(\partial x)^3} + \dots$$

Vergleichen wir diese Entwickelung mit der in (35.) von den negativen Unterschieden der Potenzial-Gröfsen gegebenen, so erkennen wir sogleich ihre Identität. Es wäre daher überflüssig die weitere Entwickelung ausführen zu wollen, indem wir nur eine Wiederholung des schon einmal Gesagten geben müfsten. Zu bemerken ist jedoch, dafs der Ausdruck $\frac{\partial^{-1}X}{(\partial x)^{-1}}$ (das negative Differenzial) das Integral der Function X, also $\int X\partial x$ bedeutet. Diese Bemerkungen führen zu folgenden Darstellungen:

$$219. \quad \Delta^{-1}X = \int\frac{X\partial x}{\Delta x} - \frac{1}{2}X + \frac{1}{6}.\frac{1}{2}.\frac{\Delta x\partial X}{\partial x}$$
$$- \frac{1}{30}.\frac{1}{4}.\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3}$$
$$+ \frac{1}{42}.\frac{1}{6}.\frac{(\Delta x)^5\partial^5 X}{1.2.\dots(\partial x)^5}$$
$$- \frac{1}{30}.\frac{1}{8}.\frac{(\Delta x)^7\partial^7 X}{1.2.\dots7(\partial x)^7}$$
$$+ \frac{5}{66}.\frac{1}{10}.\frac{(\Delta x)^9\partial^9 X}{1.2.\dots9(\partial x)^9}$$
$$\dots\dots\dots$$

$$220. \quad \Delta^{-2}X = \int^2\frac{X(\partial x)^2}{(\Delta x)^2} - \int\frac{X\partial x}{\Delta x} + \frac{5}{12}X - \frac{1}{12}.\frac{\Delta X.\partial X}{1.\partial x}$$
$$+ \frac{1}{120}.\frac{(\Delta x)^2\partial^2 X}{1.2(\partial x)^2}$$
$$+ \frac{1}{120}.\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3}$$
$$- \frac{1}{252}.\frac{(\Delta x)^4\partial^4 X}{1.\dots4(\partial x)^4}$$
$$- \frac{1}{252}.\frac{(\Delta x)^5\partial^5 X}{1.2.\dots5(\partial x)^5}$$
$$\dots\dots\dots$$

$$221. \quad \Delta^{-3} X = \int^3 \frac{X(\partial x)^3}{(\Delta x)^3} - \frac{3}{2}\int^2 \frac{X(\partial x)^2}{(\Delta x)^2} + \int \frac{X\partial x}{\Delta x} - \frac{3}{8} X$$
$$+ \frac{19}{240} \cdot \frac{\Delta x \partial X}{1.\partial x}$$
$$- \frac{1}{80} \cdot \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.2(\partial x)^2}$$
$$- \frac{2}{315} \cdot \frac{(\Delta x)^3 \Delta^3 X}{1.2.3(\partial x)^3}$$
$$+ \frac{1}{168} \cdot \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X}{1 \ldots 4(\partial x)^4}$$
$$+ \frac{1}{840} \cdot \frac{(\Delta x)^5 \partial^5 X}{1.2 \ldots 5(\partial x)^5}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

u. s. w. Wir bemerken aber, dafs die Gleichung (211.) nur für positive Unterschiede gilt, die Gleichung (212.) und (213.) aber für positive und negative Unterschiede. Das allgemeine Bildungsgesetz tritt besonders dentlich aus der Gleichung (202.) hervor, indem sich die hier gefundenen Gleichungen unmittelbar aus ihr durch die Substitutionen von -1, -2, -3, ... statt m ergeben. Diese Gleichung enthält das allgemeine Bildungsgesetz, wovon die bekannte Bernoullische Reihe ein besonderer Fall ist.

Von den Abstufungen.

§. 45.

Nach den in §. 1. aufgestellten Grundzügen besteht das Wesen der abstufenden Functionen darin, dafs die um die Zunahme veränderte Function von der ursprünglichen abgezogen wird. Demnach ist also:

$$222. \quad \psi f x = f x - f(x + \Delta x) = -(f(x + \Delta x) - f x).$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit (133.), so erkennt man leicht, dafs die Abstufung einer Function mit ihrem negativen Unterschiede vollkommen zusammenfällt. Somit sind die Abstufungen auf die Unterschiede zurückgeführt und eine weitere Untersuchung dieses Gegenstandes würde, mit Ausnahme der Functionen für den Sinus und Cosinus, bei denen eine veränderte Anordnung einen veränderten Zeichenwechsel herbeiführt, eine Wiederholung des schon in der Lehre von den Unterschieden Mitgetheilten sein. Deswegen übergehen wir die Entwickelung der abstufenden Func-

tionen ganz, und wenden uns zur Betrachtung des Verfahrens, das wir bei den bisherigen Entwicklungen beobachteten.

§. 46.

Bemerkungen über die Ableitung der aufsteigenden Functionen.

Wir haben bei den Aufstufungen und Unterschieden der Functionen die nämlichen Ableitungs-Gesetze im Allgemeinen aufgefunden, wie sie bei dem Binomium vorkommen, was aus den Entwicklungen (10., 3., 14., 28., 31. und 32.) und (121., 128., 130., 131. und 132.) hervorgeht. Wir haben die gefundenen Ableitungsgesetze an die des Binomiums geknüpft, weil diese schon bekannt sind, und sich das Unbekannte leicht an das Bekannte anknüpfen läſst. Die Anreihung dieser Gesetze an die des Binomiums ist jedoch nicht wesentlich, sondern nur zufällig, und man erkennt bei näherer Untersuchung leicht, daſs alle diese Entwicklungen, die wir im Allgemeinen mit dem Namen Ableitungen bezeichnet haben, gleichen Gesetzen unterliegen, ja selbst nur specielle Fälle eines allgemeinen Gesetzes sind, von denen die entwickelte Darstellung des Binomiums am bekanntesten ist, also zur Grundlage sich besten eignet.

Stellen wir zur deutlicheren Übersicht die Haupt-Entwicklungen zusammen, so ist für die Aufstufungen:

$$223. \quad \begin{cases} \zeta^m X_0 = X_0 + m X_1 + \frac{m(m-1)}{1.2} X_2 + \ldots + X_m \\ \zeta^{-m} X_0 = X_{-m} - \frac{m}{1} X_{-m-1} + \frac{m(m+1)}{1.2} X_{-m-2} - \ldots \\ X_m = \zeta^m X_0 - \frac{m}{1} \zeta^{m-1} X_0 + \frac{m(m-1)}{1.2} \zeta^{m-2} X_0 - \ldots (-1) X_0 \\ X_{-m} = \zeta^{-m} X_0 + \frac{m}{1} \zeta^{-m-1} X_0 + \frac{m(m+1)}{1.2} \zeta^{-m-2} X_0 + \ldots ; \end{cases}$$

für die Unterschiede:

$$224. \quad \begin{cases} \Delta^m X_0 = X_m - \frac{m}{1} X_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} X_{m-2} + \ldots (-1)^m X_0 \\ \Delta^{-m} X_0 = X_{-m} + \frac{m}{1} X_{-m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} X_{-m-2} + \ldots \\ X_m = X_0 + \frac{m}{1} \Delta X_0 + \frac{m(m-1)}{1.2} \Delta^2 X_0 + \ldots \\ X_{-m} = X_0 + \frac{m}{1} \Delta^1 X_0 + \frac{m(m-1)}{1.2} \Delta^2 X_0 - \ldots \end{cases}$$

Die Unabhängigkeit des Bildungsgesetzes, welches diesen Entwicklungen zu Grunde liegt, von dem des Binomiums wird sich dadurch insbesondere noch zeigen, dafs die hier gegebenen Darstellungen bei weitem allgemeiner sind, als die des Binomiums.

Die gefundenen Ableitungen zerfallen nämlich in zwei Classen: in die für ein positives m und in die für ein negatives. Die Vorzahlen, welche in ihnen vorkommen, sind die numerischen Ausdrücke der Verbindungen zu 1, 2, 3, ... Elementen aus m Elementen, so dafs die Glieder der Entwicklungen für die positiven m versehen sind mit den Verbindungen ohne Wiederholungen, die Glieder der Entwicklungen für negative m mit den Verbindungen mit Wiederholungen. Hierbei ist es ganz gleichgültig, ob m als Exponent, oder als Stellenzahl erscheint.

Hieran schliefst sich noch folgende Bemerkung: Erscheint m in der zu entwickelnden Function als Exponent, wie in $\zeta^m X_0$, $\zeta^{-m} X_0$; $\Delta^m X_0$, $\Delta^{-m} X_0$, so findet es sich in der entwickelten Darstellung als Stellenzahl; erscheint es in der zu entwickelnden Function als Stellenzahl wie in X_m, X_{-m}, so findet es sich in den entwickelten Darstellungen als Exponent, und zwar des Geschäftes, welches an der ursprünglichen Function vorgenommen wurde: eine Eigenschaft, welche dem Binomium nicht zukommt.

Vergleichen wir mit diesen Entwicklungen die des Binomiums in folgender Gestalt:

$$(x+\Delta x)^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^m$$

und

$$(x+\Delta x)^{-m} = x^{-m} - \frac{m}{1} x^{-m-1} \Delta x + \frac{m(m+1)}{1.2} x^{-m-2} (\Delta x)^2 - \ldots,$$

so ist die Überstimmung der Vorzahlen mit denen der oben gegebenen Entwicklungen ähnlicher Natur nicht zu verkennen. Eben so deutlich geht aber daraus hervor, dafs sie nicht so allgemein ist, und nicht so viele Veränderungen zuläfst, als die gegebenen. Denn die Elemente, worauf es beruht, sind nicht veränderlich, also auch keines Wachsthums oder keiner Zunahme fähig. Ja es zeigt sich sogar, dafs das Binomium nichts anderes als ein specieller Fall dieser allgemeinen Ableitungen ist, wie sich aus Folgendem ergeben wird. Legen wir nämlich die Exponential-Glei-

chung (63.) mit ihrem Summen-Ausdrucke

$$a^x + \frac{m}{1} a^{x+\Delta x} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{x+2\Delta x} + \ldots + a^{x+m\Delta x} = (1+a^{\Delta x})^m . a^x$$

zu Grunde, und messen auf beiden Seiten durch a^x, so entsteht:

$$1 + \frac{m}{1} a^{\Delta x} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{2\Delta x} + \ldots + a^{m\Delta x} = (1+a^{\Delta x})^m.$$

Setzen wir hierin $a = \frac{b}{c}$, was geschehen kann, da a jeden beliebigen Werth bedeutet, so geht obige Gleichung in folgende über:

$$1 + \frac{m}{1}\left(\frac{b}{c}\right)^{\Delta x} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{b}{c}\right)^{2\Delta x} + \ldots + \left(\frac{b}{c}\right)^{m\Delta x}$$

$$= \left[1 + \left(\frac{b}{c}\right)^{\Delta x}\right]^m = \left[\left(\frac{c+b}{c}\right)^{\Delta x}\right]^m.$$

Da aber $\left[\left(\frac{c+b}{c}\right)^{\Delta x}\right]^m = \frac{(c+b)^{m\Delta x}}{c^{m\Delta x}}$ ist, so erhalten wir hieraus, wenn die ganze Gleichung mit $c^{m\Delta x}$ vervielfacht und die Reduction der Exponenten vorgenommen wird:

$$225. \quad c^{m\Delta x} + \frac{m}{1} c^{(m-1)\Delta x} . b^{\Delta x} + \frac{m(m-1)}{1.2} c^{(m-2)\Delta x} b^{2\Delta x} + \ldots b^{m\Delta x} = (c+b)^{m\Delta x},$$

oder, wenn $\Delta x = 1$ gesetzt wird,

$$226. \quad (c+b)^m = c^m + \frac{m}{1} c^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.2} c^{m-2} b^2 + \ldots + b^m.$$

Diese Gleichung ist der binomische Lehrsatz in der einfachsten Gestalt.

Die Allgemeinheit der gegebenen Entwicklungen zeigt sich ferner dadurch, dafs sich der Taylorsche Lehrsatz, dessen Nützlichkeit in der Mathematik längst anerkannt ist, und dessen wir uns bisher mehreremal bedient haben, sehr leicht aus der dritten Gleichung No. 213. ableiten läfst. Setzen wir nämlich $X_m = f(x + m\Delta x)$, und $X_0 = fx$, so ziehen wir hieraus

$$f(x+m\Delta x) = fx + \frac{m}{1}\Delta fx + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 fx + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta^3 fx + \ldots$$

Nehmen wir die Zahl m unendlich grofs an, so wird sich auch die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in eine unendliche Glieder-Anzahl ausdehnen. Wird aber m unendlich grofs, so verschwinden die endlichen Gröfsen 1, 2, 3, ... im Verhältnifs zu dem Unendlichgrofsen, mit dem sie in Verbindung stehen, und die vorliegende Reihe gewinnt folgende Gestalt:

$$f(x+m\Delta x) = fx + m\Delta fx + \frac{m^2}{1.2}\Delta^2 fx + \frac{m^3 \Delta^3 fx}{1.2.3} + \ldots$$

In dieser Gestalt kann uns aber die vorliegende Reihe zu keiner Anwendung dienen, da $m\Delta x$ ein Unendlichgroſses bedeutet. Um nun aus $m\Delta x$ eine endliche Gröſse zu erzeugen, lassen wir Δx in das Unendlich- oder Verschwindend-Kleine: die Differenz Δx in das Differenzial ∂x übergehen. Dann wird zugleich $\partial fx = \frac{\partial fx . \partial x}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 fx(\partial x)^2}{(\partial x)^2} + \ldots$, und wir erhalten

$$f(x + m\partial x) = fx + \frac{m\,\partial x\,\partial fx}{1\,\partial x} + \frac{m^2(\partial x)^2\,\partial^2 fx}{1.2(\partial x)^2} + \frac{m^3(\partial x)^3\,\partial^3 fx}{1.2.3(\partial x)^3} + \ldots$$

Setzen wir nun hierin $m\partial x = k$ als eine endliche Gröſse, und berücksichtigen, daſs $m\partial x = k$, $m^2(\partial x)^2 = k^2$, $m^3(\partial x)^3 = k^3$, so erhalten wir

$$227. \quad f(x+k) = fx + \frac{k.\partial fx}{1.\partial x} + \frac{k^2\,\partial^2 fx}{1\,2(\partial x)^2} + \frac{k^3\,\partial^3 fx}{1.2.3(\partial x)^3} + \ldots$$

Dieses ist die Taylorsche Reihe.

Ganz auf dieselbe Weise läſst sich auch folgende Gleichung ableiten:

$$f(x-k) = fx - \frac{k\,\partial fx}{1.\partial x} + \frac{k^2\,\partial^2 fx}{1.2(\partial x)^2} - \frac{k^3\,\partial^3 fx}{1.2.3(\partial x)^3} + \ldots$$

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Bande.)

25.

Note sur l'attraction des sphéroïdes.

(Par Mr. *Pagani*, prof. ord. à la faculté des sciences de l'université de Liège.)

Considérons une masse quelconque M de grandeur finie, dont tous les points matériels m', ..., exercent une attraction sur un point m. Soient x, y, z, les coordonnées rectangulaires de m; x', y', z', celles de m'. Si l'on fait

$$u = \sqrt{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]};$$

les composantes de l'attraction Newtonienne de la masse M sur le point m, parallèlement à l'axe des x, sera

$$X = S\frac{d\frac{1}{u}}{dx}m',$$

le signe S s'étendant à la masse entière. On aurait des expressions analogues pour les deux autres composantes Y et Z, en changeant seulement dx en dy et en dz.

Supposons d'abord que le point m ne fasse pas partie de la masse M. En posant

$$V = S\frac{m'}{u}, \qquad X' = \frac{d^2\frac{1}{u}}{dx^2}m'; \qquad Y' = \text{etc.};$$

on aura les relations suivantes.

$$1. \qquad X = \frac{dV}{dx},$$

$$2. \qquad X' = \frac{d^2V}{dx^2},$$

$$3. \qquad X'+Y'+Z' = 0.$$

Pour juger ce que deviennent ces équations lorsque le point m fait partie de la masse M, décomposons celle-ci en deux parties, dont la première, comprenant le point m, pourra, en général, être supposée égale à une très-petite sphère homogène ayant une densité ϱ égale à la densité de la masse au point m. Il est évident que les équations précédentes subsisterons encore pour la seconde partie de M. Par conséquent le problème se réduit à examiner à quoi se réduisent les formules précédantes dans les cas où le point m fait partie d'une sphère homogène.

Pour cela, plaçons l'origine des coordonnés au centre de la sphère, et substitituons les coordonnées polaires au précédentes; nous aurons ces formules:

$$u = \sqrt{(r^2 - 2rr'\cos\theta' + r'^2)}, \qquad V = 2\pi\varrho . S\frac{1}{u}r'^2 dr' \sin\theta' d\theta',$$

$$R = 2\pi\varrho S \frac{d\frac{1}{u}}{dr} r'^2 dr' \sin\theta' d\theta', \quad R' = \frac{2\pi\varrho}{r} S \frac{d^2\frac{r}{u}}{dr^2} r'^2 dr' \sin\theta' d\theta'.$$

En exécutant les intégrations indiquées, on trouve:

1°. le point m étant dans l'intérieur de la sphère dont le rayon est a,

$$V = 2\pi\varrho\left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right), \qquad R = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho r, \qquad R' = 0;$$

2°. le point m étant à la surface de la sphère,

$$V = \tfrac{4}{3}\pi\varrho r^2, \qquad R = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho r, \qquad R' = 0.$$

Maintenant il sera aisé de résoudre la question que nous nous sommes proposée. On voit premièrement que, dans le cas de $r < a$, on doit avoir

$$R = \frac{dV}{dr}, \qquad \frac{1}{r}d^2\frac{rV}{dr^2} = -4\pi\varrho.$$

Par conséquent les équations (2.), (3.) devront être remplacées par la suivante:

$$4. \qquad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = -4\pi\varrho;$$

ou bien

$$5. \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\varrho.$$

Deuxiemement, soit $a = r$. Il paraîtrait d'après nos formules que l'on devrait avoir, au lieu du premier système d'équations, la seule équation (4.). Mais il y a une remarque importante à faire; c'est que l'expression $R = -\frac{4}{3}\pi\varrho r$ n'exprime pas rigoureusement l'attraction de la sphère sur un point matériel de sa surface. En effet, si nous dénotons par r, le rayon de la surface intérieure, et par $r + dr$, le rayon de la surface extérieure de la couche dont le point m fait partie; l'attraction de la sphère sur ce point est, comme on sait,

$$R = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho r - 2\pi\varrho dr.$$

Si l'on avait seulement pour objet de calculer l'attraction de la sphère sur un point matériel de sa surface, la dernière valeur de R se confondrait avec la précédente. Mais il n'en est pas de même, lorsque

l'on veut comparer cette action avec celle qui aurait lieu sur un point *posé* sur la sphère. On trouve alors que la nouvelle action R_1 est donnée par la formule

$$R_1 = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho(r+dr).$$

Partant

$$R_1 - R = \tfrac{2}{3}\pi\varrho\, dr;$$

d'où

$$\frac{dR}{dr} = \tfrac{2}{3}\pi\varrho.$$

En employant cette dernière valeur, on trouve

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d.r^2R}{dr} = -2\pi\varrho.$$

Il résulte de l'analyse que nous venons d'exposer:

1°. qu'on désignant par $\frac{dU}{dx}$, l'attraction d'un sphéroïde sur un point matériel m, décomposée parallèlement à l'axe des x, on doit avoir

$$6.\quad \frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2} = 0,\quad \text{ou} = -2\pi\varrho,\quad \text{ou} = -4\pi\varrho,$$

selon que le point m est en dehors du sphéroïde, ou à sa surface, ou dans son intérieur. Ces résultats ont été démontrés pour la première fois par M. *Poisson*.

2°. Il faut ajouter à cela que, dans les deux cas extrêmes, la fonction U est égale à l'intégrale $S\frac{m'}{u}$, mais que cette égalité ne subsiste plus pour le cas où le point m est à la surface du sphéroïde. Dans tous les cas l'équation (3.) a toujours lieu.

3°. Lorsque l'on se propose seulement de calculer l'attraction d'un sphéroïde sur un point matériel de la couche superficielle, on peut employer indistinctement l'une quelconque des équations (6.). Il est évident, en effet, que le cas où le point attiré est situé à la surface du corps attirant, peut être regardé comme la limite des deux autres. Aussi, la seconde valeur de la fonction qui forme le premier membre des équations (6.), est elle moyenne entre les deux autres valeurs.

4°. Si l'on ne fait pas abstraction des quantités infiniment petites vis-à-vis des quantités finies, l'attraction d'une sphère homogène sur un point matériel, est la plus grande possible, lorsque le point attiré fait partie de la surface de la sphère. Dans ce cas, la fonction qui exprime l'attraction est une fonction discontinue; et pour calculer sa différentielle, il faut

tenir compte, *avant et après l'accroissement de la variable*, *des termes dont la valeur est infiniment petite.* Ce fait analytique me paraît digne de fixer l'attention des géomètres.

5°. Il resulte de l'analyse même de M. *Poisson*, que si le point m était au sommet d'un polyèdre attirant, il faudrait substituer aux seconds membres de l'équation (6.) la quantité $-\varrho\omega$, en dénotant par ω le quotient de la surface sphérique, interceptée par l'angle solide dont le sommet m est le centre, divisée par le carrée du rayon. Ces cas singuliers ont été signalés d'abord par M. *Ostrograsky*.

6°. Enfin, il me semble que M. *Poisson* a démontré d'une manière très ingénieuse qu'en posant

$$X_1 = -S\frac{d^2\frac{1}{\omega}}{dx\,dx'}m', \text{ etc.}$$

on devait avoir, selon les cas spécifiés plus haut,

$$X_1 + Y_1 + Z_1 = 0, \quad -2\pi\varrho, \quad -4\pi\varrho;$$

mais il ne résulte pas nécessairement de sa démonstration que l'on doive avoir toujours $X_1 = \frac{dX}{dx} = \frac{d^2U}{dx^2}$, etc. D'un autre côté, M. *Ostrograsky* démontre, en suivant une méthode différente, que l'on doit avoir, selon les cas,

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0, \quad -2\pi\varrho, \quad -4\pi\varrho;$$

mais il ne fait pas voir quelle est la relation entre les quantités, X, etc., et l'intégrale que nous avons désignée au commencement par V.

26.

De fractione continua, in quam integrale $\int_x^\infty e^{-xx} dx$ evolvere licet.

(Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. ord. math. Regiom.)

Integrale propositum, cuius in fractionibus coelestibus aliisque quaestionibus usus est, ill. *Laplace* (M. C. T. IV. L. X.) in fractionem continuam evolutum dedit sequentem, posito $q = \frac{1}{2xx}$,

$$1.\quad \int_x^\infty e^{-xx}\partial x = \frac{e^{-xx}}{2x}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+4q\atop\vdots}}}}$$

Demonstratio tamen viri cum per series divergentes procedat, hodie vix probabitur; quae hoc modo accuratior redditur.

Statuamus

$$2.\quad v = e^{+xx}\int_x^\infty e^{-xx}\partial x,$$

habemus differentiando,

$$3.\quad \frac{\partial v}{\partial x} = +2xv - 1.$$

Qua aequatione iterum n vicibus differentiata, prodit

$$4.\quad \frac{\partial^{n+1} v}{\partial x^{n+1}} = 2x\frac{\partial^n v}{\partial x^n} + 2n\frac{\partial^{n-1} v}{\partial x^{n-1}},$$

sive posito

$$5.\quad v_n = \frac{\partial^n v}{1.2.3\ldots n\,\partial x^n},$$

fit

$$6.\quad (n+1)v_{n+1} = 2xv_n + 2v_{n-1};\qquad v_1 = 2xv - 1.$$

Porro posito

$$(-1)^n 2x^{n+1} v_n = y_{n+1},\qquad q = \frac{1}{2xx},$$

fit e (6.):

$$7.\quad y_n = y_{n+1} + (n+1)y_{n+2};\qquad 1 = y_1 + qy^2.$$

Unde profluit:

$$\frac{1}{y_1} = q + \frac{y_2}{y_1} = q + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2qy_3}{y_2}} = q + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2q}{1 + \cfrac{3qy_4}{y_3}}},$$

seu generaliter

$$8. \qquad \frac{1}{y_1} = q + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2q}{1 + \cfrac{3q}{1 \\ \vdots \\ + \cfrac{nq}{1 + \cfrac{(n+1)qy_{n+2}}{y_{n+1}}}}}}.$$

ubi

$$y_1 = \frac{e^{xx}}{2x}\int_x^\infty e^{-xx}\partial x = \frac{v}{2x},$$

$$9. \qquad y_{n+1} = (-1)^n 2x^{n+1}\frac{\partial^n v}{1.2.3\ldots n\,\partial x^n}.$$

III. *Laplace* asserit, valorem quaesitum ipsius $\frac{1}{y_1}$ semper contineri inter duos valores fractionis continuae se proxime insequentes; quod ut locum habere intelligatur, probare debebat, quotientes neglectos

$$\frac{(n+1)qy_{n+2}}{y_{n+1}}$$

idem signum servare. Quod per evolutiones in seriem non ita facile probas; sed contigit, si differentialia ipsius v per integralia definita exhibes. Habetur enim e (2.):

$$10. \qquad v = e^{xx}\int_x^\infty e^{-tt}\partial t = e^{xx}\int_0^\infty e^{-(t+x)^2}\partial t = \int_0^\infty \partial t\, e^{-tt}e^{-2tx},$$

unde

$$11. \qquad \frac{\partial^n v}{\partial x^n} = \int_0^\infty \partial t(-2t)^n e^{-tt}e^{-2tx} = e^{xx}\int_0^\infty \partial t(-2t)^n e^{-(t+x)^2},$$

sive

$$12. \qquad \frac{\partial^n v}{\partial x^n} = (-2)^n e^{xx}\int_x^\infty \partial t\,(t-x)^n e^{-tt},$$

unde etiam

$$13. \qquad y_{n+1} = \frac{(2x)^{n+1}e^{xx}}{1.2.3\ldots n}\int_x^\infty \partial t(t-x)^n e^{-tt},$$

quae semper est quantitas positiva. Unde sponte fluit, quod probari debebat, quotientem neglectum et ipsum semper esse positivum.

Reg. 30 Juni 1834.

27.

Comment, dans la trigonométrie sphérique, les formules de Gaufs et les analogies de Neper, qui en découlent, peuvent être tirées immédiatement et facilement des formules fondamentales.

(Par l'éditeur.)

Les cotés d'un triangle sphérique quelconque étant désignés par a, b, c et ses angles par A, B, C, on a, comme on sait,

$$1. \quad \cos a \sin B \sin C - \cos A = \cos B \cos C,$$

$$2. \quad \cos a - \cos A \sin b \sin c = \cos b \cos c,$$

et

$$3. \quad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

La troisième de ces *formules fondamentales* donne, en multipliant:

$$\frac{\sin B \sin C}{\sin b \sin c} = \frac{\sin A^2}{\sin a^2} = \frac{1-\cos A^2}{1-\cos a^2} = \frac{(1+\cos A)(1-\cos A)}{(1+\cos a)(1-\cos a)},$$

ou bien

$$4. \quad \sin B \sin C (1+\cos a)(1-\cos a) = \sin b \sin c (1+\cos A)(1-\cos A).$$

Combinons *par l'addition* cette équation et les deux équations *identiques*

$$5. \quad (1-\cos A)(1-\cos a) = (1-\cos a)(1-\cos A),$$

$$6. \quad (1+\cos A)(1+\cos a) = (1+\cos a)(1+\cos A),$$

et par *la soustraction* la même équation (4.) et les deux équations *identiques*

$$7. \quad (1+\cos A)(1-\cos a) = (1-\cos a)(1+\cos A),$$

$$8. \quad (1-\cos A)(1+\cos a) = (1+\cos a)(1-\cos A),$$

nous aurons

$$[1-\cos A+\sin B \sin C(1+\cos a)](1-\cos a) = [1-\cos a+\sin b \sin c(1+\cos A)](1-\cos A),$$

$$[1+\cos A+\sin B \sin C(1-\cos a)](1+\cos a) = [1+\cos a+\sin b \sin c(1-\cos A)](1+\cos A),$$

$$[1+\cos A-\sin B \sin C(1+\cos a)](1-\cos a) = [1-\cos a-\sin b \sin c(1-\cos A)](1+\cos A),$$

$$[1-\cos A-\sin B \sin C(1-\cos a)](1+\cos a) = [1+\cos a-\sin b \sin c(1+\cos A)](1-\cos A),$$

En substituant dans ces équations les équations fondamentales (1.) et (2.) on trouvera:

$$(1+\cos B\cos C+\sin B\sin C)(1-\cos a) = (1-\cos b\cos c+\sin b\sin c)(1-\cos A),$$
$$(1-\cos B\cos C+\sin B\sin C)(1+\cos a) = (1+\cos b\cos c+\sin b\sin c)(1+\cos A),$$
$$(1-\cos B\cos C-\sin B\sin C)(1-\cos a) = (1-\cos b\cos c-\sin b\sin c)(1+\cos A),$$
$$(1+\cos B\cos C-\sin B\sin C)(1+\cos a) = (1+\cos b\cos c-\sin b\sin c)(1-\cos A).$$

Cela, en vertu de formules goniométriques connues, se réduit à

$$(1+\cos(B-C))(1-\cos a) = (1-\cos(b+c))(1-\cos A),$$
$$(1-\cos(B+C))(1+\cos a) = (1+\cos(b-c))(1+\cos A),$$
$$(1-\cos(B-C))(1-\cos a) = (1-\cos(b-c))(1+\cos A),$$
$$(1+\cos(B+C))(1+\cos a) = (1+\cos(b+c))(1-\cos A),$$

et, en vertu d'autres formules goniométriques connues, à

$$4\cos\tfrac{1}{2}(B-C)^2\sin\tfrac{1}{2}a^2 = 4\sin\tfrac{1}{2}(b+c)^2\sin\tfrac{1}{2}A^2,$$
$$4\sin\tfrac{1}{2}(B+C)^2\cos\tfrac{1}{2}a^2 = 4\cos\tfrac{1}{2}(b-c)^2\cos\tfrac{1}{2}A^2,$$
$$4\sin\tfrac{1}{2}(B-C)^2\sin\tfrac{1}{2}a^2 = 4\sin\tfrac{1}{2}(b-c)^2\cos\tfrac{1}{2}A^2,$$
$$4\cos\tfrac{1}{2}(B+C)^2\cos\tfrac{1}{2}a^2 = 4\cos\tfrac{1}{2}(b+c)^2\sin\tfrac{1}{2}A^2;$$

ou bien à

$$9.\quad \pm\cos\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}a = \sin\tfrac{1}{2}(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A,$$
$$10.\quad \pm\sin\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}a = \cos\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}A,$$
$$11.\quad \pm\sin\tfrac{1}{2}(B-C)\sin\tfrac{1}{2}a = \sin\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}A,$$
$$12.\quad \pm\cos\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}a = \cos\tfrac{1}{2}(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A.$$

Voilà les *équations de Gauſs.*

En divisant (11.) par (10.), (9.) par (12.), (11.) par (9.) et (10.) par (12.) on trouvera les *analogies de Neper*, savoir:

$$13.\quad \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = \pm\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b-c),$$
$$14.\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = \pm\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b+c),$$
$$15.\quad \pm\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}A,$$
$$16.\quad \pm\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(B+C) = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}A.$$

On voit qu'il faut faire attention à l'ambiguité des signes, tant pour les équations de *Gauſs* (9.—12.) que pour les analogies de *Neper* (13.—16.).

Berlin, au mois de Mai 1834.

28.

Démonstration d'un théorème de Lambert.

(Par Mr. *Pagani*, prof. ord. à la faculté des sciences de l'université de Liège.)

On soit que *Lambert* est parvenu à généraliser le théorème d'*Euler*, relatif à la parabole, par des considération ingénieuses puisées dans la théorie des sections coniques. Plusieurs géomètres se sont occupés ensuite du même objet, et parvinrent à démontrer le beau théorème de *Lambert* au moyen de seules transformations algébriques. *Lagrange* en a fait le sujet d'un mémoire fort intéressant, publié dans le recueil de l'Académie de Berlin pour l'année 1778.

Le même théorème est démontrée dans la *Mécanique analytique*, mais la démonstration de *Lagrange*, étant fondée sur les formules du mouvement d'un corps attiré vers deux centre fixes, ne me semble pas la plus simple ni la plus directe des démonstrations. En modifiant convenablement la marche suivie par *Lagrange* je suis arrivée à une démonstration directe du théorème qui fait l'objet de cet article. Persuadé que la démonstration à laquelle je suis parvenu, est une des plus simples que l'on puisse donner de cet important théorème, j'ai cru que les lecteurs de ce Journal ne seraient pas fachés de la voir y occuper une petite place.

Soient: M le soleil; m la planète dont ont considère le mouvement relatif au premier corps; m' un lieu déterminé de la planète; et μ la somme des masses du soleil et de la planète.

Désignons par a, la distance moyenne de la planète au soleil, et par t le temps écoulé depuis que la planète a quitté la position m'.

En posant: $Mm' = h$, $Mm = r$, $m'm = \varrho$; angle $m'Mm = \theta$, et en faisant, pour abréger,

$$1. \quad \alpha = \mu d\theta^2,$$

les équations du mouvement relatif de m sont:

$$2. \quad dr^2 + r^2 d\theta^2 = \alpha\left(\frac{a}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

$$3. \quad d(r^2 d\theta) = 0.$$

Le triangle $m'Mm$ nous fournit la relation

$$4. \quad h^2 - 2hr.\cos\theta = \varrho^2 - r^2,$$

qui étant differentiée nous donnera

$$r d\theta = \frac{2r\varrho d\varrho - (r^2 + \varrho^2 - h^2) dr}{\sqrt{[4h^2r^2 - (h^2 + r^2 - \varrho^2)^2]}}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (2.), il sera aisé de la mettre sous cette forme:

$$5. \quad \varrho^2 r^2 dr^2 + r^2\varrho^2 d\varrho^2 - (r^2 + \varrho^2 - h^2) r dr.\varrho d\varrho$$
$$= \frac{\alpha}{4}\left(\frac{a}{r} - \frac{1}{a}\right)[4h^2r^2 - (h^2 + r^2 - \varrho^2)^2].$$

Differentions l'équation (2.), et développons l'équation (3.); nous aurons

$$dr\, d^2r + r dr\, d\theta^2 + r^2 d\theta\, d^2\theta = -\frac{\alpha dr}{r^2},$$
$$6. \quad 2dr d\theta + r.d^2\theta = 0;$$

et en eliminant $d^2\theta$,

$$7. \quad r d\theta^2 - d^2 r = \frac{\alpha}{r^2}.$$

En combinant cette équation avec l'équation (2.) on trouve

$$8. \quad \frac{d.rdr}{\alpha} = \frac{1}{r} - \frac{1}{a}.$$

Enfin, différentions deux fois de suite l'équatiou (4.), et, en égard aux relations (4., 6., 7. et 8.), nous aurons sans peine

$$9. \quad \frac{d.\varrho d\varrho}{\alpha} = \frac{h^2 + 3r^2 - \varrho^2}{2r^3} - \frac{1}{a}.$$

Cela posé, multiplions l'équation (8.) par $\varrho d\varrho$, et l'équation (9.) par rdr; la somme des produits sera intégrable; et en observant que l'on doit avoir en même temps $\varrho = 0$, $r = h$; l'intégrale sera

$$10. \quad \frac{rdr.\varrho d\varrho}{\alpha} = \frac{3r^2 + \varrho^2 - h^2}{2r} - \frac{r^2 + \varrho^2 - h^2}{2a} - h.$$

Eliminons entre cette équation et l'équation (5.) le produit $rd\varrho.\varrho d\varrho$; nous aurons, après les réductions,

$$\frac{r^2\varrho^2}{\alpha}(dr^2 + d\varrho^2) = r(r^2 + 3\varrho^2 - h^2) - h(r^2 + \varrho^2 - h^2)$$
$$- \frac{1}{4a}(r^4 + \varrho^4 + h^4 + 6r^2\varrho^2 - 2h^2r^2 - 2h^2\varrho^2).$$

En multipliant tous les termes de l'équation (10.) par $\pm 2r\varrho$, et en ajoutant le produit à la dernière équation, on trouvera

$$\frac{r^2\varrho^2}{a}(dr\pm d\varrho)^2 = (r\pm\varrho)^3 - h(r\pm\varrho)^2 - h^2(r\pm\varrho) + h^3$$
$$-\frac{1}{4a}[(r\pm\varrho)^4 - 2h^2(r\pm\varrho)^2 + h^4)].$$

Posons, pour abréger, $s = r+\varrho$, $\sigma = r-\varrho$; et nous déduirons de la dernière équation, les deux suivantes

$$\frac{(s^2-\sigma^2)^2}{16a}ds^2 = (s-h)^2\left[s+h-\frac{(s+h)^2}{4a}\right],$$
$$\frac{(s^2-\sigma^2)^2}{16a}d\sigma^2 = (\sigma-h)^2\left[\sigma+h-\frac{(\sigma+h)^2}{4a}\right];$$

d'où l'on tire successivement

$$\frac{ds}{(s-h)\sqrt{\left(s+h-\frac{1}{4a}(s+h)^2\right)}} = \frac{ds}{(\sigma-h)\sqrt{\left(\sigma+h-\frac{1}{4a}(\sigma+h)^2\right)}},$$

$$4\sqrt{\mu}.dt = \frac{s^2\,ds}{(s-h)\sqrt{\left(s+h-\frac{1}{4a}(s+h)^2\right)}} - \frac{\sigma^2\,d\sigma}{(\sigma-h)\sqrt{\left(\sigma+h-\frac{1}{4a}(\sigma+h)^2\right)}}.$$

En retranchant de cette dernière équation la précédente multipliée par h^2; on aura, après la suppression du diviseur commun $s-h$, et en posant, pour plus de simplicité,

$$\int\frac{z\,dz}{\sqrt{\left(2z-\frac{z^2}{a}\right)}} = fz,$$

la formule

$$t\sqrt{\mu} = f\tfrac{1}{2}(h+r+\varrho) - f\tfrac{1}{2}(h+r-\varrho),$$

qui renferme le théorème de *Lambert*.

Les quatre formules qui précèdent les deux dernières, coïncident avec celles de *Lagrange*, sauf la correction $4a$ au lieu de $2a$ que l'auteur de la Mécanique analytique a écrit par inadvertance.

Liège ce 21. de Février 1834.

29.

Note sur la conversion des séries en produits composés d'un nombre infini de facteurs.

(Par Mr. Stern, doct. en phil. à Goettingue.)

Etant donnée une série

$$1.\quad S = 1+A_1+A_2+A_3+A_4\ldots,$$

on peut la convertir immédiatement en un produit. En effet on a

$$2.\quad S = 1+A_1.\frac{1+A_1+A_2}{1+A_1}.\frac{1+A_1+A_2+A_3}{1+A_1+A_2}.\frac{1+A_1+A_2+A_3+A_4}{1+A_1+A_2+A_3}\ldots.$$

Cette formule si simple, si triviale même, mène pourtant à des résultats remarquables. Considérons, par exemple, la série connue

$$e = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}\ldots.$$

En y appliquant la formule (2.) on trouve

$$e = \frac{3}{2}.\frac{10}{9}.\frac{41}{40}.\frac{206}{205}\ldots.$$

expression qu'on n'avait pas encore trouvé, je crois, jusqu'à présent, par quelque autre voie. La loi d'après laquelle se forment les divers facteurs de ce produit, est évidente. En effet le $n^{\text{ième}}$ facteur étant $=\frac{a}{b}$, le $n+1^{\text{ième}}$ sera

$$=\frac{(n+2)a+1}{(n+2)a} = 1+\frac{1}{(n+2)a}.$$

De la même manière on déduit de la série

$$\log 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots.$$

le produit

$$\frac{1}{2}.\frac{5}{1.3}.\frac{14}{4.5}.\frac{94}{5.14}.\frac{444}{6.94}\ldots.$$

Ici, le $n^{\text{ième}}$ facteur étant $=\frac{a}{b}$, le $n+1^{\text{ième}}$ sera $=\frac{(n+1)b+a}{(n+2)a}$.

J'ai déjà trouvé ailleurs des produits semblables *), et il ne serait pas difficile d'en indiquer encore beaucoup d'autres.

*) T. 10. cah. 3. pg. 272. de ce Journ.

Il y a à remarquer que les expressions (1.) et (2.) sont identiques, c'est-à-dire, que si l'on ajoute un certain nombre de premiers termes de la série donnée, on obtient la même valeur, qu'on obtiendroit en calculant la valeur du produit correspondant par le même nombre de facteurs, de manière qu'une série convergente mène toujours à un produit convergent. Par les considérations précédentes il est encore facile de changer un produit composé d'un nombre infini de facteurs en une série. Car étant donné le produit

$$3.\quad \frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\cdot\frac{a_3}{b_3}\cdots\cdot\frac{a_n}{b_n},$$

qui on le compare avec la formule (2.), et l'on trouvera

$$\frac{a_1}{b_1} = 1 + A_1,\qquad \frac{a_2}{b_2} = \frac{1+A_1+A_2}{1+A_1}\text{ etc.}$$

ou

$$A_1 = \frac{a_1-b_1}{b_1},\qquad A_2 = \frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2-b_2}{b_2}\cdots\cdot$$

et l'on se convaincra aisément qu'on aura généralement

$$A_n = \frac{a_1\cdot a_2\cdots\cdot a_{n-1}}{b_1\cdot b_2\cdots\cdot b_{n-1}}\cdot\frac{a_n-b_n}{b_n},$$

de manière que le produit (3.) se transforme dans la série suivante:

$$4.\quad 1+\frac{a_1-b_1}{b_1}+\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2-b_2}{b_2}\cdots\cdot+\frac{a_1\cdot a_2\cdots\cdot a_{n-1}}{b_1\cdot b_2\cdots\cdot b_{n-1}}\cdot\frac{a_n-b_n}{b_n}.$$

Cette formule a été déjà donnée par Mr. *Schweins* *).

*) Voy. son Analyse pg. 237.

30.

Tabula schematum, numeros auxiliares et regulas (ultra trecentas) pro factoribus primis (300 minoribus) (p) agnoscendis idoneas breviter exhibentium.

(Auctore *Carolo Joh. Ds. Hill* Lond. Goth.)

(Vide tom. XI. fasc. 3.)

---

p	Schema.
3.	$\binom{+\,II}{1}$, $\binom{+\,I}{1}$.
9.	$(d\overset{\cdot}{=})$
27.	$\binom{+\,III}{1\ .}$, $\binom{-\,II}{8\ .}$, ... $\binom{I\,-}{\ 8}$.
7.	$\binom{+\,VI}{1\ .}$, $\binom{-\,III}{1\ .}$; $\binom{+\,II}{2\ .}$, ... $\binom{I\,-}{.\,2}$.
42.	$\binom{+\,II}{2\ .}$, ... $\binom{I\,+}{.\,2}$.
11.	$\binom{+\,VI}{1\ .}$, $\binom{-\,III}{1\ .}$; $\binom{+\,II}{1\ ,}$, $\binom{-\,I}{1\ :}$.
121.	$\binom{-\,XI}{1\ ,}$.
13.	$\binom{+\,VI}{1\ .}$, $\binom{-\,IV}{3\ ,}$ $\binom{-\,III}{1\ .}$, $\binom{IV\,-}{.\ 4}$, $(^{II}_{\ .}$ $\cdot$ $\binom{I\,+}{.\,4}$.
169.	$\binom{+\,VIII}{4\ ,}$ $\binom{-\,VII}{101\ .}$.
17.	$\binom{-\,VIII}{1\ .}$, $\binom{+\,IV}{4\ .}$, $\binom{-\,III}{3\ .}$ $\binom{-\,II}{2\ .}$, $\binom{V\,+}{.\,3}$, $\binom{IV\,-}{.\ 4}$, $\binom{III\,-}{.\ 6}$, $\binom{II\,+}{.\,8}$.
289.	$\binom{+\,V}{8\ .}$.
19.	$\binom{-\,IX}{1\ .}$, $\binom{+\,IV}{6\ .}$, $\binom{+\,II}{5\ .}$, $\binom{V\,-}{.\ 6}$; $\binom{IV\,-}{.\ 3}$; $\binom{III\,+}{.\ 8}$; $\binom{II\,+}{.\ 4}$ $\binom{I\,+}{.\,2}$.
361.	$\binom{+\,V}{5\ .}$.
23.	$\binom{-\,XI}{1\ .}$, $\binom{+\,VIII}{2\ .}$, $\binom{+\,VI}{6\ .}$ $\binom{-\,V}{4\ .}$ $\binom{-\,IV}{5\ .}$, $\binom{IV\,+}{.\ 9}$, $\binom{III\,-}{.\ 2}$ $\binom{II\,+}{.\,3}$, $\binom{I\,+}{.\,7}$.
29.	$\binom{-\,XIV}{1\ .}$, $\binom{+\,XI}{2\ .}$, $\binom{-\,VI}{7\ .}$, $\binom{+\,V}{8\ .}$, $\binom{-\,V}{5\ .}$, $\binom{IV\,-}{.\ 6}$, $\binom{III\,-}{.\ 2}$, $\binom{II\,+}{.\,9}$, $\binom{I\,+}{.\,3}$.
31.	$\binom{-\,XV}{1\ .}$, $\binom{+\,VI}{2\ .}$, $\binom{-\,V}{6\ .}$, $\binom{+\,III}{8\ .}$, $\binom{+\,II}{7\ .}$, $\binom{V\,+}{.\,3}$, $\binom{III\,+}{.\ 4}$, $\binom{II\,+}{.\,9}$ $\binom{I\,-}{.\,3}$.
37.	$\binom{+\,III}{1\ .}$, (etc. — m.111 *)).

p	(Contin.)
41.	$\binom{+\,V}{1\ .}$, $\binom{-\,IV}{4\ .}$ $\binom{I\,-}{.\,4}$.
43.	$\binom{+\,XXI}{1\ .}$, $\binom{-\,X}{2\ .}$, $\binom{+\,VII}{8\ .}$ $\binom{-\,VI}{8\ .}$ $\binom{+\,V}{25\ .}$, $\binom{IV\,+}{.\ 6}$, $\binom{III\,+}{.\ 4}$, $\binom{II\,-}{.\,3}$.
47.	$\binom{-\,XXIII}{1\ .}$, $\binom{+\,XIV}{4\ .}$, $\binom{-\,VII}{2\ .}$, $\binom{-\,IV}{11\ .}$ $\binom{+\,II}{8\ .}$, $\binom{V\,-}{.\ 3}$, $\binom{II\,+}{.\,8}$.
53.	$\binom{+\,XIII}{1\ .}$, $\binom{-\,VI}{4\ .}$ $\binom{-\,III}{7\ .}$, $\binom{-\,II}{8\ .}$, ... $\binom{II\,-}{.\ 9}$.
53².	$\binom{-\,VI}{4\ .}$.
59.	$\binom{-\,XXIX}{1\ .}$, $\binom{+\,XXV}{2\ .}$, $\binom{+\,VI}{8\ .}$, $\binom{-\,V}{5\ .}$ $\binom{-\,III}{3\ .}$, $\binom{IV\,-}{.\ 2}$, $\binom{I\,+}{.\,6}$.
61.	$\binom{-\,XXX}{1\ .}$, $\binom{-\,XVII}{2\ .}$, $\binom{+\,XIV}{5\ .}$, $\binom{-\,IV}{4\ .}$, ... $\binom{I\,-}{.\,6}$.
67.	$\binom{+\,XXXIII}{.\ \ 1}$, $\binom{+\,IX}{9\ .}$, $\binom{-\,III}{5\ .}$, $\binom{IV\,+}{.\ 4}$ $\binom{II\,-}{.\ 7}$.
71.	$\binom{+\,XXXV}{1\ .}$, $\binom{+\,IX}{3\ .}$, $\binom{+\,VII}{5\ .}$ $\binom{+\,III}{8\ .}$; $\binom{I\,-}{.\,7}$.
73.	$\binom{+\,VIII}{1\ .}$, $\binom{-\,IV}{1\ .}$; $\binom{-\,III}{22\ .}$, $\binom{+\,II}{27\ .}$; $\binom{I\,+}{.\,72}$; .... $\binom{+\,II}{2.3}$, $\binom{-\,II}{3.8}$.
79.	$\binom{+\,XIII}{1\ .}$, $\binom{-\,V}{14\ .}$ $\binom{I\,+}{.\ 8}$, ... $\binom{IX\,-}{.\ 23}$, $\binom{VIII\,-}{.\ 14}$, $\binom{VI\,+}{.\ 22}$, $\binom{V\,-}{.\ 17}$, $\binom{IV\,-}{.\ 12}$, $\binom{II\,-}{.\ 18}$, $\binom{-\,VIII}{6\ .\ 5}$, $\binom{-\,V}{5.6}$, $\binom{+\,V}{4.11}$, $\binom{-\,IV}{7\ .\ 8}$, $\binom{-\,III}{2\ .\ 3}$.
83.	$\binom{+\,XLI}{1\ .}$, $\binom{+\,XI}{9\ .}$, $\binom{+\,III}{4\ .}$; .... $\binom{I\,+}{.\,26}$.
89.	$\binom{+\,XLIV}{1\ .}$, $\binom{+\,XXXVI}{2\ .}$ $\binom{+\,IX}{3\ .}$, $\binom{-\,VI}{4\ .}$, $\binom{+\,II}{11\ .}$; .... $\binom{I\,+}{.\ 9}$, $\binom{II\,-}{.\ 8}$.

*) Numerus $N < 1000$ quoad 37 probatur numerum trium ziphrarum aequalium subtrahendo
Ex. $N = 962$; Rel. $962 - 888 = 74 = 2 . 37$.

97. $\binom{-\mathrm{XLVIII}}{1\;.}$, $\binom{-\mathrm{XXXVIII}}{2}$, $\binom{+\mathrm{XI}}{5\;.}$, $\binom{-\mathrm{V}}{7\;.}$, $\binom{+\mathrm{II}}{3\;.}$.

101. $\binom{+\mathrm{IV}}{1\;.}$, $\binom{-\mathrm{II}}{1}$: $=\binom{\mathrm{II}-}{1\;.}$; $\binom{-\mathrm{VI}}{1\;.}_2$ etc.

103. $\binom{-\mathrm{XVII}}{1}$, $\binom{-\mathrm{II}}{3\;.}$; $\binom{\mathrm{V}-}{.\;8}$, $\binom{+\mathrm{IV}}{9\;.}$.

107. $\binom{-\mathrm{II}}{7\;.}$, $\binom{-\mathrm{VII}}{6\;.}$ — $\binom{+\mathrm{III}}{4.3}$.

109. $\binom{-\mathrm{II}}{9\;.}$, — $\binom{+\mathrm{III}}{6.6}$, $\binom{-\mathrm{IV}}{3.4}$.

113. $\binom{-\mathrm{V}}{5\;.}$, $\binom{\mathrm{IV}-}{.\;2}$ — $\binom{-\mathrm{III}}{6.7}$.

127. $\binom{+\mathrm{VI}}{2\;.}$, $\binom{\mathrm{III}-}{.\;8}$ $\binom{\mathrm{V}+}{.\;5}$; — $\binom{-\mathrm{II}}{6.6}$.

127². $\binom{+\mathrm{VI}}{2\;.}$.

131. $\binom{\mathrm{IV}+}{.\;3}$, ... $\binom{+\mathrm{II}}{7.4}$, $\binom{+\mathrm{III}}{9.8}$.

137. $\binom{-\mathrm{IV}}{1\;.}$, $\binom{+\mathrm{III}}{41\;.}$; .... $\binom{-\mathrm{II}}{11.4}$, $\binom{+\mathrm{II}}{4.11}$.

139. $\binom{-\mathrm{IV}}{8\;.}$ .... $\binom{+\mathrm{II}}{5.7}$; $\binom{\mathrm{XXXI}+}{.\;2}$; $\binom{-\mathrm{III}}{4.5}$.

149. $\binom{-\mathrm{XII}}{4\;.}$, $\binom{-\mathrm{X}}{6\;.}$, $\binom{-\mathrm{VIII}}{9\;.}$; $\binom{+\mathrm{VI}}{7.5}$; $\binom{\mathrm{VI}+}{.\;22}$; $\binom{+\mathrm{II}}{2.3}$, $\binom{+\mathrm{IV}}{2^2.37}$.

151. $\binom{\mathrm{V}+}{.\;4}$, ... $\binom{-\mathrm{II}}{2.3}$, $\binom{+\mathrm{IV}}{4.9}$.

147. $\binom{-\mathrm{XXXIX}}{1\;.}$, $\binom{-\mathrm{XX}}{33\;.}$, $\binom{+\mathrm{XI}}{25\;.}$, $\binom{-\mathrm{V}}{9\;.}$, $\binom{\mathrm{IX}+}{.\;4}$, $\binom{\mathrm{II}+}{.\;11}$; $\binom{-\mathrm{VI}}{2.7}$.

163. $\binom{-\mathrm{VI}}{5\;.}$, $\binom{\mathrm{V}-}{.\;2}$ ... $\binom{+\mathrm{II}}{11.5}$, $\binom{-\mathrm{V}}{4.13}$, $\binom{-\mathrm{III}}{9.7}$ ... $\binom{+\mathrm{III}}{4.15}$.

167. $\binom{+\mathrm{VI}}{4\;.}$, $\binom{-\mathrm{III}}{2\;.}$; $\binom{\mathrm{II}-}{.\;5}$ .... $\binom{+\mathrm{IV}}{7.8}$.

173. $\binom{+\mathrm{V}}{6\;.}$ .... $\binom{+\mathrm{II}}{5.7}$, $\binom{+\mathrm{III}}{4.9}$, $\binom{+\mathrm{IV}}{3.5}$, $\binom{-\mathrm{II}}{17.5}$.

179. $\binom{+\mathrm{IX}}{32\;.}$, $\binom{-\mathrm{IV}}{24\;.}$, $\binom{\mathrm{V}+}{.\;44}$ .... $\binom{-\mathrm{III}}{12.5}$, $\binom{+\mathrm{III}}{7.12}$, $\binom{+\mathrm{IV}}{11.7}$; $\binom{-\mathrm{IV}}{2.15}$, $\binom{+\mathrm{II}}{5.9}$, $\binom{\mathrm{III}-}{9.3}$.

181. $\binom{\mathrm{IV}-}{.\;4}$, ... $\binom{-\mathrm{II}}{5.9}$, $\binom{+\mathrm{III}}{9.3}$.

191. $\binom{+\mathrm{VII}}{4\;.}$, $\binom{+\mathrm{III}}{45\;.}$, $\binom{\mathrm{II}-}{.\;21}$, $\binom{\mathrm{V}+}{.\;25}$ .... $\binom{+\mathrm{II}}{9.2}$, $\binom{-\mathrm{III}}{11.4}$; $\binom{+\mathrm{IV}}{13.3}$, $\binom{-\mathrm{IV}}{3.14}$.

193. $\binom{+\mathrm{XIII}}{11\;.}$, $\binom{+\mathrm{V}}{26\;.}$, $\binom{+\mathrm{III}}{35\;.}$; $\binom{\mathrm{III}-}{.\;11}$ ... $\binom{+\mathrm{II}}{7.2}$, $\binom{-\mathrm{II}}{2.29}$, $\binom{+\mathrm{III}}{17.6}$, $\binom{+\mathrm{IV}}{13.5}$, $\binom{+\mathrm{IV}}{3.16}$, $\binom{+\mathrm{V}}{4.15}$.

197. $\binom{+\mathrm{VI}}{16\;.}$ $\binom{+\mathrm{III}}{15\;.}$ $\binom{+\mathrm{IV}}{9.4}$, $\binom{+\mathrm{II}}{3.2}$.

199. $\binom{+\mathrm{III}}{5}$; $\binom{\mathrm{II}+}{.\;2}$, $\binom{\mathrm{IV}+}{4}$, $\binom{\mathrm{VI}+}{8}$ etc.

211. $\binom{-\mathrm{XV}}{1\;.}$; $\binom{-\mathrm{X}}{15\;.}$; $\binom{-\mathrm{V}}{14\;.}$; $\binom{\mathrm{V}+}{.\;15}$; $\binom{+\mathrm{VI}}{3.3}$, $\binom{+\mathrm{VII}}{3111}$.

223. $\binom{-\mathrm{CXI}}{1\;.}$, $\binom{+\mathrm{XVIII}}{2\;.}$, $\binom{+\mathrm{VII}}{11\;.}$, $\binom{-\mathrm{IV}}{35\;.}$, $\binom{-\mathrm{III}}{7.2}$.

227. $\binom{-\mathrm{CXIII}}{1}$, $\binom{-\mathrm{VII}}{31\;.}$, $\binom{+\mathrm{IV}}{12\;.}$; .... $\binom{-\mathrm{XII}}{7.3}$.

229. $\binom{-\mathrm{CXIV}}{1\;.}$, $\binom{+\mathrm{XXVII}}{2\;.}$, $\binom{\mathrm{IV}+}{.\;3}$, $\binom{+\mathrm{I}}{.\;23}$, $\binom{\mathrm{VIII}}{.\;9}$.

233. $\binom{-\mathrm{CXVI}}{1\;.}$; $\binom{\mathrm{II}+}{.\;7}$, $\binom{-\mathrm{IV}}{19\;.}$, $\binom{\mathrm{VII}+}{.\;11}$.

239. $\binom{+\mathrm{VII}}{1\;.}$, $\binom{+\mathrm{III}}{44\;.}$, $\binom{-\mathrm{IV}}{38\;.}$.

241. $\binom{-\mathrm{XV}}{1\;.}$, $\binom{-\mathrm{V}}{16\;.}$; $\binom{-\mathrm{IV}}{3.2}$.

251. $\binom{-\mathrm{III}}{4\;.}$, $\binom{+\mathrm{V}}{102\;.}$, ... $\binom{-\mathrm{CXXV}}{1}$.

257. $\binom{-\mathrm{XI}}{4\;.}$, $\binom{+\mathrm{VI}}{13\;.}$, $\binom{-\mathrm{IV}}{23\;.}$; .... $\binom{\mathrm{II}+}{18}$, $\binom{\mathrm{III}-}{101}$, $\binom{\mathrm{IX}+}{12}$, $\binom{+\mathrm{VII}}{3.2}$.

263. $\binom{+\mathrm{IV}}{6\;.}$, $\binom{\mathrm{CXXXI}}{1\;.}$.

269. $\binom{-\mathrm{V}}{3.4}$, $\binom{+\mathrm{I}}{27.}$, $\binom{+\mathrm{CXXXIV}}{1}_2$, $\binom{-\mathrm{XII}}{11\;.}$, $\binom{\mathrm{XXV}-}{.\;2}$.

271. $\binom{+\mathrm{V}}{1\;.}$ $\left(=\binom{\mathrm{V}+}{.\;1}.\right)$.

277. $\binom{+\mathrm{V}}{3\;.}$, $\binom{+\mathrm{X}}{9\;.}$; $\binom{+\mathrm{LXIX}}{1\;.}$.

291. $\binom{+\mathrm{III}}{3.9}$.

283. $\binom{+\mathrm{IV}}{2.3}$.

293. $\binom{-\mathrm{VI}}{9\;.}$.

307. $\binom{+\mathrm{III}}{9.4}$.

Schemata pro nonnullis numeris primis > 300.

353. $\binom{\mathrm{III}-}{.\;6}$, $\binom{\mathrm{V}+}{.\;7}$.

367. $\binom{\mathrm{II}-}{.\;11}$ $\binom{-\mathrm{IV}}{3.4}$.

401. $\binom{\mathrm{II}-}{.\;4}$.

409. $\binom{-\mathrm{VI}}{5\;.}$, $\binom{\mathrm{V}-}{.\;2}$.

421. $\binom{\mathrm{III}+}{.\;8}$.

431. $\binom{+\mathrm{V}}{8\;.}$.

463. $\binom{-\mathrm{V}}{8\;.}$.

491. $\binom{\mathrm{V}-}{.\;3}$.

499. $\binom{+\mathrm{III}}{2\;.}$, $\binom{+\mathrm{VII}}{4\;.}$, $\binom{\mathrm{II}+}{.\;5}$.

503. $\binom{-\mathrm{III}}{6\;.}$.

599. $\binom{\mathrm{II}+}{.\;8}$.

600. $\binom{\mathrm{II}-}{.\;6}$.

641. $\binom{+\mathrm{V}}{4\;.}$.

661. $\binom{\mathrm{V}+}{.\;7}$.

701. $\binom{\mathrm{II}-}{.\;7}$.

757. $\binom{+\mathrm{VI}}{3\;.}$.

769. $\left(\begin{smallmatrix} + & \mathrm{IV} \\ 3 & . \end{smallmatrix}\right)$.
799. $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{II} & + \\ . & 8 \end{smallmatrix}\right)$.
857. $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{III} & + \\ . & 6 \end{smallmatrix}\right)$.
863. $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{V} & - \\ . & 8 \end{smallmatrix}\right)$.
883. $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{V} & + \\ 4 & . \end{smallmatrix}\right)$.
991. $\left(\begin{smallmatrix} + & \mathrm{III} \\ 9 & . \end{smallmatrix}\right)$.
997. $\left(\begin{smallmatrix} + & \mathrm{III} \\ 3 & . \end{smallmatrix}\right)$.
1003. $\left(\begin{smallmatrix} - & \mathrm{III} \\ 3 & . \end{smallmatrix}\right)$.
1031. $\left(\begin{smallmatrix} - & \mathrm{V} \\ 7 & . \end{smallmatrix}\right)$.
1087. $\left(\begin{smallmatrix} - & \mathrm{V} \\ 4 & . \end{smallmatrix}\right)$.
1249. $\left(\begin{smallmatrix} + & \mathrm{IV} \\ 8 & . \end{smallmatrix}\right)$.
1321. $\left(\begin{smallmatrix} + & \mathrm{VI} \\ 3 & . \end{smallmatrix}\right)$.
1373. $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{V} & - \\ . & 6 \end{smallmatrix}\right)$.
1429. $\left(\begin{smallmatrix} - & \mathrm{IV} \\ 3 & . \end{smallmatrix}\right)$.
1579. $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{IV} & - \\ . & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
1613. $\left(\begin{smallmatrix} - & \mathrm{V} \\ 6 & . \end{smallmatrix}\right)$.
1667. $\left(\begin{smallmatrix} - & \mathrm{IV} \\ 2 & . \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{III} & - \\ . & 8 \end{smallmatrix}\right)$.
1999. $\left(\begin{smallmatrix} + & \mathrm{IV} \\ 5 & . \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{III} & + \\ . & 2 \end{smallmatrix}\right)$.
2069. $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{IV} & - \\ . & 6 \end{smallmatrix}\right)$.
2381. $\left(\begin{smallmatrix} - & \mathrm{V} \\ 2 & . \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{IV} & - \\ . & 8 \end{smallmatrix}\right)$.
2521. $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{V} & + \\ . & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
2551. $\left(\begin{smallmatrix} + & \mathrm{VI} \\ 8 & . \end{smallmatrix}\right)$.
2657. $\left(\begin{smallmatrix} + & \mathrm{V} \\ 5 & . \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{IV} & + \\ . & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

2963. $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{IV} & - \\ . & 8 \end{smallmatrix}\right)$.
2999. $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{IV} & + \\ . & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
3001. $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{III} & - \\ . & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
3413. $\left(\begin{smallmatrix} - & \mathrm{VI} \\ 9 & . \end{smallmatrix}\right)$.
4999. $\left(\begin{smallmatrix} + & \mathrm{IV} \\ 2 & . \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{III} & + \\ . & 5 \end{smallmatrix}\right)$.
49999. $\left(\begin{smallmatrix} + & \mathrm{V} \\ 2 & . \end{smallmatrix}\right)$.
5003. $\left(\begin{smallmatrix} - & \mathrm{IV} \\ 6 & . \end{smallmatrix}\right)$.
5743. $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{V} & + \\ . & 4 \end{smallmatrix}\right)$.
9091. $\left(\begin{smallmatrix} - & \mathrm{V} \\ 1 & . \end{smallmatrix}\right)$.
9901. $\left(\begin{smallmatrix} - & \mathrm{VI} \\ 1 & . \end{smallmatrix}\right)$.
909091. $\left(\begin{smallmatrix} - & \mathrm{VII} \\ 1 & . \end{smallmatrix}\right)$.
21739. $\left(\begin{smallmatrix} + & \mathrm{VI} \\ 8 & . \end{smallmatrix}\right)$.
34483. $\left(\begin{smallmatrix} - & \mathrm{VI} \\ 7 & . \end{smallmatrix}\right)$.
71429. $\left(\begin{smallmatrix} - & \mathrm{VI} \\ 6 & . \end{smallmatrix}\right)$.

331. $\begin{smallmatrix} + & \mathrm{III} \\ 7 & . \end{smallmatrix}$
3331. $\begin{smallmatrix} + & \mathrm{IV} \\ 7 & . \end{smallmatrix}$
33331. $\begin{smallmatrix} + & \mathrm{V} \\ 7 & . \end{smallmatrix}$
etc. etc.
223. $\begin{smallmatrix} \mathrm{II} & + \\ . & 7 \end{smallmatrix}$
2333. $\begin{smallmatrix} \mathrm{III} & + \\ . & 7 \end{smallmatrix}$
23333. $\begin{smallmatrix} \mathrm{IV} & + \\ . & 7 \end{smallmatrix}$

31.

Zwei mathematische Bemerkungen.

(Von dem Herrn F. Strehlke, Oberlehrer am Cöllnischen Real-Gymnasium zu Berlin.)

I. Bemerkung zu der Eulerschen Auflösungsmethode der biquadratischen Gleichungen.

Es sei die Gleichung $x^4+ax^3+bx^2+cx+\partial=0$ gegeben; deren Wurzeln durch x, x_1, x_2, x_3 bezeichnet werden mögen. Man setze

$$p=-\frac{1}{48}(b^2-3ac+12\partial),$$

$$q=\frac{1}{192}(abc+\partial(8b-3a^2)-3c^2)-\frac{b^3}{864},$$

und suche die Wurzeln der cubischen Gleichung $y^3+py+q=0$. Die 3 Wurzeln dieser Gleichung, jede um $\frac{1}{48}(3a^2-8b)$ vermehrt, seien A, B, C. Aufserdem sei

$k=\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{2}ab+c$,

l der reelle Theil der imaginären Wurzeln B und C,

m der Coefficient von $\sqrt{-1}$,

so ist

1. $$\begin{cases} x = +\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\frac{1}{4}a, \\ x_1 = +\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}-\frac{1}{4}a, \\ x_2 = +\sqrt{B}-\sqrt{A}+\sqrt{C}-\frac{1}{4}a, \\ x_3 = -\sqrt{A}-\sqrt{B}-\sqrt{C}-\frac{1}{4}a, \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x = +\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}-\frac{1}{4}a, \\ x_1 = +\sqrt{A}-\sqrt{B}-\sqrt{C}-\frac{1}{4}a, \\ x_2 = -\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\frac{1}{4}a, \\ x_3 = -\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}-\frac{1}{4}a, \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x = +\sqrt{A}+\sqrt{(2l-2\sqrt{(l^2+m^2)})}-\frac{1}{4}a, \\ x_1 = +\sqrt{A}-\sqrt{(2l-2\sqrt{(l^2+m^2)})}-\frac{1}{4}a, \\ x_2 = -\sqrt{A}+\sqrt{(2l+2\sqrt{(l^2+m^2)})}-\frac{1}{4}a, \\ x_3 = -\sqrt{A}-\sqrt{(2l+2\sqrt{(l^2+m^2)})}-\frac{1}{4}a. \end{cases}$$

$$4.\quad \begin{cases} x = +\sqrt{A}+\sqrt{(2l+2\sqrt{(l^2+m^2)})}-\frac{1}{4}a, \\ x_1 = +\sqrt{A}-\sqrt{(2l+2\sqrt{(l^2+m_2)})}-\frac{1}{4}a, \\ x_2 = -\sqrt{A}+\sqrt{(2l-2\sqrt{(l^2+m^2)})}-\frac{1}{4}a, \\ x_3 = -\sqrt{A}-\sqrt{(2l-2\sqrt{(l^2+m^2)})}-\frac{1}{4}a. \end{cases}$$

Die Formeln (1.) gelten, wenn A, B, C reell und positiv und k positiv, die Formeln (2.), wenn A, B, C reell und positiv aber k negativ.

Ist A positiv, B und C negativ, so gelten für $+k$ die Formeln (2.) für $-k$ die Formeln (1.). Ist A reell und positiv, B und C imaginär, so gelten die Formeln (3.), wenn k positiv, die Formeln (4.), wenn k negativ ist.

II. Analytische Auflösung der Aufgabe:

Einen Kreis zu finden, welcher drei der Lage und Gröfse nach gegebene Kreise derselben Ebene berührt.

Die Mittelpuncte der drei Kreise seien A, B, C, die Radien dieser Kreise der Reihe nach R, r, ϱ, die drei Seiten des Dreiecks ABC, a, b, c. Der senkrechte Abstand des Punctes C von AB sei q, der senkrechte Abstand des Punctes A von q sei p. Der senkrechte Abstand des Mittelpuncts jenes gesuchten Berührungskreises, welcher die drei gegebenen Kreise ausschliefsend berührt, von AB werde durch y bezeichnet; der senkrechte Abstand des Punctes A von y hiefse x, der Radius des gesuchten Kreises selbst Z, so hat man offenbar folgende drei Gleichungen zur Bestimmung von x, y und z:

$$1.\quad (R+z)^2 = y^2+x^2,$$

$$2.\quad (r+z)^2 = y^2+(c-x)^2,$$

$$3.\quad (\varrho+z)^2 = (q-y)^2+(p-x)^2.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen wird erhalten:

$$z = \frac{cx}{R-r}-\frac{1}{2}.\frac{(c^2+R^2-r^2)}{(R-r)},$$

aus den Gleichungen (1.) und (3.) folgt

$$z = \frac{qy}{R-\varrho}+\frac{px}{(R-\varrho)}-\frac{(b^2+R^2-\varrho^2)}{2(R-\varrho)}.$$

Bezeichnet man nun $\frac{c}{R-r}$ mit c', $\frac{1}{2}.\frac{(c^2+R^2-r^2)}{(R-r)}$ durch m, so wie $\frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{R-\varrho}+(R+\varrho)\right]$ durch n, $\frac{q}{R-\varrho}$ durch q', $\frac{p}{R-\varrho}$ durch p', so erhält man aus den Gleichungen

$$z = q'y + p'x - n,$$
$$z_1 = c'x - m,$$

für y folgenden Werth:

$$y = \frac{(c' - p')x + (n - m)}{q'}.$$

Setzt man für $\frac{c' - p'}{q} A$, und B für $\frac{n - m}{q'}$, so erhält man

$$y = Ax + B,$$
$$R + z = (R - m) + c'x.$$

Diese Werthe in die Gleichung (1.) gesetzt, führen auf folgende Gleichung:

$$(R - m + c'x)^2 = x^2 + (Ax + B)^2,$$

aus welcher man erhält:

$$2x(c'^2 - 1 - A^2) = 2(AB - (R - m)c')$$
$$\pm\sqrt{(1 - c'^2)} . \sqrt{(-4B^2 + (1 - c'^2)(1 + A^2)(R - r)^2 - 4c.AB)}.$$

Führt man in diese Gleichung die gegebenen Gröfsen R, r, ϱ, p, q, a, b, c ein, und bezeichnet $R - r$, $R - \varrho$ und $n - \varrho$ durch d, d_1 und d_2, so erhält man nach den erforderlichen Reductionen:

$$2x = c + \frac{d(cd_1 - pd)(b^2 - cp - d_1 d_2) \pm dq_1\sqrt{(a^2 - d_2^2 . b^2 - d_1^2 . c^2 - d^2)}}{c^2(q^2 - d_1^2) + d(2cpd_1 - b_2 d)},$$

und wenn man den Nenner durch N bezeichnet, und

$$b^2 - cp - d_1 d_2 = k,$$
$$cd_1 - pd = l,$$
$$\sqrt{(a^2 - d_2^2 . b^2 - d_1^2 . c^2 - d^2)} = \sqrt{m}$$

setzt, so erhält man für x, y und z folgende Ausdrücke:

$$2x = c + \frac{dlk \pm qd\sqrt{M}}{N},$$
$$2y = \frac{q(c^2 - d^2)k \pm l\sqrt{M}}{N},$$
$$2z = -(R + r) + \frac{clk \pm cq\sqrt{M}}{N}.$$

Ist z. B. $R = 4$, $r = 3$, $\varrho = 1$, $p = 6$, $q = 8$, $c = 10$, so erhält man $d = 1$, $d_1 = 3$, $d_2 = 2$, $b^2 = p^2 + q^2 = 100$, $a^2 = 80$, $b^2 - cp = 40$, und durch eine ganz leichte Rechnung, nach den zuletzt gegebenen Ausdrücken:

$$x = 5 + \frac{17 \pm \sqrt{(19019)}}{240},$$
$$y = \frac{187 \pm \sqrt{(19019)}}{80},$$
$$z = \frac{-67 \pm \sqrt{(19019)}}{24}.$$

Um die Bestimmungsstücke des Kreises zu erhalten, welcher die Kreise R und r ausschliefsend und den Kreis ϱ einschliefsend, oder die Kreise R und r einschliefsend, den Kreis ϱ ausschliefsend berührt, ist ϱ negativ zu setzen, und man hat für diese beiden Fälle $d=1$, $d_1=5$, $d_2=4$, folglich

$$x = 5{,}1 \pm \frac{6}{55}\sqrt{33},$$

$$y = 1{,}8 \pm \frac{6}{10}\sqrt{33},$$

$$z = -2{,}5 \pm \frac{12}{11}\sqrt{33}.$$

Für die Kreise, von welchen der eine die Kreise R und ϱ ausschliefsend, r einschliefsend, der andere die Kreise R und ϱ einschliefsend, r ausschliefsend berührt, ist $d=7$, $d_1=3$, $d_2=-4$, folglich

$$x = 4{,}3 \pm \frac{14}{195}\sqrt{(4641)},$$

$$y = 3{,}4 \mp \frac{1}{65}\sqrt{(4641)},$$

$$z = 1{,}5 \pm \frac{4}{39}\sqrt{(4641)}.$$

Sucht man die Lage und Gröfse des Kreises, welcher r und ϱ ausschliefsend, R einschliefsend, oder r und ϱ einschliefsend, aber R ausschliefsend berührt, so ist $d=-7$, $d_1=5$, $d_2=2$, folglich

$$x = 5 + \frac{7}{16} \mp \frac{21}{80}\sqrt{(323)},$$

$$y = \frac{51}{16} \mp \frac{3}{80}\sqrt{(323)},$$

$$z = -\frac{1}{8} \pm \frac{3}{8}\sqrt{(323)}.$$

Anm. Man wird leicht wahrnehmen, dass $\sqrt{m}$ dem Producte dreier Linien gleich ist, welche auf den zweien Kreisen gemeinschaftlichen Tangenten von einem Kreise bis zum andern reichen.

Berlin, im November 1833.

32.

Lehrsätze,

zu beweisen, und Anmerkungen zu dem Aufsatze 15. im zweiten Hefte zwölften Bandes dieses Journals.

(Von Herrn Prof. Dr. *C. Gudermann* zu Münster.)

---

1. Auf dem obern Theile der Fläche einer Kugel, welcher durch einen horisontalen Hauptkreis begrenzt wird, können die beiden Endpuncte eines vollkommen biegsamen, unausdehnbaren und gleichmässig schweren Fadens AB, dessen Länge mit dem halben Umfange eines Hauptkreises der Kugel übereinstimmen mag, also befestigt werden, dafs der veränderliche senkrechte Druck des Fadens gegen die Kugelfläche in jedem Puncte noch einmal so grofs ist als die Spannung des Fadens in demselben Puncte, d. h. jede dieser Gröfsen dem Sinus des Perpendikels proportional ist, welches von jenem Puncte auf den horisontalen Hauptkreis gefällt wird.

2. Der Faden berührt dann mit den befestigten Endpuncten A und B einen Nebenkreis, welcher aus dem höchsten Puncte V der Halbkugel beschrieben ist, und wird durch den tiefsten Punct C desselben in zwei symmetrische Arme $CA = CB$ so getheilt, dafs der sphärische Abstand dieses Punctes, vom horizentalen Hauptkreise dem sphärischen Radius jenes Nebenkreises gleich ist. Diese Gröfse ist die einzige Constante, wodurch die Gestalt der Curve bestimmt ist, und mag der Parameter heifsen.

3. Zieht man von V aus nach C und noch nach einem andern Puncte M der Curve die Leitstrahlen VC und VM, welche verlängert den horizontalen Hauptkreis in D und P schneiden, so sind CD und MP die den Abscissen 0 und DP zugehörigen senkrechten Applicaten der Puncte C und M, und es kann sowohl die Länge des Bogens CM der Curve, als auch der Inhalt des dadurch mit begrenzten Vierecks $DCMP$ auf eine einfache Weise construirt und die Lage des Hauptkreises angegeben werden, welcher die Curve CM im Puncte M berührt. Man verlängere die Applicate PM über P hinaus um die eigne Länge $Pm = PM$, beschreibe aus m einen Nebenkreis mit einem sphärischen Radius, welcher das Doppelte des Parameters CD ist, ziehe aus M zwei Hauptkreise, welche diesen Nebenkreis berühren, so ist der eine von ihnen, welcher den Nebenkreis in n berühren mag, und vom anderen leicht unterschieden werden kann, auch eine Tangente der Curve CM für den Punct M; ferner ist der Bogen Mn immer noch einmal so lang, als der Bogen MC der Curve, und zieht man noch den Haupt-

bogen mn, so ist auch das Dreieck Mmn noch einmal so grofs als das Viereck $CDPM$.

4. Wird auf der Tangente Mn die sphärische Normale MN errichtet, wovon der horizontale Hauptkreis in N getroffen wird, und auch diese Normale um ihre eigne Länge $MR = MN$ über M hinaus verlängert, so ist der Punct R der sphärische Mittelpunct des Krümmungs-Kreises der Curve CM für ihren Punct M (wie bei der ebenen Kettenlinie).

5. Der Zusammenhang zwischen der Abscisse DP und dem Bogen CM kann durch elliptische Functionen der ersten und dritten Art ausgedrückt werden. Es werden auch andere Ausdrücke für die Gleichung oder Curve gewünscht. Wird der Parameter durch α und der Winkel PMn durch λ ausgedrückt, so ist das Doppelte der Abscisse DP z. B.

$$= \int \partial\lambda \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{\sin\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}} - \int \partial\lambda \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{\sin\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Wie grofs sind die Abscissen der Endpuncte des Fadens, wenn $\alpha = 30^0$ und wenn $\alpha = 60^0$ ist? Die Berechnung der Coordinaten einiger andrer Puncte der Curven mit jenen Parametern wären ebenfalls erwünscht.

6. Construirt man die der Curve zugehörige reciproke Curve (man vergleiche die Aufgabe 4. auf Seite 83. am Schlusse des ersten Heftes des 12ten Bandes dieses Journ.), so ist diese von derselben Art, als die ursprüngliche Curve; die Parameter der beiden Curven ergänzen sich zu einem Quadranten.

Das Product der Sinus der Applicaten der zusammengehörenden Puncte M und M' der beiden reciproken Curven ist von unveränderlicher Gröfse.

7. Wird die Applicate des Punctes R der den beiden reciproken Curven gemeinschaftlichen Evolute mit u bezeichnet, der Krümmungs-Halbmesser $MR = MN$ aber durch r, so ist immer

$$\sin u = \sqrt{(\sin 2\alpha . \sin 2r)},$$

und der Ausdruck der Abscisse des Punctes R durch seine Applicate ist

$$\int \frac{\partial u}{\cos u} \sqrt{\left(\frac{\sin u^2 - \sin 2\alpha^2}{\sin 2\alpha^2 - \sin u^4}\right)}.$$

8. Errichtet man auf RN in R ein sphärisches Perpendikel, und zieht man den Hauptbogen NV, welcher jenes Perpendikel in k schneiden mag, so hat man noch RK um seine eigne Länge $RS = RK$ über R hinaus zu verlängern; der also gefundene Punct S ist der Mittelpunct des sphärischen Krümmungs-Kreises der Evolute für ihren Punct R, und also SR der Krümmungs-Halbmesser selbst.

9. Werden die beiden reciproken Bogen CM und $C'M'$ durch s und σ bezeichnet, so ist immer

$$\tang s = \tang\alpha . \tang\sigma.$$

10. Wird der Unterschied der Abscissen der beiden Puncte M und M' durch $\triangle$ bezeichnet, so ist

$$\tang\triangle = \frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha^2}\cdot\sin\sigma\cos s,$$

und durch diese einfache Gleichung also ein Zusammenhang unter elliptischen Integralen ausgedrückt, welche zur ersten und dritten Art zugleich gehören.

11. Die Grundrisse der analytischen Sphärik behandelte centrische Kettenlinie hat nicht die Eigenschaft, dafs die reciproke Curve wieder von derselben Art ist. Bezeichnet man den Parameter der centrischen Kettenlinie durch α, die Abscisse und senkrechte Applicate eines Punctes der reciproken Curve aber durch x und y, so ist die Gleichung dieser Curve sehr verschieden von der Gleichung der ursprünglichen Curve, nämlich:

$$x = \text{arc}\left(\cos = \frac{\sin\alpha}{\cos y}\right) + \tang\alpha\,.\,\mathfrak{Arc}\left(\mathfrak{Cos} = \frac{\cos\alpha}{\sin y}\right).$$

Welche Eigenschaften hat diese Curve und wie können sie aus denen der ursprünglichen sogleich erschlossen werden?

12. Die Gleichung der sphärischen Curve, welche die Eigenschaft hat, dafs die von den Fufs-Puncten der Applicaten in der Abscissen-Linie auf die Normalen gefällten sphärischen Perpendikel eine unveränderliche Länge haben, ist in Anwendung der Länge-Function:

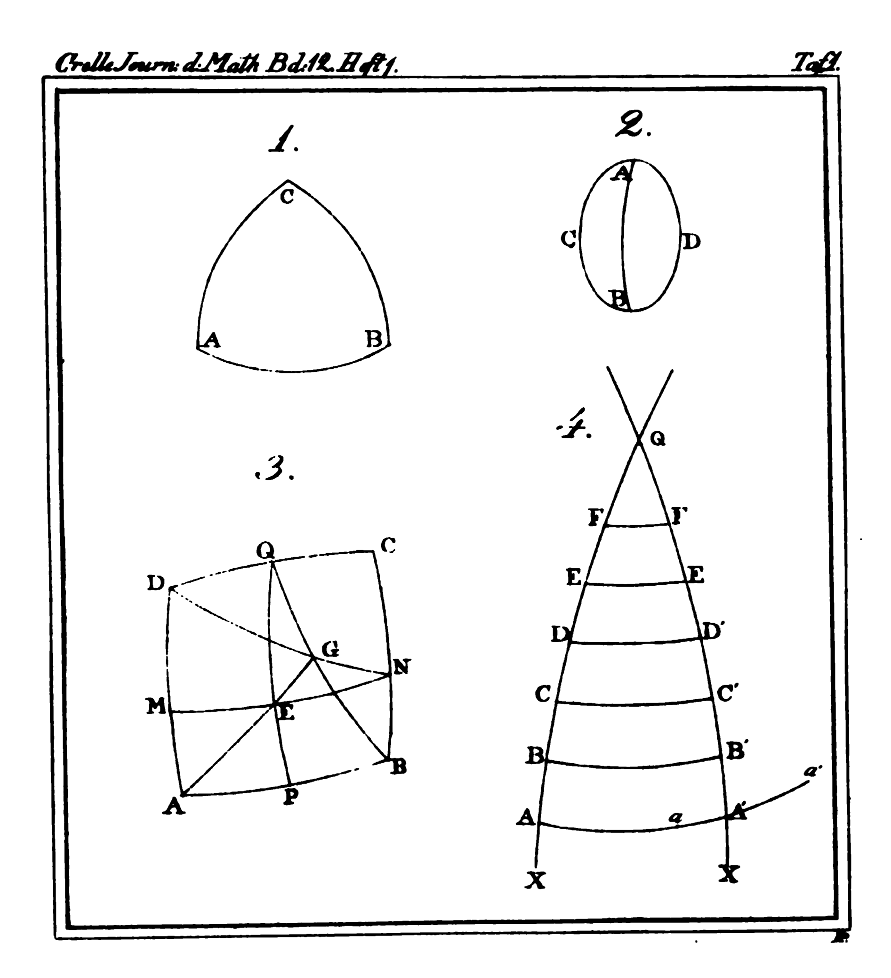
$$x = \frac{\mathfrak{L}\gamma}{\tang\alpha} - \frac{\mathfrak{L}\lambda}{\sin\alpha}, \quad \text{wenn} \quad \cos\lambda = \frac{\sin\alpha}{\sin y} \quad \text{und} \quad \cos\gamma = \frac{\tang\alpha}{\tang y} \quad \text{ist.}$$

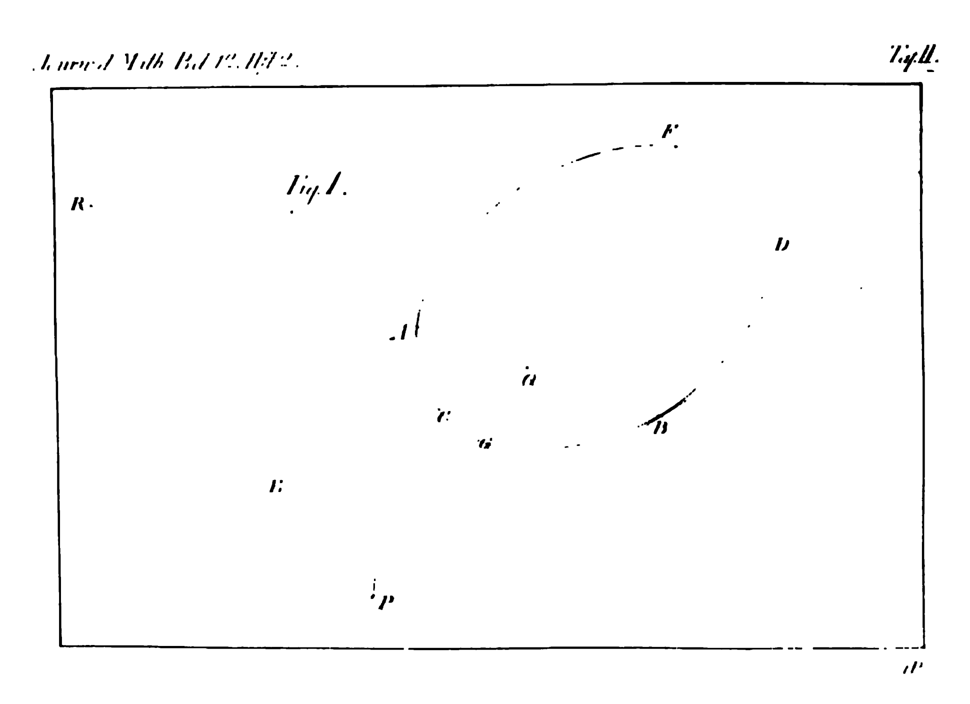
Der Winkel λ ist der, welchen die Tangente der Curve mit der Applicate macht; γ ist der Winkel, welchen die Applicate mit dem auf die Normale gefällten Perpendikel macht. Diese Curve gestattet eine einfache Rectification und Quadratur, auch hat sie einen Wendepunct und eine Spitze. Welche Eigenschaften hat sie sonst noch und welche hat die reciproke Curve?

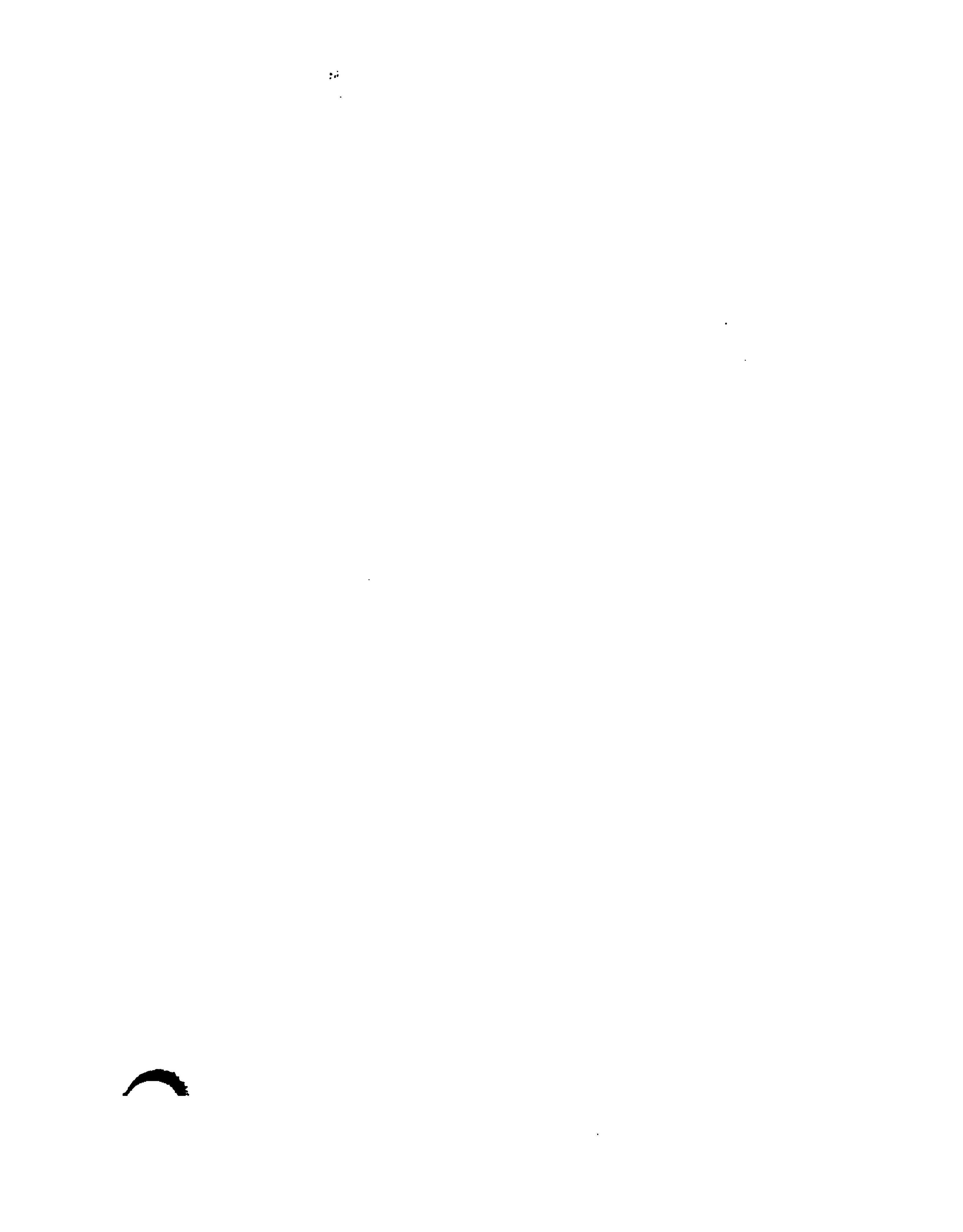
13. Der Druck, welchen die Oberfläche der Kugel von dem Faden an seinen verschiedenen Stellen leidet (man sehe den Aufsatz 15. Seite 179 im 12ten Bande dieses Journals), kann durch eine einfache Formel bestimmt werden; durch welche? Wie können die beiden Constanten h und k durch das Gewicht des Fadens und durch die Lage seines tiefsten Punctes bestimmt werden? Welche Eigenschaften hat diese sphärische Kettenlinie unter allen Umständen? Wie heisst der allgemeine Ausdruck für den Krümmungs-Halbmesser? Die Gleichung der reciproken Curve ist

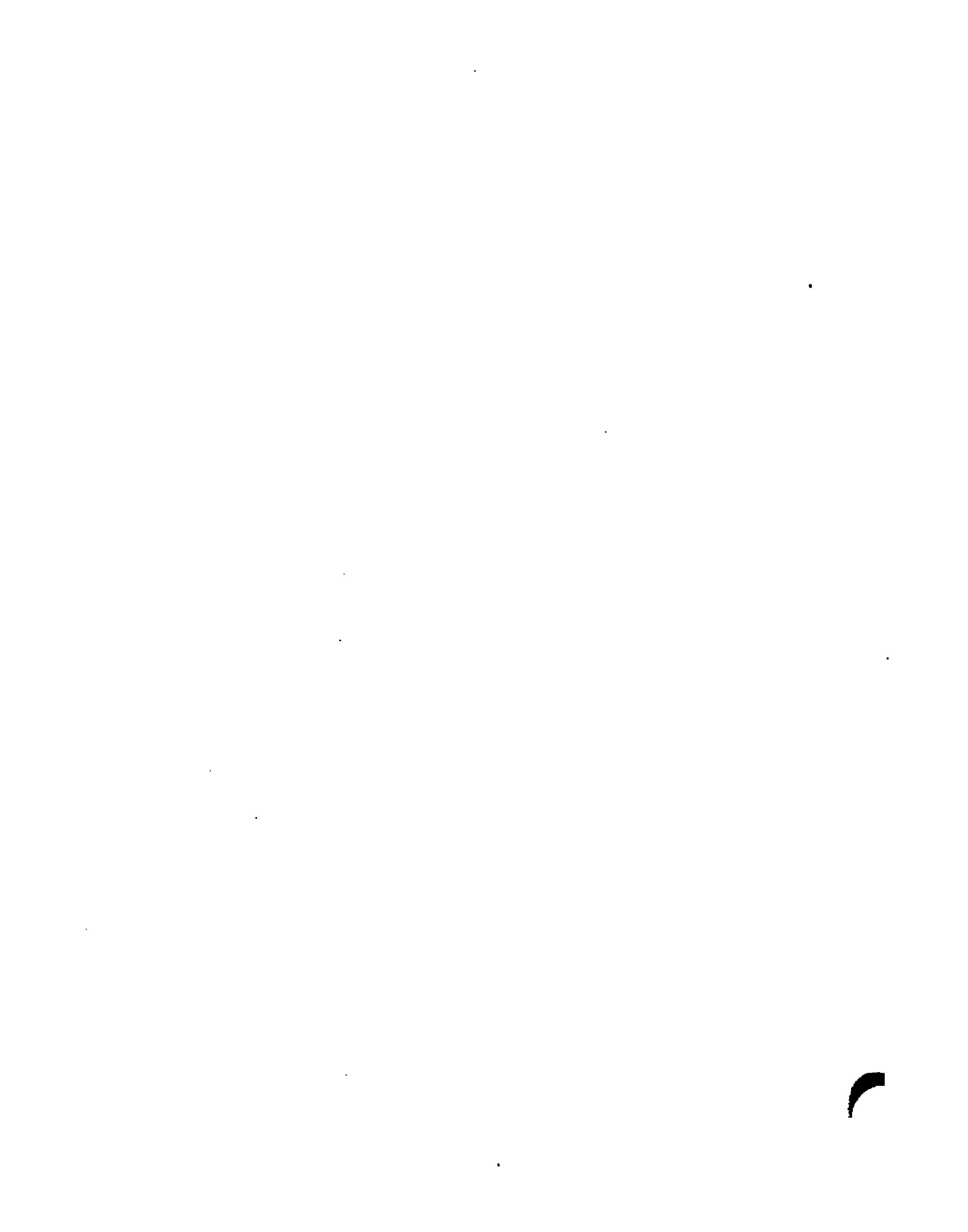
$$\partial\varphi = \frac{-(k-hz)\partial z}{(1-z^2)\sqrt{[z^2(1-z^2)-(k-hz)^2]}},$$

und in ihr haben φ und z ähnliche Bedeutungen in Ansehung der reciproken Curve, wie sie in dem oben genannten Aufsatze in Ansehung der ursprünglichen Curve haben. Für $h=0$ hat die Gleichung dieselbe Form, als die der ursprünglichen Curve. Wie kann diese Gleichung gefunden werden?


1.
C
A
B
2.
A
C
D
B
3.
Q
C
D
G
N
M
E
A
P
B
4.
Q
F
F
E
E
D
D'
C
C'
B
B'
a'
A
a
A'
X
X


Fig. 1.
R
F
D
A
a
c
B
E
P





STORAGE ARE

